FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

11. årgang, nr. 2, december 1997

FAMOS 11.2; december 1997.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove
Rasmus Borup Hansen (ansvh.)
René Jensen
Martin Jul
Peter Lund

Tegner:

Henrik Christian Grove
Claus Ekman Jørgensen

Deadline for næste nummer:
Fredag den 20. februar 1998

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX eller LaTeX 2_ε), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMOS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMOS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 800 stk.

ISSN 1395-2145

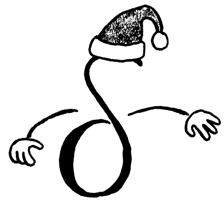
Indhold

Leder

I gamle, gamle dage havde de matematikstuderende på Københavns Universitet et fagblad der hed PlusMinus, men det døde. Men så i efteråret 1987, var der nogle der ønskede sig et fagblad, og i december 1987 udkom det allerførste nummer af FAMØS! Som du nok kan regne ud er det nu 10 år siden, og FAMØS har altså fødselsdag! Det forsøger vi at fejre, med et spændende nummer, som indeholder alt fra en boganmeldelse over en biografi om Galois til artikler om kontinuumshypotesen og divergente Fourierrækker! De første år udkom FAMØS ikke så regelmæssigt som i dag, og det er derfor, det først er nu i årets andet nummer, det er blevet tid til at fejre vores fødselsdag!

Dagen efter at sidste nummer var gået i trykken, skete det utænkelige, vi modtog en besvarelse af opgaven fra maj-nummeret! Jonas Kongslund (en af vores online-læsere) havde fundet fejlen i beviset for at $\pi = 3$, desværre var det som nævnt efter, at bladet var gået i trykken, så Jonas' besvarelse kunne ikke nå at komme med, men vi siger alligevel, mange tak, og opfordrer andre til også at indsende deres løsninger.

Husk at stemme ved valgene til rektor, konsistorium og fakultetsråd!



Målteori NU

Niels R. Hansen   Mikkel M. Larsen

Indledning

Det er nu tredje år kurset 2AN afholdes. De sidste to år har vi som instruktorer været tæt knyttet til kurset og har derfor gjort os nogle tanker om, hvordan det burde være. Lad os med det samme understrege, at vi i denne artikel vil fokusere på den position *mål- og integralteorien* indtager i den nuværende studieordning. Vi vil især argumentere for at mål- og integralteori hører hjemme på andet år.

Målteoriens nuværende position

Tidligere lå målteorien som en del af analysekurset 2MA i efterårssemestret på andet år, og i forårssemestret (samt på MAT 3) blev resultaterne herfra anvendt i fuld udstrækning. Nu har man fjernet målteorien fra MAT 2. Det overordnede problem herved er at den deduktive struktur delvist er forsvundet fra matematikstudiets analysedel af flere grunde.

For det første gennemgås store dele af den teori, der før blev gennemgået på 2MA-forårsdel, stadig på 2AN under kraftig brug af målteori, men uden at denne er indført. Selvfølgelig kan man trække på store sætninger tidligt i studiet, hvis deres indhold umiddelbart kan forstås indenfor rammerne af det pågældende kursus (jf. f.eks. påstand om eksistens og entydighed af løsninger til differentialligningssystemer på 1MA). Med resultater fra målteorien er der dog problemer, da en række begreber som f.eks. „næsten overalt“ ikke er umiddelbart forståelige. Brugen af L_p og $\mathcal{L}_p$ giver let anledning til forvirring, og selve det integralbegreb, der indgår i fremstillingen af teorien, forstås ikke af flertallet. Dette medvirker i høj grad til utryghed og unødvendig mystificering af matematikken.

For det andet fortsætter problemerne på MAT 3. Her er kurset 3MI end ikke obligatorisk, selvom man her ville få bevist (og forstået) de resultater, som blev postuleret på 2AN. Derimod er det ellers udmærkede kursus i funktionalanalyse 3AN obligatorisk, og også her benyttes målteoretiske resultater – man kan vel dårligt forestille sig distributionsteori uden mål og integraler.

Endelig har man valgt at fylde de (efter målteoriens forsvinden) manglende 2 punkter på MAT 2 ud med kurset 2SS i sandsynlighedsregning og statistik. Det er i vores øjne en anelse komisk, at sandsynlighedsregningens fundament – målteorien – ikke længere kan bruges på dette kursus.

Som instruktor er det frustrerende at undervise efter den nuværende model, når man kan ikke forvente fuld forståelse af de problemstillinger der diskuteres. Som matematikstuderende er det desuden bekymrende at matematikstudiet på denne måde bliver gjort rodet og usammenhængende – tendenser der ikke normalt kendetegner god matematik.

Fremover...

Udover de ovenfor nævnte problemer med studiestrukturen anser vi målteorien for fundamental i analysen, da den i vid udstrækning giver eksempelmaterialet i videregående analyse. Desuden er den i vores øjne et mønstereksempel på en smuk og sammenhængende matematisk teoridannelse. Det står os derfor klart, at der bør gøres noget ved den nuværende studieordning, og vi så gerne at målteorien blev lagt tilbage på andet år.

Et konkret forslag til en ny studieordning kunne være følgende. Sammen med „Metriske rum" skal målteorien udgøre et nyt 4-punktskursus i efteråret på MAT 2. Her tænker vi på det gamle kursus 2MA1, hvortil der allerede er udarbejdet fremragende noter af Christian Berg. I efteråret afholdes sideløbende hermed 2KF. I foråret forløber 2AL som hidtil og et nyt kursus 2HF (Hilbertrum og Fourierrækker) på 2 punkter skal dække Hilbertrum, Fourierrækker, PDE, o.lign. Matematik 2SS flyttes tilbage på 3. år og kan nu baseres på målteori efter behov – og skulle nu ikke længere være obligatorisk.

Det er vores opfattelse at modellen, som vi lige har skitseret, løser problemerne ovenfor, at den ikke gør studiet sværere end hidtil, og at den under alle omstændigheder er langt bedre end den nuværende ordning. Modellen er en mulig løsning, men andre modeller har været diskuteret og nye forslag og meninger er meget velkomne.

Har *du* en mening så giv den tilkende! Du kan komme til næste fagrådsmøde, hvor emnet vil blive diskuteret (se opslag – fagrådsmødet er for alle). Du kan også sende din mening med e-mail til Niels (richard@math.ku.dk) eller Mikkel (mmoeller@math.ku.dk).

Udover forfatterne har artiklen støtte fra 2AN-instruktorerne: Henrik Holm, Rolf Svegstrup, Sine Jensen og Rasmus Andersen.

Parlamentarikseminar

Henrik Chr. Grove

I weekenden den 14.–16. november var jeg på Forenede Studenterråds parlamentarikseminar. Parlamentarikseminaret er for alle studerende på Københavns Universitet med en interesse i studenterpolitik og afvikles som et stort rollespil. Deltagerne bliver indskrevet som studerende på Storstrøms Universitet, som er et lille[1] universitet, der kun har et aktivt humanistisk fakultet, med fire aktive uddannelser: Historie,

[1] På papiret er det faktisk ikke helt lille.

Fransk, Russisk og Medier & Kultur. Rollerne som VIP'er, TAP'er og eksterne medlemmer af fakultetsrådet varetages af ældre studerende (spillere) med større erfaring i studenterpolitik, f.eks. spillede Lars Laustsen[2] tillidsmand for TAP-gruppen.

Seminaret begyndte allerede indirekte om tirsdagen, hvor jeg fik et brev om at jeg var optaget på Storstrøms Universitet på faget Russisk, sammen med omkring 50 sider papir i form af indkaldelser og bilag til diverse møder. Fredag kl. 15.00 mødte jeg så op hos Forenede Studenterråd, hvor der først var en kort briefing samt tid til at finde nogen af de andre russiskstuderende (vi var i alt 9), inden bussen kørte til den hytte på Falster hvor Storstrøms Universitet holder til. Efter ankomsten blev vi indkvarteret i fagrådene, og så var der aftensmad. Allerede her traf russisk fagråd sin første beslutning, nemlig at skifte navn til „Centralkomiteen", en ting der vakte stærkt blandet begejstring blandt VIP'er og TAP'er. Efter aftensmaden satte gamemaster Gyrd Foss[3] spillet officielt igang, og spillerne præsenterede sig selv, og herefter drejede det sig kun om en ting: *studenterpolitik*! Egentlig var der ikke planlagt møder før dagen efter, men Centralkomiteen besluttede at lægge hårdt ud, med at invitere vores VIP'er til et uofficielt møde, for lige at se dem an. Efter dette møde arbejdede vi selv videre med de forskellige sager til omkring kl. 3.00.

Lørdagen begyndte (efter morgenmaden) med et fagrådsmøde, hvor vi valgte vores officielle studienævnsrepræsentanter, men da vi allerede aftenen inden havde fået tilsagn om, at vi alle ville få taleret til møder (selv om 6 af os officielt ville være observatører), var det ikke noget vi gik højt op i. Herefter gik vi direkte videre til det første studienævnsmøde, hvor vi så skulle diskutere de forskellige sager med vores VIP'er. Der blev snakket meget på dette møde, men desværre nåede vi ikke mange resultater. Efter frokost var det først tid til endnu et fagrådsmøde, hvorefter vi skulle til humrådsmøde[4]. Her viste det sig heldigvis, at vi (på dette tidspunkt) stort set var enige med de studerende på de andre fag, og mødet sluttede som weekendens eneste før tiden. Herefter var der afsat en times fritid i programmet, som blev udnyttet på forskellig vis, hvorefter vi endnu engang havde et lille fagrådsmøde, men vi havde nu efterhånden ikke meget mere at diskutere, så det blev ikke så formelt. Herefter var det tid til studienævnsmøde nummer to, som trak ud (afbrudt af aftensmaden) til lidt i 11. Herefter foregik det hele i mindre formelle fora indtil kl. 02.55, hvor der med 5 minutters varsel[5] blev inkaldt til ekstraordinært humrådsmøde, hvor det endelig kl. 4.15 lykkedes at få tingene til at falde på plads.

Dagen efter kom „den store finale" fakultetsrådsmødet. Nu var det tid til at se hvad man kunne få ud af alt det man havde lavet dagen (og natten) før. Herefter sluttede spillet, og under frokosten blev der så tid til at snakke med vores „tidligere" VIP'er om hvordan vi synes, at arbejdet i studienævnet var forløbet, og efter frokost var der så en generel fælles evaluering af arrangementet. Der var bred enighed om, at det havde været enormt sjovt, men også hårdt, der var også gode råd fra spillerne

[2] Andendelsstuderende på matematik

[3] N'te års retorikstuderende, muligvis Københavns Universitets bedste studenterpolitiker

[4] Humrådet er et koordinerende organ for fagrådene på det humanistiske fakultet, for de blandt andet vælger deres repræsentanter til fakultetsrådet. Naturvidenskabs ækvivalent hedder Mat-Nat koordineringen.

[5] Når man tager i betragtning, at det var flere uges møder der skulle overstås i den weekend, var det ikke urimelig kort varsel.

om, hvad de studerende kunne havde gjort bedre.

Hovedplottet i spillet var, at Medier & Kulturuddannelsen havde fået en ekstremt dårlig evaluering, og derfor skulle have tilført nogle midler for ikke at blive lukket. Der var så forskellige løsningsmodeller, men der var ingen af dem, der i deres oprindelige udformning var acceptable. Oven i det hele, havde de andre fag så deres (mere eller mindre) fagspecifikke problemer. På russisk havde vi f.eks. det problem, at man ville lave en samarbejdsamtale med andre universiteter rundt om Østersøen[6] (Universitas Balticum). Problemet var bare, at de mest spændende kurser disse universiteter kunne tilbyde var ting som *traktorreservedelsproduktion* og *russisk kommandosprog*. Sammen med en generelt dårlig aftale gjorde det, at vi til vores VIP'ers overraskelse ikke brød os om idéen.[7]

Tak til Fagrådet som betalte turen for mig!

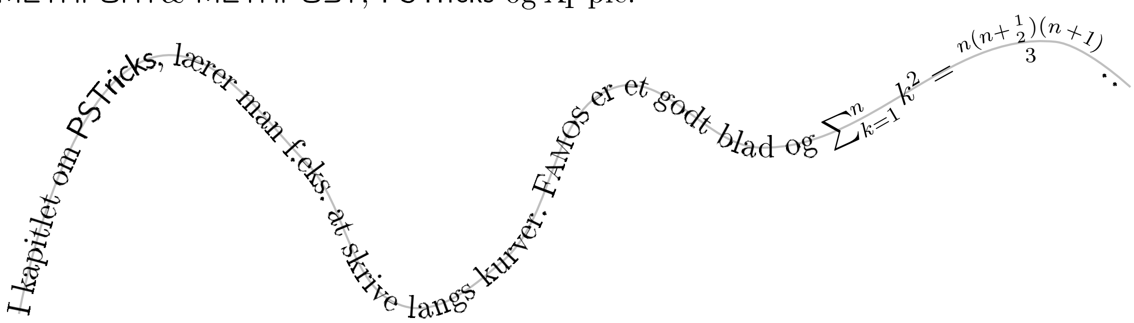
The LaTeX Graphics Companion

Henrik Chr. Grove

Så er der godt nyt til alle LaTeX-brugere. To af forfatterne til The LaTeXCompanion [2] (Michel Goosens & Frank Mittelbach), har sammen med Sebastian Rahtz skrevet The LaTeX Graphics Companion med undertitlen "Illustrating documents with TeX and PostScript".

Bogen indeholder 11 kapitler der kan opdeles i 5 grupper, samt 2 appendices. Bogens første del udgøres af kapitel 1 og 2, der udgør forudsætningerne for resten af bogen. Kapitel 1 indeholder en introduktion til grafik og de teknikker resten af bogen handler om, mens kapitel 2 dækker LaTeX's standard graphics pakke, som bruges til at inkludere billedfiler.

De næste 3 kapitler (3–5), præsenterer hver et specielt program/pakke, som hver for sig kan lave en masse spændende ting, de 3 kapitler omhandler henholdsvis METAFONT& METAPOST, PSTricks og XY-pic.



Derefter kommer 3 kapitler, der hver især omhandler de problemer man kan komme ud for i forbindelse med forskellige anvendelser. Kapitel 6 er for fysikere,

[6] Universiteter der modsat Storstrøms Universitetvirkelig findes.

[7] I den virkelige verden ville det havde set anderledes ud, men det skulle jo ikke være for nemt.

kemikere og ingenører. Kapitel 7 er for *musikere*[1], mens kapitel 8 er for alle os der godt kan lide at slappe af med en eller anden form for spil. Her kan man få hjælp til at skrive om skak, go, backgammon, krydsogtværser samt kortspil med speciel vægt på bridge.

De sidste 3 kapitler er mere generelle, og indeholder information om brug af farver, PostScript skrifttyper, og PostScript værktøjer. Farver og fonte er ting der kan få en tekst til at se mere spændende ud, mens PostScript værktøjer kan være strengt nødvendige for at få sin tekst ud af printeren.

De 2 appendices indeholder tekniske informationer, det første er ikke særlig spændende, men det andet indeholder oplysninger om hvor man kan finde alle de spændende pakker bogen omtaler!

Bogen er en glimrende opslagsbog, hvor man kan finde en forklaring på hvordan man laver næsten enhver form for grafik med LaTeX. Jeg savner dog et kort afsnit om LaTeX's indbyggede picture enviroment, som både er let og hurtigt at bruge, og kan lave de mest simple ting. Uden det skal man skiftevis have fat i „The LaTeX Graphics Companion“ og „LaTeX A Document preparation system“ [3].

Man kan få rigtig mange timer til at gå med at sidde og lege med alle de spændende ting bogen forklarer, men hvis man ikke laver særlig meget grafik med LaTeX, er bogen ikke de 475 kr værd, som den koster i naturfagsbogladen.

Lad os slutte med endnu et lille eksempel, denne gang inspireret af kapitel 8.

N/Ingen	♠ E 10 9 4 ♡ K D 7 2 ♢ D 7 ♣ E B 9	
♠ 2 ♡ E B 10 6 5 3 ♢ 5 4 ♣ K D 7 6	N V Ø S	♠ 7 3 ♡ 9 4 ♢ E B 9 6 3 2 ♣ 8 5 2
	♠ K D B 8 6 5 ♡ 8 ♢ K 10 8 ♣ 10 4 3	

Vest	Nord	Øst	Syd
–	1ut	pas	2♡
pas	2♠	meld selv videre	

Litteraturliste

[1] Michel Goosens, Sebastian Rahtz og Frank Mittelbach: *The LaTeX Graphics Companion*. Addison Wesley Longman 1997, ISBN 0–201–85469–4.

[2] Michel Goosens, Frank Mittelbach og Alexander Samarin: *The LaTeX Companion*. Addison-Wesley 1994, ISBN 0–201–54199–8.

[3] Leslie Lamport: *LaTeX A Document Preparation System*, second edition. Addison-Wesley 1994, ISBN 0–201–52983–1.

[1] Med de rette værktøjer, kan LaTeX faktisk skrive noder ret flot!

Side 9 sætningen:
Lidt om potens

Peter Jørgensen

Indledning

(Sjovt nok, hver gang jeg skriver side 9-sætningen, ender den med at handle om potens...)

Følgende opgave har været stillet mindst een gang på Matematisk Afdelings andetårskursus i algebra: Lad R være en vilkårlig ring, som opfylder at for hvert $x \in R$ er $x^3 = x$. Vis nu, at R er kommutativ.

Helt nem er opgaven ikke, selv om jeg har hørt om en ærekær VIPer, som kunne løse den ganske hurtigt... Der er flere forskellige beviser for opgavens påstand. Det kan f.eks. sagtens lade sig gøre at lave et bevis ved direkte udregninger, altså ved at skrive ud hvad ligninger såsom $(x + y)^3 = x + y$ egentlig betyder. Men man skal regne en del!

Mere interessant er det dog at se abstrakt på opgaven. Det viser sig nemlig, at man med brug af passende værktøjer fra ringteori kan vise følgende overraskende generalisering af opgavens resultat:

Jacobsons Sætning. *Lad R være en ring, som opfylder:*

$$(*) \quad \textit{Hvis } x \textit{ er et ringelement, så findes et heltal } n \geq 2 \textit{ så } x^n = x.$$

Da er R kommutativ.

Beviset for sætning 1 bliver givet nedenfor. Det giver lejlighed til at se to klassiske, vigtige sætninger fra ringteori i brug: Wedderburns Sætning (om endelige skævlegemer) og Tæthedsprincippet (for primitive ringe).

Bemærk iøvrigt, at det øjensynlig er håbløst at vise sætning 1 ved direkte beregninger. Skulle en af læserne alligevel kunne vise sætningen ved et direkte regnestykke, er jeg sikker på, at FAMØS vil være interesseret!

Lidt om primitive ringe og Jacobson-radikalet

Som antydet ovenfor indgår to vigtige ingredienser i beviset for sætning 1: Wedderburns Sætning og Tæthedsprincippet. Wedderburns Sætning har en ret uskyldig ordlyd, som vi vender tilbage til nedenfor, men Tæthedsprincippet er lidt vanskeligere at forstå — for overhovedet at kunne læse hvad Tæthedsprincippet siger, må man vide noget om primitive ringe.

. *Lad R være en ring og M en R-venstremodul.*

Som bekendt kaldes M simpel*, dersom de eneste undermoduler i M er $\{0\}$ og M.*

Lad $r \in R$. Vi kan betragte $rM = \{rm \mid m \in M\}$, og vi kalder M en tro *modul, dersom $rM = 0$ medfører $r = 0$.*

Vi kalder R en venstreprimitiv ring*, dersom R har en venstremodul, der både er tro og simpel.*

Lad $\mathfrak{a}$ være et to-sidet ideal i R. Vi kalder $\mathfrak{a}$ et venstreprimitivt ideal*, dersom ringen $R/\mathfrak{a}$ er venstreprimitiv.*

Et naivt eksempel: En simpel venstre-modul M har jo altid formen $R/\mathfrak{M}$, hvor $\mathfrak{M}$ er et maksimalt venstreideal. Så hvis R er kommutativ og primitiv, findes altså et maksimalt to-sidet ideal $\mathfrak{M}$ i R, så $R/\mathfrak{M}$ er en tro R-modul. Dvs. at for $x \neq 0$ er $x \cdot (R/\mathfrak{M}) \neq 0$, men dette tvinger $\mathfrak{M}$ til at være 0 (for ellers ville der jo findes et $x \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}$, og dette x ville opfylde $x \cdot (R/\mathfrak{M}) = 0$). Man konkluderer, at i en kommutativ primitiv ring, R, er $\{0\}$ et maksimalideal, hvorfor R er et legeme.

Dette eksempel kunne forlede én til at tro, at primitivitetsbegrebet ikke er interessant. Men det er forkert: så snart man betragter ringe R, som ikke er kommutative, bliver primitivitet et vigtigt begreb.

. *Lad R være en ring. Vi kalder mængden*

$$J(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ venstreprimitivt}} \mathfrak{m}$$

for R's Jacobson-radikal*.*

. *Lad R være en ring med Jacobson-radikal $J(R)$. Da gælder*

(1°) *$J(R)$ er et to-sidet ideal i R.*

(2°) *Hvis $x \in J(R)$, er elementet $1 - x$ invertibelt i R.*

Bevis. Bevis. Se [1], proposition 2.16. □

Vi kan nu formulere Tæthedsprincippet:

Tæthedsprincippet. *Lad R være en venstreprimitiv ring. Så findes der et skævlegeme, D, så een af følgende to betingelser er opfyldt:*

- *Der er et naturligt tal, n, så der gælder $R \cong \mathrm{Mat}_n(D)$, altså så R er isomorf med $n \times n$-matrixringen over D.*
- *For hvert naturligt tal, m, findes en delring $R_m \subseteq R$ samt en surjektiv ringhomomorfi $R_m \longrightarrow \mathrm{Mat}_m(D)$.*

Bevis. Bevis. Se [2], theorem 2.1.4. □

(Faktisk snyder jeg lidt her — sætning 5 er i virkeligheden et korollar til den sætning, der almindeligvis kaldes Tæthedsprincippet. Men mellem brødre...)

Skævlegemer og Wedderburns Sætning

Før vi kan skride til beviset for sætning 1, må vi vide lidt om skævlegemer. Et skævlegeme er som bekendt en (ikke nødvendigvis kommutativ) ring D, som opfylder, at ethvert $x \in D \setminus \{0\}$ har en invers, $x^{-1} \in D$, som opfylder

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1.$$

Specielt er et legeme altså et skævlegeme.

Man kan sagtens forestille sig et legeme (der jo er kommutativt) placeret som delring inden i et skævlegeme. For at give et eksempel kan vi antage, at skævlegemet D har positiv karakteristik, k (dvs. at $kd = 0$ for ethvert $d \in D$). Betragt mængden

$$P = \{1, 2, \ldots\} \subseteq D$$

(P er en endelig mængde, fordi $k = 0$ i D). Nu er P faktisk et legeme, som sidder som delring i D; man kalder P for D's primlegeme.

Lad os vise, at P er et legeme: det er klart, at P er en kommutativ delring af D, så vi skal altså blot indse, at P er lukket mht. invers. Hvis $x \in P \setminus \{0\}$, kan man betragte afbildningen $\xi : P \longrightarrow P$ givet ved

$$y \longmapsto xy.$$

Da D er et skævlegeme, og specielt et domæne (altså uden nuldelere), er ξ injektiv. Og da P er en endelig mængde, er ξ pga. skuffeprincippet også surjektiv. Derfor antager ξ værdien 1, og man ser, at der findes $y \in P$ så $xy = 1$. Men her må $y = x^{-1}$, så vi har $x^{-1} = y \in P$.

Bemærk at P som endeligt legeme jo må have karakteristik p for et primtal p. Og det tvinger faktisk også D til at have karakteristik p. Vi fik altså i forbifarten vist: et skævlegeme har karakteristik lig enten 0 eller et primtal, p.

Følgende sætning er en af de fundamentale i teorien for skævlegemer.

Wedderburns Sætning. (1°) *Lad D være et skævlegeme med endeligt mange elementer. Da er D kommutativt (og er således et legeme).*

(2°) *Lad D være et skævlegeme af karakteristik p, hvor p er et primtal. Lad Z være D's centrum. Antag at $d \in D \setminus Z$ opfylder $d^{p^n} = d$ for et naturligt tal n. Da findes $x \in D$ og et naturligt tal, i, så der gælder $xdx^{-1} = d^i \neq d$.*

Bevis. Bevis. Se [2], lemma 3.1.1 og theorem 3.1.1. □

(Igen snyder jeg lidt: det er kun (1°), der normalt går under navnet Wedderburns Sætning, mens (2°) faktisk er et af de lemmaer, man viser undervejs til at vise (1°).)

Beviset for Jacobsons Sætning

Før vi kan vise Jacobsons Sætning, har vi brug for et lemma.

. *Lad D være et skævlegeme af karakteristik p, hvor p er et primtal, og lad G være en endelig undergruppe i D's multiplikative gruppe. Så er G kommutativ.*

Bevis. Bevis. Lad P være D's primlegeme (så altså $P \cong \mathbb{Z}/(p)$). Sæt

$$E = \{\sum_i x_i g_i \mid x_i \in P,\, g_i \in G\}.$$

Da P består af centrale elementer i D, og da G er lukket mht. multiplikation, ses det let, at E er en delring af D. Det er også klart, at E kun har endeligt mange elementer.

Dermed bliver E selv et skævlegeme. For at vise dette mangler vi kun at se, at E er lukket mht. invers, men hertil kan vi bruge samme fremgangsmåde, som vi brugte ovenfor til at indse, at primlegemet, P, i et skævlegeme, D, faktisk *er* et legeme.

Men nu kan vi bruge Wedderburns Sætning: den fortæller os, at skævlegemet E er kommutativt. Og G er jo en delmængde af E, så vi ser specielt, at gruppen G er kommutativ. □

Herefter kan vi trykke den af:

Bevis. Bevis for sætning 1. Vi starter med at vise, at $J(R) = 0$. Betragt altså $a \in J(R)$. Der findes iflg. betingelse $(*)$ et naturligt tal $n \geq 2$ så $a^n = a$. Da $J(R)$ er et ideal iflg. proposition 4, del (1°), vil $a^{n-1} \in J(R)$. Dette medfører iflg. proposition 4, del (2°), at $1 - a^{n-1}$ er invertibel i R. Men

$$a(1 - a^{n-1}) = a - a^n = 0,$$

og ganger man denne ligning med $(1 - a^{n-1})^{-1}$ fra højre, får man som ønsket $a = 0$.

Nu betragtes følgende ringhomomorfi,

$$\phi : R \longrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \text{ venstreprimitivt}} R/\mathfrak{m},$$

hvor man altså afbilder fra R til produktet af alle venstre primitive faktorringe af R. Man konstruerer ϕ som følger: på "plads $\mathfrak{m}$" er ϕ simpelthen lig den kanoniske ringhomomorfi $R \longrightarrow R/\mathfrak{m}$.

Det er klart, at

$$\operatorname{Ker}(\phi) = \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ venstreprimitivt}} \mathfrak{m} = J(R) = 0,$$

så ϕ er altså injektiv, og indlejrer dermed ringen R i et produkt af venstre primitive ringe af formen $R/\mathfrak{m}$. Hvis man kan se, at hver $R/\mathfrak{m}$ er kommutativ, vil det således følge, at R er kommutativ. Bemærk iøvrigt, at hver $R/\mathfrak{m}$ arver betingelse (*) fra R.

Dermed har vi reduceret vores problem, og mangler nu kun at se, at der gælder: en venstre primitiv ring, der opfylder (*), må være kommutativ.

Betragt således en venstre primitiv ring, S, der opfylder betingelse (*). Vi kan bruge Tæthedssætningen på S: vi finder altså et skævlegeme, D, så et af de to udsagn i Tæthedssætningen er opfyldt for S og D.

Imidlertid kan vi hurtigt se, at Tæthedssætningens udsagn nr. 2 umuligt kan passe. For hvis det gjorde, skulle S have en delring, S_2, så der var en surjektiv ringhomomorfi $S_2 \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(D)$. Da S_2 opfylder betingelse (*), ville $\mathrm{Mat}_2(D)$ også komme til at opfylde (*), men det er umuligt, for

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(D)$$

er åbenbart et nilpotent element.

Så Tæthedssætningens udsagn nr. 1 må gælde. Og faktisk må n i udsagnet være lig 1, for ellers ville vi nemt, vha. samme idé som ovenfor, kunne konstruere et nilpotent element i $\mathrm{Mat}_n(D) \cong S$, i modstrid med betingelse (*). Ialt ser vi, at $S \cong D$.

Dermed har vi reduceret vores problem yderligere, og mangler nu kun at se, at der gælder: hvis et skævlegeme, D, opfylder betingelse (*), så er D kommutativt.

Betragt således et skævlegeme D, der opfylder betingelse (*). I D gælder ligningen $2^n = 2$ for et passende n, så D har positiv karakteristik, p, for et passende primtal p.

Antag nu at $d \in D \setminus Z$, hvor Z er D's centrum. Hvis vi kan vise, at antagelsen $d \notin Z$ medfører en modstrid, er vi færdige (da Z jo så må udgøre hele D). Betragt hertil $P(d)$, det mindste delskævlegeme af D, som indeholder både primlegemet, P, og elementet d. Da der jo findes et naturligt tal $m \geq 2$ så $d^m = d$, er det ikke svært at indse, at $P(d)$ kun indeholder endeligt mange elementer, og iflg. Wedderburns Sætning er $P(d)$ således kommutativt. Med andre ord, $P(d)$ er et endeligt legeme af karakteristik p, så $|P(d)| = p^n$ for et passende n. Derfor vil faktisk $d^{p^n} = d$ (fordi $P(d)$'s multiplikative gruppe har $p^n - 1$ elementer).

Imidlertid er alle forudsætninger i sætning 6, del 2° nu opfyldt, så der findes et element $x \in D$ så

$$xdx^{-1} = d^i \neq d.$$

Når dette sammenholdes med ligningerne

$$d^{p^n} = d \text{ og } x^q = x$$

(man kan jo iflg. betingelse $(*)$ finde et q med denne egenskab), ser man, at d og x tilsammen frembringer en endelig undergruppe, G, af D's multiplikative gruppe.

Iflg. lemma 7 er G kommutativ. Men det er i modstrid med at $xdx^{-1} \neq d$, så vi har fundet den ønskede modstrid. □

Litteraturliste

[1] K. R. Goodearl and R. B. Warfield, "An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings" (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

[2] I. N. Herstein, "Noncommutative Rings" (Wiley, New York, 1968).

Lev stærkt - dø ung
Historien om Galois' liv og død

Steffen Marx Skjørbæk

Få matematikere har haft et så spændende liv som Evariste Galois – ingen har haft et så kort liv. Få matematikere har skabt så meget fascination – og få har været genstand for en sådan mytedannelse som Galois. Det vil ikke være for meget at sige at Galois i sit korte liv har skabt sig en plads ved siden af alle tiders største matematikere.

I denne lille biografi vil jeg forsøge at skildre Galois' liv så nøgternt som muligt. Derefter vil jeg gøre rede for nogle af de forskellige mytedannelser der er opstået omkring hans død.

Evariste Galois blev født 25. oktober 1811 i Bourg la Reine, som på det tidspunkt lå lige i udkanten af Paris.

Hans mor, Adelaide-Marie Demante, var ud af en juristfamilie. Hendes far havde, helt i oplysningstidens ånd, givet ikke blot sine sønner, men også sine døtre en bundsolid klassisk uddannelse. Adelaide-Marie blev således undervist i filosofi, klassisk litteratur og religion. Hun var vældig intelligent, havde en stærk karakter og var tilsyneladende den kønneste af sine søstre, men var lidt af en original. Galois' far, Nicholas-Gabriel Galois, var leder af en kostskole i byen. Han var intelligent og kendt som et glad menneske, der ville gøre meget for andre. Dette og hans generelle sindelag gjorde ham populær i byen. De var begge liberale.

Under 100-dagene[1] blev Nicholas-Gabriel valgt til borgmester i Bourg la Reine og han beholdt denne post efter Waterloo dog under et tiltagende pres fra royalister

[1] I 1814 blev Napoleon sendt i eksil på Elba. I februar 1815 sejlede han til Provence, steg i land og rejste til Paris. Han var ved magten i 100 dage, før han blev slået i slaget ved Waterloo. En efterkommer af Ludvig XVI, som blev halshugget under revolutionen, blev indsat som den nye konge Ludvig XVIII. Det blev dog ikke en genindførelse af det gamle enevælde, men en slags konstitutionelt monarki, idet han blev tvunget til at underskrive en håndfæstning. I 1824 døde Ludvig XVIII, og hans bror blev kong Karl X. Han prøvede forgæves at genindføre det gamle regime (enevælde).

i byen. Barndommen synes i det hele taget at være forløbet i en tryg og glad atmosfære. De første tolv år bliver Galois undervist af sin mor. Han bliver undervist i latin, græsk, filosofi, religion og klassikerne i det hele taget en traditionel uddannelse. Hun giver sin egen, ikke ubetydelige, skepsis overfor religion videre til Galois. Og det vil ikke være forkert at sige at Galois arver sine forældres liberale sindelag.

12 år gammel bliver Galois indskrevet på Louis le Grand, som var en gammel, traditionsrig kostskole i Paris. Han kommer ind i fjerde klasse, dvs. han mangler fire klasser. Han klarer sig fint de første to år og vinder bl.a. en pris og tre udmærkelser i latinske og græske oversættelser i slutningen af fjerde klasse. Og endnu to udmærkelser året efter. I sommeren 1826 bliver Nicholas-Gabriel af forstanderen opfordret til at lade Galois gå anden klasse om; ikke fordi han har klaret sig dårligt, men fordi forstanderen mener at Galois er for ung og umoden til at lære retorik, som er et stort fag i første klasse. Faderen modsætter sig kraftigt, men må i februar 1827 give efter for presset. I stedet for at gå i første klasse må Galois gå anden klasse om.

Der blev undervist i matematik allerede fra tredje klasse: aritmetik i tredje, algebra og geometri i anden og bl.a. analytisk geometri i første klasse. Galois har imidlertid ikke været specielt begejstret for, eller gjort det specielt godt i, matematik indtil dette tidspunkt. I efteråret 1826 var der kommet ny matematiklærer i anden klasse. M. Vernier brugte nogle andre lærebøger end sin forgænger, bl.a. Legendre's Geometri og noget af Lagrange's ligningsteori. Historien går, at Galois læste Legendre's Geometri på to dage *som andre børn læser en piratroman*[2]. Det tog normalt to år at tilegne sig den. Under alle omstændigheder bliver Galois' interesse for matematik vakt ret hurtigt dette skoleår. Galois lader sig helt opsluge af matematikken og begynder at læse de originale værker af de store matematikere. Han bliver indadvendt og koncentreret. Han isolerer sig fra sine kammerater, som finder ham sær, han negligerer fuldstændigt alle sine fag, og hans karakterer svinger. Denne udvikling foregår hurtigt og kan illustreres ved at betragte M. Vernier's karakterer af Galois:

Religion – Godt	Arbejde – Godkendt
Opførsel – God	Fremgang – Noteret
Gemyt – Glad	Karakter – God, men besynderlig

Senere samme år:

Religion – Godt	Arbejde – Ukonstant
Opførsel – Godkendt	Fremgang – Ikke særlig tilfredsstillende
Gemyt – Glad	Karakter – Tillukket og original

Det er kendetegnende for Galois, at han læser mere eller mindre på må og få. Hans lærer M. Vernier prøver at få ham til at læse mere systematisk, men forgæves. Galois tager ikke imod sin lærers gode råd, han har besluttet, at han vil ind på Ecole Polytechnique. I juni 1828 går han til optagelsesprøve uden at have taget de nødvendige fag – fag som man først får i første klasse – og dumper[3]!

[2] [BELL], 400.

[3] Dette er i Galois øjne en dyb uretfærdighed. Dette er den første af de modgange, som Galois kommer ud for.

I februar kommer Galois endelig i første klasse. Hans nye matematiklærer, M. Richard, er en sjælden type matematiker. Han laver ingen forskning overhovedet, men holder sig a jour med den seneste forskning gennem forelæsninger på Faculté des Sciences[4]. Han er en formidabel matematikpædagog, som har et usædvanlig godt øje for unge talenter, og blandt hans elever findes Hermite, Serret og Galois. M. Richard opmuntrer Galois og taler sågar for at han skal optages på Ecole Polytechnique uden at gå til optagelsesprøve. Under disse forhold offentliggør Galois sin første lille artikel om kædebrøker i april 1829. Men han er allerede igang med at arbejde på sin teori, den som senere døbes i hans navn. [RIGATELLI] beskriver denne tid som den lykkeligste i Galois' liv – en tid hvor ideerne springer fra hans hovede som champagnepropper til en fest[5]. Det vil jeg nu tillade mig at sætte et spørgsmålstegn ved. Sagen er den at livet på kostskolen havde sine egne faste rutiner og disciplin som i et fængsel, og det er svært at forestille sig, at Galois, hvis barndom var så lykkelig og tryg, skulle betragte denne tid som den lykkeligste. Man skal også huske på at Galois i denne tid isolerede sig fra sine kammerater.

Richard er en mand, som vil gøre meget for talent. Til trods for at han er sky af natur, går han til selveste Cauchy med en af Galois' artikler, et Memoir om hans nye teori, og beder Cauchy præsentere den for Akademiet. Dette er et stort skridt, for man skal huske på at Cauchy i disse år nød en ærefrygtindgydende respekt i det videnskabelige liv. Den normale procedure ville være at sende manuskriptet til sekretæren for Akademiet! Cauchy får aldrig præsenteret Memoiret for Akademiet, selvom det lader til, at han har læst den og planlagde at præsentere den.

1829 er på alle måder det vigtige år i Galois' liv. Det er i 1829, han får sine banebrydende ideer om grupper af permutationer, det er det år, hans far dør, det er det år, han for anden og sidste gang dumper optagelsesprøven til Ecole Polytechnique, og det er det år, han melder sig ind i et af de mest rabiate hemmelige republikanske selskaber! Men en ting af gangen.

En ung præst, som var kommet til Bourg la Reine, fik samlet de få royale kræfter mod borgmester Galois. De forfattede en række ondsindende vers, underskrev dem med Galois' navn og distribuerede dem rundt i byen. Skandale! Galois kunne ikke holde til presset og flygtede til sin lejlighed i Paris, hvor han hængte sig 2. juli 1829. Begravelsen endte i et stort slagsmål, da nogle af dem der havde forårsaget Galois' død prøvede at komme med til begravelsen. Indbyggerne samlede ind til en stor gravsten med en indskription (på verseform!), og på Hôtel de Ville i Bourg la Reine hænger den dag i dag en mindetavle over Galois, borgmester gennem 15 år.

Nogle dage senere dumper Galois for anden og sidste gang optagelsesprøven til Ecole Polytechnique. Historien går, at han blev spurgt om logaritmer. Hans svar var ikke det sædvanlige lærebogssvar, men hans egen formulering. Da censorerne blev ved at prøve at tvinge det sædvanlige svar ud af ham, blev han hidsig og smed tavlesvampen lige i synet på den ene censor. Denne historie er ikke bekræftet, men den er nok ikke helt usandsynlig.

[4]Universitet var under revolutionen blevet nedlagt som værende en af det gamle regimes institutioner, og Faculté des Sciences oprettet i stedet for universitetet.

[5]Analogien er min egen.

Formentlig en gang i november melder Galois sig ind i *Selskabet af Venner af Folket*. *Selskabet*, et af de mest yderliggående republikanske selskaber, var startet samme år og var allerede blevet forbudt.

Da han ikke kan komme ind på Ecole Polytechnique beslutter Galois sig for at søge ind på Ecole Normale[6], som lige præcis i disse år har en svag ledelse og kun er en skygge af sig selv. For at komme ind skal man bestå afgangseksamen fra Louis le Grand, hvilket lige akkurat lykkes for Galois 29. december 1829.

I februar 1830 begynder Galois på Ecole Normale. Han fortsætter med kun at lave sin egen matematik. Han ignorerer fuldstændig alle fag, ser ned på lærerne og isolerer sig fra de fleste af eleverne. Dog møder han Auguste Chevalier, som bliver Galois' bedste ven.

I slutningen af juli 1830 afsluttes en syv måneder lang regeringskrise med, at kongen laver et kup. 26. juli indføres pressecensur, men en række liberale aviser udkommer ikke desto mindre 27. juli med opfordringer til revolution. De følgende tre dage dør 2000 soldater og 1800 civile i Paris. Mange soldater slutter sig til de oprørende, og hæren og kongen flygter. Den ene af de oprørende fraktioner opfordrer 30. juli duc d'Orleans, kong Karl X's fætter, til at blive ny konge under skrappe betingelser. Han krones Louis-Philip 9. august. De oprørere som er republikanere er selvfølgelig fælt skuffet over denne udvikling. Tusinder af deres kammerater er døde blot for at afløse et kongevælde med et andet. Deres drøm om en republik kan de foreløbig vinke farvel til.

Forstanderen på Ecole Normale ville ikke have sine studenter ud på gaden og lave ballade, som kunne koste ham stillingen, så han låste dem inde på skolen. Da kongen er flygtet og en ny indtrådt, sværger han den nye konge troskab og påstår, at han var for revolutionen fra første dag. Galois prøvede febrilsk at slippe ud og kæmpe i gaderne, denne revolution er præcis, hvad han har gået og håbet på sammen med sine kammerater i *Selskabet* – men forgæves. Mens de studerende fra Ecole Polytechnique løber forrest i menneskemængderne på gaderne, sidder Galois indespærret og kan intet gøre.

I december finder en meningsudveksling sted mellem studenter og forstander om begivenhederne i juli. Galois fortæller historien som den er: at forstanderen først bliver revolutionær i det øjeblik revolutionen er vundet. Han bliver selvfølgelig smidt ud af skolen[7]. Han slutter sig straks til artilleriet af nationalgarden, som næsten udelukkende består af medlemmer af *Selskabet af Venner af Folket*, det er altså stærkt regeringsfjendsk. I juledagene skal den gamle konges ministre for retten dømt for landsforrædderi. Galois er med artilleriet udstationet ved Louvre. Optøjer udvikles da ministrene „kun“ idømmes livsvarigt fængsel. Nitten soldater fra artilleriet arresteres og artilleriet nedlægges, da det udgør en trussel mod kronen.

[6] Forskellen på de to uddannelsessteder var at Ecole Polytechnique uddannede ingeniører, som primært skulle bruges i hæren, hvorimod Ecole Normale udklækkede lærere. Den første var således elitær i modsætning til det andet. Ydermere har de studerende på Ecole Polytechnique lige siden oprettelsen været ekstremt på forkant med alt hvad der er revolutionært. Dette er formentlig en væsentlig grund til at Galois ville studere på Ecole Polytechnique.

[7] Dette er en meget kort gennemgang af de faktiske begivenheder, som er mere dramatiske end der er plads til at fortælle om her.

I januar 1831 opretter Galois et privat matematikhold i et rum bag en boghandel. Formålet er at offentliggøre sin teori ved at forelæse over den. Det er således et algebrakursus ment for videregående studenter. Det er ikke svært at forestille sig, at de elever, der var, hurtigt forsvandt.

På opfordring af Poisson indsender Galois 17. januar endnu en udgave af hans Memoir til Akademiet. Over et halvt år senere får Galois et brev tilsendt, hvori han bedes forklare sin teori nærmere, idet Poisson ikke kan forstå den.

9. maj afholdes en reception for at fejre frifindelsen af de nitten soldater, der var blevet anholdt i juledagene. Der er 200 tilstede, langt hovedparten fra Selskabet. Der skåles for revolutionen og de store revolutionære. Pludselig rejser Galois sig og udbyder en skål for kong Louis-Philip. Alexandre Dumas beskriver situationen:

> ... En ung mand, som havde løftet sit glas og havde en kniv i samme hånd prøvede at få ørenlyd. Det var Evariste Galois...
>
> Alt hvad jeg kunne opfatte var en trussel og at navnet Louis-Philip var blevet nævnt: intentionen fulgte klart af kniven...
>
> Det var klart at denne episode ville få konsekvenser...

Og ganske rigtigt bliver Galois arresteret i sin mors hjem dagen efter. Han sidder i detentionen i Sainte-Pélagie til han kommer for retten. 15. juni bliver han frifundet for trusler mod kongens liv.

Imidlertid oplever Galois kun ganske kort tid på fri fod. Den 14. juli, på Bastilledagen, bliver han arresteret sammen med sin kammerat Duchatélet på Pont Neuf, sigtet for at bære en ulovlig uniform (artilleriets) samt for besiddelse af våben (flere pistoler og sin kniv). På væggen i detentionen tegner Duchatélet en pære samt indskriptionen: „Philip vil bære sit hovede til dit alter, Frihed“[8]. Det gjorde kun ondt værre for Galois såvel som Duchatélet.

23. oktober idømmes Galois ni måneders fængsel.

I Sainte-Pélagie sidder også M. Raspail, som er formand for Selskabet, og som siden (under republikken) bliver en berømt statsmand. Raspail skriver nogle breve fra fængslet (omkring juli/august):

> De indsatte håner den unge Galois og får ham til at bunde en flaske sprit.

Fuld som en svensker fortæller Galois følgende profeti til M. Raspail:

> Hvor jeg kan lide dig, i dette øjeblik mere end nogensinde... Men hvad sker der med min krop? Jeg har to mænd indeni mig, og desværre kan jeg gætte hvem der vil vinde over den anden... Jeg kan ikke lide kvinder og det forekommer mig at jeg kun kunne elske en Tarpeia eller en Graccha. Og jeg siger dig, jeg vil dø i en duel over en eller anden coquette de bas étage. Hvorfor? Fordi hun vil opfordre mig til at hævne hendes ære som en anden har kompromitteret. Ved du hvad jeg mangler, min ven? Jeg siger det kun til dig: det er en som jeg kan elske og elske alene i ånden. Jeg har mistet min fader og ingen vil nogensinde erstatte ham, hører du mig...

[8]Kong Louis-Philip's hovede havde form som en pære, hvilket var blevet brugt i mangt en satire.

Umiddelbart efter dette prøver Galois at begå selvmord. M. Raspail skriver:

> Vi lagde ham på en af vores senge. Men giftens feber plagede vores ulykkelige ven… og han forudsagde mærkelige ting som man ofte anser for latterlige.
>
> „Du foragter mig, dig som er min ven! Du har ret, men jeg, som har begået sådan en forbrydelse, må begå selvmord."
>
> Og han ville have gjort det, hvis vi ikke havde kastet os over ham, for han havde et våben i sine hænder.

Ovenstående citater er taget fra [ROTHMAN].

Så springer vi frem til afslutningen på historien. I marts 1832 hærger en kolera-epidemi Frankrig. Det besluttes at flytte børn og svage fanger fra fængslet. Den 16. marts flyttes Galois til en klinik. Her arbejder lægen Poterin-Dumotel, som bor på samme gade som klinikken. Galois møder hans datter, Stephanie, og bliver forelsket.

Galois bliver tilsyneladende løsladt planmæssigt 29. april. Den 25. maj skriver han et brev til sin gode ven Chevalier om en ulykkelig kærlighedsaffære. Den 29. maj om aftenen skriver han nogle breve[9] og laver nogle sidste rettelser i sit Memoir. Den 30. maj om tidligt morgenen bliver Evariste Galois skudt i maven i en duel. En bonde finder ham og bringer ham til hospitalet. Han afviser en præst på dødslejet og dør, dagen efter, i armene på sin lillebror Alfred: „Græd ikke! Jeg har brug for alt mit mod for at dø som 20-årig".

Galois blev begravet 2. juni 1832. 2-3000 deltog i begravelsen, langt de fleste republikanere.

Der har som sagt været mange forskellige teorier om Galois' død.

En teori går ud på, at han blev involveret med en billig tøs (luder), en anden går ud på at duellen var et baghold af politiet, og en tredje vender det om og argumenterer for at Galois' sære, tænksomme natur mistænkeliggjorde ham, så han blev dræbt af sine kammerater som formodet politispion[10].

Kendetegnende for alle biograferne er at de lægger mest vægt på de detaljer af hans liv, som fremmer netop deres teori, de bytter om på kronologien, de udelader bevidst detaljer som ikke passer med deres teori, ja de kan sågar komme med åbenlyst ubegrundede påstande.

Man kunne tro, at Galois kæmpede duellen over en billig tøs. Ifølge Raspail har han selv forudsagt, at han ville ende sine dage på den måde. I så fald er det ikke Stephanie, han sloges om, for hun kan på ingen måde karakteriseres som værende billig. Det kunne imidlertid være en anden pige han sloges om.

[ROTHMAN], som gør opmærksom på alle de andre biografiers fejl og mangler, mener selv, at det var Pescheux d'Herbinville som slog Galois ihjel. At dette skulle være tilfældet stammer, så vidt jeg har kunnet finde ud af, fra kun én kilde. Denne kilde er Alexandre Dumas, som må siges at være en så objektiv kilde, som man kan

[9] Det ene brev, stilet til Chevalier, indeholder den berømte passage om hans Memoir: *Bed Jacobi og Gauss, offentligt, give deres mening, ikke om sandheden, men om vigtigheden af disse sætninger.* Et andet: *Jeg beder mine patriotiske venner om ikke at foragte mig for ikke at dø for mit land. Jeg dør som offer for en ond coquette og to af hendes ofre… Pardon for dem som dræbte mig. De handlede i god tro.* Et tredje slutter: *Jeg dør jeres ven.*

[10] Selskabet var rent faktisk infiltreret af politiet fra starten.

få - han har intet motiv for at lyve. Men hvordan skulle han kunne vide det. Vel ikke fra første hånd!? Det er i mine øjne ikke et faktum, at morderen hed Pescheux d'Herbinville.

[RIGATELLI], hvis biografi er den bedste, har også den mest interessante teori om Galois' død. Hun argumenterer for at det politiske klima i første halvår af 1832 var gunstigt til at starte en revolution.

Altså: *Selskabet* mener at tiden er overmoden til at starte en revolution. Og her vil jeg tillade mig at citere [RIGATELLI][11]:

> Et møde blev planlagt i et af deres huse, i 18 rue de l´Hôpital-Saint-Louis, den 7. maj. Galois fik besked og blev varmt modtaget tilbage til Selskabet, da han var kendt for sin evne til at piske de halvhjertede op til helhjertet kamp.
>
> Nødvendigheden af en væbnet opstand var umiddelbart accepteret. Alt hvad der manglede var en anledning til at anspore masserne [til kamp], og en dato. En ide, som ikke blev taget seriøst til at starte med, var at et lig som kunne hævnes ville være brugbart. Man manglede en helt i hvis navn borgerne i Paris kunne kæmpe, et navn at råbe mens man skød på Louis-Philip's politi, et navn på læberne af de døende. Diskussion blev hurtigt hed, og mens hans kammerater udtrykte deres mening, blev Galois, som ikke havde sagt noget indtil nu, mere og mere ophidset.
>
> Han bad snart om at få ordet, i så autoritær en tone, at de andre med ét blev tavse. Han forklarede, bevægende, at hans liv var blevet meningsløst. Alt hvad han ønskede var at give det til det eneste han stadig elskede: Frankrig. Liget de manglede skulle være hans.

Rigatelli's historie fortsætter, som man kan forvente: Man aftaler tid og sted for en duel mellem nogle medlemmer af Selskabet. En af dem dør, og ved hans begravelse vil man råbe politimord og forhåbentlig starte en revolution. Så langt så godt. Men hvorfor begyndte revolutionen ikke ved Galois' begravelse? Vi ved jo, at der var flere tusinde republikanere tilstede. Joh (igen [RIGATELLI][12]):

> Mens Plaignol og Pinel, lederne af Selskabet, afleverede deres blomster til Galois ære, [gik rygtet] at General Lamarque var død. Overvejelser blev hurtigt gjort. Der ville være en meget større, og mere følelsesmæssigt involveret, samling mennesker ved den gamle generals begravelse...

Rigatelli udmærker sig ved i hele sin bog ikke at have en eneste henvisning. Men selv hvis hun havde en kilde til ovenstående beskrivelser, ville den ikke være særlig objektiv, og jeg ville have svært ved at acceptere den. Det er heller ikke overbevisende, at Rigatelli kun citerer netop det fra M. Raspail's breve, som gavner hendes teori:

> Og I skulle være mine venner, men I håner mig! I har ret, men en som mig, som er ansvarlig for sådan en forbrydelse, skal begå selvmord.

[11] [RIGATELLI], 109.
[12] [RIGATELLI], 113.

– Og udelader profetien om at Galois ville dø i en duel over en billig tøs.

Man ved altså ikke andet om Galois' død, end at han døde i en duel. Tilbage står nogle ubesvarede spørgsmål: Hvorfor var Galois så hemmelighedsfuld aftenen før duellen? Hvorfor var der ingen suppleanter? Hvorfor blev Galois efterladt i en blodpøl? Samt det faktum, at Galois vidste, han ville dø i duellen.

Efter hans død kopierede broderen Alfred og hans bedste ven Chevalier, Galois' Memoir og sendte det til forskellige matematikere. Først i 1843 indså Liouville, efter måneders studie af Memoiret, vigtigheden af sætningerne, og i 1846 blev Memoiret udgivet. Mange matematikere arbejdede videre på Galois' ideer gennem de næste mere end hundrede år.

Det er kendetegnende for Galois, at han arbejdede på sin teori hele tiden fra 1829, således både i fængslet og i den kaotiske tid derefter. Det vidner om både hans temperament og intelligens.

Litteraturliste

[BELL, ERIC T.]	Men of Mathematics. New York 1961.
[RIGATELLI, LAURA TOTI]	Evariste Galois 1811-1832. Oversat fra italiensk af John Denton. Basel 1996.
[ROTHMAN, TONY]	Genius and Biographers: The Fictionalisation of Evariste Galois. The American Mathematical Monthly vol. 89, 1982.

Disse findes alle på Matematisk instituts bibliotek!

Den klassiske biografi er skrevet af Bell. Det er denne biografi, der om nogen har skabt myten om Galois, fordi den er utrolig godt skrevet og læst af alle(?) historisk interesserede matematikere. Ligesom alle de andre der har skrevet biografier over Galois skyr Bell ingen midler for at få sin version af historien frem. Han overdramatiserer, laver om på kronologien og citerer bevidst plukvist. Bell's biografi er vældig godt skrevet, blot skal man kende til samtidshistorien - jeg rodede rundt i revolutioner og hvem der nu var konge. Beslutter man sig for at læse Bell, skal man absolut i samme åndedrag læse den kritiske artikel af Rothman. Han gør op med en masse af de myter om Galois' død, som er blevet skabt gennem tiden. Han er især hård ved Bell af den grund, at det er den biografi der er læst af flest. Rothman diskuterer imidlertid flere teorier, og så har han en interessant bredside mod nørdede matematikprofessorer tilsidst!

Den bedste biografi er forholdsvis ny og skrevet af Rigatelli. Vil man blot læse en enkelt biografi over Galois er det så absolut denne man skal læse. Den er godt skrevet og spændende som en kriminalroman. Desuden er der gjort fint rede for samtidshistorien - det er Rigatelli, jeg har brugt som kilde! Dog er det ærgerligt, at Rigatelli helt og aldeles mangler kildehenvisninger.

Hvor stor er en ret linje?

Rasmus Borup Hansen

En ret linje består som bekendt af punkter. Dem er der mange af i en ret linje, og indtil 1874, var svaret på overskriftens spørgsmål blot, at en ret linje består af „uendeligt“ mange punkter. Men i 1874 opdagede Cantor (en tysk matematiker, der levede fra 1845–1918, og hvis fulde fornavn var intet mindre end „Georg Ferdinand Ludwig Philip“), at der er mere end en form for uendelighed. Blandt andet viste han, at *der er flere reelle end naturlige tal*.

Men hvad vil det sige, at der er flere reelle tal end naturlige? Lad os først kigge på, hvordan vi kan sammenligne størrelser af endelige mængder. Hvis vi har en bunke æbler og pærer, kan vi blive ved med at fjerne ét æble og én pære ad gangen, indtil der ikke er flere æbler eller pærer tilbage. Hvis der hverken er pærer eller æbler tilbage, er det fordi der var lige mange til at starte med, og hvis der er æbler tilbage, er det fordi, der var flere æbler end pærer. Ganske simpelt.

En sådan parring kan vi formalisere ved hjælp af *injektive funktioner*. Vi siger med andre ord, at antallet af æbler er større end (eller lig) antallet af pærer, hvis *der findes en injektiv funktion fra mængden af pærer ind i mængden af æbler*. H-vis der også findes en injektiv funktion den anden vej, siger vi, at der var lige så mange æbler som pærer. Felix Bernstein viste i 1897, at i så fald findes der også en *bijektiv* afbildning mellem mængderne. Denne definition kan umiddelbart overføres til mængder med uendeligt mange elementer.

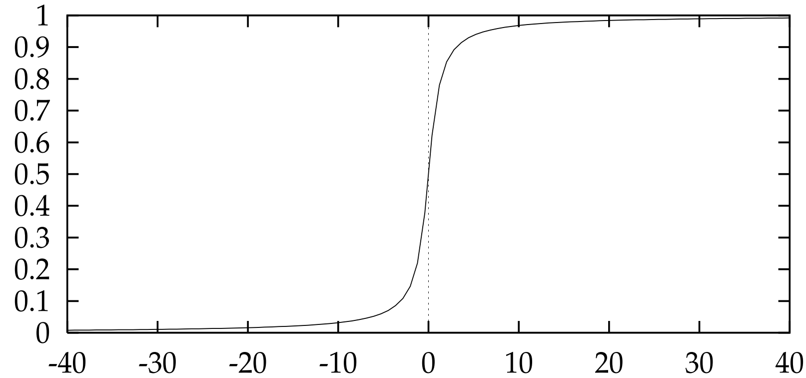
Det Cantor i 1874 med et snedigt modstridsbevis viste, var, at der ikke findes nogen injektiv funktion fra de reelle tal ind i de naturlige tal. Der er oplagt mindst lige så mange reelle tal, som der er reelle tal i det åbne enhedsinterval $]0,1[$. Vi kan derfor nøjes med at vise, at der ikke findes en bijektiv funktion mellem $]0,1[$ og de naturlige tal (funktionen $n \mapsto \frac{1}{n+1}$ sikrer, at der er mindst lige så mange tal i $]0,1[$ som i $\mathbb{N}$). Hvis vi antager, at en sådan bijektiv funktion mellem $]0,1[$ og $\mathbb{N}$ fandtes, kunne vi skrive tallene i $]0,1[$ op i nummerorden:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.d_{11}d_{12}d_{13}\dots \\ x_2 &= 0.d_{21}d_{22}d_{23}\dots \\ x_3 &= 0.d_{31}d_{32}d_{33}\dots \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Her repræsenterer d_{ij} det j'te ciffer efter kommaet i det i'te tal. Men vi kan nu konstruere et tal, der må ligge i det åbne enhedsinterval, men som ikke kan være med i listen ovenfor. Tallet skal være på formen $0.d'_1d'_2d'_3\dots$, og vi skal blot vælge cifferet d'_i, så $d'_i \neq d_{ii}$. Dette tal kan ikke være med i listen; for hvis det var nummer i, ville vi kunne sammenligne det i'te ciffer efter kommaet i x_i, hvilket er d_{ii}, med det i'te ciffer efter kommaet i tallet, hvilket er d'_i, som er valgt forskellig fra d_{ii}. Dette er en modstrid! Modstriden skyldes, at vi antog, der fandtes en bijektiv afbildning mellem $]0,1[$ og $\mathbb{N}$, så sådan en kan ikke findes. Konklusionen er, at der er flere tal i $]0,1[$, end der er naturlige tal, og dermed også flere reelle tal end naturlige.

Et naturligt spørgsmål er nu: „Hvor mange flere reelle tal end naturlige tal er der?"

Vi kan starte med at prøve at finde ud af, hvor mange reelle tal der egentlig er. Det er ikke svært at lave en bijektiv afbildning mellem de reelle tal og det åbne enhedsinterval. For et givet $x \in \mathbb{R}$, kan man udregne $\arctan(x)$, lægge $\frac{\pi}{2}$ til og dividere det hele med π. Denne funktion er en bijektiv afbildning mellem $\mathbb{R}$ og $]0,1[$, og dens graf er vist på figuren nedefor:



Der er altså lige så mange reelle tal, som der er tal i det åbne enhedsinterval. Ved at skrive tallene i $]0,1[$ i *det binære talsystem* kan vi se, at der er lige så mange tal i $]0,1[$, som der er afbildninger fra de naturlige tal ind i mængden $\{0,1\}$, eller lige så mange som der er delmængder af de naturlige tal: I det binære talsystem bruger vi jo kun symbolerne „0" og „1", og tallet en halv skrives „.1", en kvart bliver til „.01", mens de første 15 cifre i $\frac{1}{\pi}$ bliver skrevet „.010100010111110". Vi kan altså lave en injektiv funktion fra $]0,1[$ ind i mængden af følger af tallene 0 og 1. Den beskrevne funktion er imidlertid ikke surjektiv, idet for eksempel tallet en halv kan skrives på to forskellige måder, „.1" og „.01111...". Men omvendt kan vi ved at lade talfølgen $d_1, d_2, d_3, \ldots$ afbilde over i det reelle tal, hvis binære repræsentation er „$.d_1 0 d_2 0 d_3 0 \ldots$", lave en injektiv afbildning den anden vej. Der er altså lige så mange tal i $]0,1[$ som der er følger af tallene 0 og 1. Hver mulig følge af nuller og ettere svarer en-entydigt til en afbildning f fra de naturlige tal ind i $\{0,1\}$ ved at $f(n)$ skal være det der står på den n'te plads efter kommaet. Desuden kan vi se, at en følge af nuller og ettere en-entydigt svarer til en delmængde af de naturlige tal, idet vi for at se om tallet n er med i delmængden, blot skal se efter, om der står „0" eller „1" på den n'te plads efter kommaet.

En angivelse af, hvor mange elementer der er i en mængde, kaldes for *kardinaliteten* for mængden. En endelig mængde har en kardinalitet, der er et naturligt tal, og hvis der findes en bijektiv afbildning mellem en uendelig mængde og de naturlige tal, siger vi, at mængden har kardinalitet $\aleph_0$ (tegnet „$\aleph$" er det første bogstav fra det hebræiske alfabet og kaldes „alef"). Ved at betragte en simpel bijektiv afbildning kan man se, at mængden af de hele tal har kardinalitet $\aleph_0$, og med lidt opfindsomhed kan man også se, at mængden af de rationale tal og mængden af de algebraiske tal (tal der er rødder i polynomier med heltallige koefficienter) har kardinalitet $\aleph_0$.

Ovenfor så vi, at de reelle tal har samme kardinalitet som $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (mængden af delmængder af de naturlige tal). Vi så også, at denne kardinalitet med rette kan betegnes $2^{\aleph_0}$, hvilket skal betegne antallet af afbildninger fra en mængde med kardinalitet $\aleph_0$ ind i en mængde med to elementer. Notationen er en udvidelse af potensbegrebet i det endelige tilfælde, idet 3^4 på den ene side betegner tallet 81 og på den anden side antallet af afbildninger fra en mængde med fire elementer ind i en mængde med tre elementer – men dem er der heldigvis netop 81 af.

Hvis $|A|$ betegner kardinaliteten af en mængde A, gælder altså følgende:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0 < |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$$

Vi kan sagtens finde på mængder med endnu større kardinalitet. Generelt gælder nemlig, at $|A| < |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. Mængden af delmængder af de reelle tal $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ får kardinalitet $2^{2^{\aleph_0}}$, mængden af delmængder af denne mængde får kardinalitet $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ og så videre. Vi har uendeligt mange uendeligheder!

Men kan vi lave andre uendeligheder end disse? Se, det er et godt spørgsmål!

Cantor opstillede hypotesen, at der ikke findes uendeligheder mellem $\aleph_0$ og $2^{\aleph_0}$, altså at der ikke findes mængder A, så $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0}$. Dette kan i en vis forstand forstås som at kardinaliteten af de reelle tal (der i denne sammenhæng kaldes „kontinuum“) er den første uendelighed efter $\aleph_0$. Denne hypotese går under navnet „*Cantors kontinuumshypotese*“ eller undertiden blot „*kontinuumshypotesen*“.

Ofte taler man om *den generaliserede kontinuumshypotese*, der siger, at hvis man har en uendelig stor mængde B, så findes der ingen mængder A, sådan at $|B| < |A| < 2^{|B|}$. Hypotesen siger altså, at i en vis forstand er den næste uendelighed efter $|B|$ lig kardinaliteten af mængden af delmængder af B.

Selvom man hverken har bevist eller modbevist den generaliserede kontinuumshypotese, kan man alligevel sige en del om den. Den østrigske matematiker Kurt Gödel (1906–78) viste i 1940, at man ikke kan *modbevise* den generaliserede kontinuumshypotese ved brug af „sædvanlig matematik“, med mindre den „sædvanlige matematik“ indeholder en modstrid – for så kunne man bevise alting. Vi kan altså ikke gøre os håb om at konstruere en mængde A, så $|B| < |A| < 2^{|B|}$ for en uendelig mængde B. Senere, i 1963 beviste P.J. Cohen, at hvis der ikke er en modstrid i matematikken, kan man heller ikke *bevise* den generaliserede kontinuumshypotese ud fra „sædvanlig matematik“, og at tilsvarende resultater gælder for den ikke-generaliserede kontinuumshypotese.[1]

Vi har altså fundet frem til et relativt simpelt matematisk problem, hvor det er et *trosspørgsmål*, hvad man vil svare! Der er intet i vejen for, at en formalistisk anlagt matematiker den ene dag tror kontinuumshypotesen er sand og den næste dag tror den er falsk – så længe han blot holder styr på, hvilke matematiske sætninger, der forudsætter, kontinuumshypotesen er sand, og hvilke sætninger, der ikke gør.

Man kan give mange argumenter for og imod kontinuumshypotesen og den generaliserede kontinuumshypotese. De fleste af dem er ret tekniske, så vi vil nøjes med at kigge på et simpelt argument for, og et simpelt argument imod:

[1] Med „sædvanlig matematik“ tænkes der på Zermelos og Fraenkels aksiomatiseringer, „Z“, „ZF“ eller „ZFC“, eller von Neumanns, Bernays og Gödels aksiomatisering, kaldet „NBG“.

- Hvis den generaliserede kontinuumshypotese er sand, har vi styr på de uendelige mængder: Hvis vi har en uendelig mængde A, får vi en mængde med den næste kardinalitet ved at kigge på mængden af delmængder af A.
- For en *endelig* mængde A gælder der *ikke*, at vi får den næste kardinalitet ved at kigge på mængden af delmængder af A. Allerede hvis $|A| = 2$, går det galt, idet mængden af delmængder af A så har $2^{|A|} = 2^2 = 4 \neq 3$ elementer. Da en sådan regel ikke gælder for endelige mængder, er det intuitivt rimeligt, at den heller ikke gælder for uendelige mængder, og den generaliserede kontinuumshypotese må derfor være falsk.

Et spørgsmål, der er tæt knyttet til problematikken om kontinuumshypotesen, er, hvorvidt *udvalgsaksiomet* er sandt eller falsk. Lad os kigge lidt på, hvad det er, udvalgsaksiomet siger. Hvis vi har en mænde I (den spændende situation er, hvis mængden I er stor), og vi for hvert $i \in I$ har en mængde A_i, kan vi danne *produktmængden*

$$A = \bigtimes_{i \in I} A_i.$$

Udvalgsaksiomet siger nu, at mængden A er tom, netop hvis (mindst) et af A_i'erne er den tomme mængde.

Hvis man forestiller sig, at udvalgsaksiomet ikke gælder, findes der en masse forskellige ikke-tomme mængder, sådan at hvis man danner deres mængdeprodukt, får man den tomme mængde. Normalt plejer mængdeproduktet af to mængder i en passende forstand at give anledning til en større mængde, så det virker måske ikke særligt rimeligt, at man pludselig kan stå tilbage med den tomme mængde efter at have dannet mængdeprodukt en masse gange.

Hvis fællesmængden af alle A_i'erne ikke er tom, altså hvis der findes et $a \in \cap_{i \in I} A_i$, ser vi, at mængdeproduktet A af A_i'erne ikke kan være tomt – elementet $(a)_{i \in I}$ må jo ligge i A (man kan tænke på $(a)_{i \in I}$ som en vektor af lige så mange dimensioner som der er elementer i I, og hvor der står a på alle pladserne). Vi har indset, at udvalgsaksiomet, som det er formuleret her, kun er interessant, hvis A_i-mængderne ikke har noget tilfældes, altså hvis de er disjunkte.

Denne formulering af udvalgsaksiomet (som er fra 1908 og skyldes Ernst Zermelo) er altså ikke andet end en nulregel for mængdeprodukt. En meget stærk nulregel vel at mærke. Noget tilsvarende gør sig jo slet ikke gældende for reelle tal, idet det sagtens kan lade sig gøre, at

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0, \quad \text{hvor } a_n\text{'erne er reelle tal forskellige fra 0.}$$

Man kan for eksempel blot sætte $a_n = \frac{1}{2}$ for alle n, og hvis man synes, at a_n'erne skal være forskellige (hvilket måske svarer til at A_i'erne skulle være disjunkte), kan man blot vælge $a_n = \frac{1}{n}$ i stedet.

Men nu er mængdeproduktet langt fra det samme som det sædvanlige produkt af reelle tal, så vi skal ikke tage al for meget ved lære af eksemplet ovenfor. Hvis vi skal godtgøre, at et mængdeprodukt $A = \times_{i \in I} A_i$ af disjunkte mængder ikke er den tomme mængde, skal vi blot finde et element i A. Et sådant element – lad os kalde det a – kan vi som nævnt opfatte som en vektor, hvor elementerne er indiceret ved hjælp af mængden I. Vi skal altså finde a, så a_i (den i'te plads i a) er et element i A_i for ethvert i i indeksmængden I. Men ingen af A_i'erne er den tomme mængde, så der er mange a_i'er at vælge imellem, og det kan vel ikke være det store problem af finde et a, der virker. Eller kan det? Problemet er, at vi skal foretage *uendeligt mange valg* (deraf navnet) på én gang, og det kan man ikke gøre konstruktivt, idet en konstruktion af natur er en endelig proces.

Hvis indeksmængden I antages at være endelig, kan man rent faktisk bevise udvalgsaksiomet. Men hvis I også må være uendelig, er det en anden snak. Ligesom med kontinuumshypotesen kan man nemlig hverken bevise eller modbevise udvalgsaksiomet ud fra sædvanlig matematik[2] (med mindre der er en modstrid i den sædvanlige matematik, for så kan alting bevises). Lighederne med kontinuumshypotesen hører imidlertid ikke op her; det er nemlig de samme personer – Gödel og Cohen – der har bevist, at udvalgsaksiomet hverken kan modbevises (det var Gödel) eller bevises (dette skyldes Cohen). Igen har vi altså fundet frem til en relativt simpel matematisk påstand, som man efter forgodtbefindende kan tro på eller lade være uden at komme i konflikt med sædvanlig *konstruktiv* matematik.

I modsætning til kontinuumshypotesen er der meget matematik, der bygger på, at udvalgsaksiomet er sandt, og man kan derfor hævde, at udvalgsaksiomet bør høre ind under det, som vi betegner med „sædvanlig matematik". Det er derfor, slutningen af sidste afsnit er formuleret forsigtigt med betegnelsen „sædvanlig konstruktiv matematik", for selvom udvalgsaksiomet måske er „sædvanlig matematik", er det i hvert fald ikke konstruktivt.

Det nok mest fundamental resultat, der kræver udvalgsaksiomet, er, at ethvert uendeligtdimensionalt vektorrum har en basis, og der er flere andre vigtige sætninger, hvis bevis kræver udvalgsaksiomet (eller noget der er blot en anelse svagere), herunder Zorns lemma, velordningssætningen, Tychonoffs sætning, Skolem-Löwenheims sætning, maksimal-ideal-sætningen og fuldstændighedssætningen for generaliserede førsteordensteorier. I litteraturen vrimler det ligefrem med vigtige principper eller aksiomer, der er *ækvivalente* med udvalgsaksiomet. Man kan sagtens støde på påstande som „følgende 27 betingelser er ækvivalente…".

Mange af disse sætninger og principper er ganske nyttige, og det er en grund til at mange matematikere opfatter udvalgsaksiomet som sandt.

Selvom man har lange ønskelister over påstande, der ville være rare at have, og som følger af udvalgsaksiomet, laves der også matematik, hvor man antager, at udvalgsaksiomet er falsk. Et eksempel på dette er noterne til Matematik 2SS, hvor udvalgsaksiomet må forkastes, for at alle delmængder af de reelle tal kan tilskrives en sandsynlighed. Dette er nu mest af dovenskab, idet man da slipper for en masse bogholderi over, hvilke delmængder af $\mathbb{R}$ der kan tilskrives en sandsynlighed, og hvilke der ikke kan. I videregående sandsynlighedsregning, hvor man interesserer sig for andet end bare de reelle tal, bliver bogholderiet vigtigt af andre årsager, og så er der intet vundet ved at forkaste udvalgsaksiomet – tværtimod kan man faktisk få brug for det.

Problemet med udvalgsaksiomet og sandsynligheder for delmængder af $\mathbb{R}$ er, at man ved at bruge udvalgsaksiomet kan bevise eksistensen af nogle meget grimme

[2] Her tænkes ikke længere på „ZFC", idet „C" netop står for udvalgsaksiomet (axiom of *c*hoice).

mængder, som ikke på fornuftig vis kan tilskrives en sandsynlighed. Et andet eksempel på grimme mængder som eksisterer ifølge udvalgsaksiomet får vi ved at kigge på *Banach-Tarski(-Hausdorff)s paradoks*: Hvis man i $\mathbb{R}^3$ har en begrænset mængde med ikke-tomt indre som for eksempel være en kugle, kan man med udvalgsaksiomet splitte mængden op i endeligt mange dele, som udelukkende ved hjælp af translationer og rotationer kan føres over i en *vilkårlig* anden begrænset mængde med ikke-tomt indre. Bemærk, at ingen af mængderne behøver at være sammenhængende, og at de godt kan have vidt forskelligt volumen. For eksempel kan man skære en kugle med radius 1 i endeligt mange stykker, som formentlig bliver nogle meget underlige stykker, flytte og dreje lidt på dem (men ingen forstørrelse eller formindskelse) for så at sætte dem sammen igen, så man får *to* kugler med radius 1. Man kan også forestille sig, at den ene har radius 1000 og den anden radius 42, eller at man skærer jordkloden i stykker og sætter den sammen til en ært! Dette er nok den mest u-intuitive konsekvens af udvalgsaksiomet, og det er vel også derfor den bærer betegnelsen „paradoks“ og ikke „sætning“.

Disse grimme mængder, og i særdeleshed Banach-Tarskis paradoks, er grund nok til, at der er mange, der tror udvalgsaksiomet er falsk.

Apropos vores diskussion af kontinuumshypotesen og de uendeligt mange former for uendelighed er det på sin plads at nævne, at hvis A og B er to mængder (de kan altså specielt være uendelige og have forskellig kardinalitet), så indtræffer netop et af følgende tre tilfælde:

$$|A| < |B| \qquad |A| = |B| \qquad |A| > |B|$$

Dette er en af de mange påstande, der er ækvivalent med udvalgsaksiomet; så uden udvalgsaksiomet kan vi slet ikke være sikre på, at vi overhovedet kan sammenligne størrelsen af to uendelige mængder. Men med udvalgsaksiomet i hånden kan det lade sig gøre at bevise eksistensen af en injektiv afbildning fra A til B, en fra B til A, eller eventuelt både en den ene og en den anden vej.

Har vi udvalgsaksiomet, kan vi altså ordne de forskellige kardinaliteter på en bekvem måde. Dette tillader os at skrive $\aleph_1$ for den kardinalitet, der kommer lige efter $\aleph_0$, $\aleph_2$ for den næste og så videre, langt ud forbi $\aleph_{\aleph_0}$ og endda forbi $\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$. Der er nemlig rigtigt mange forskellige uendeligheder.

Denne notation giver os også mulighed for at formulere den generaliserede kontinuumshypotese på en kompakt måde:

$$2^{\aleph_a} = \aleph_{a+1}$$

Tilsvarende er $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ blot en kort måde at formulere den ikke-generaliserede kontinuumshypotese på[3] Som nævnt beviste Gödel, at man ikke kan modbevise kontinuumshypotesen, men han argumenterede senere for, at $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (bemærk to-tallet), idet han havde fundet et aksiom som medførte, at $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, og som han syntes var naturligt. Dette aksiom hører naturligvis ikke til den „sædvanlige

[3]Inspirationen til denne artikel kom af, at der i sidste nummer af FAMØS stod, at Cantor *beviste*, at $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, hvilket ikke er rigtigt. Cantor formodede, at $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, men kunne ikke bevise det. Læserne af FAMØS er hermed gjort opmærksom på denne fejl.

matematik", som han viste, man ikke kan modbevise kontinuumshypotesen ud fra (hvis man beviser, at $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, har man jo netop modbevist kontinuumshypotesen).

Udover at man kan formulere den generaliserede kontinuumshypotese lidt nemmere, hvis man har udvalgsaksiomet, hænger de to ting også sammen på anden vis. Man kan nemlig vise, at den generaliserede kontinuumshypotese medfører udvalgsaksiomet.

Meget løst sagt kan man sige, at hvis den generaliserede kontinuumshypotese er sand, har vi så meget styr på de forskellige uendeligheder, at vi også får styr på uendelig mængdeproduktdannelse, og at udvalgsaksiomet derfor må gælde.

Der er intet i vejen for at tro på udvalgsaksiomet uden at tro på den generaliserede kontinuumshypotese eller blot kontinuumshypotesen. Man har endda bevist, at dette ikke fører til en modstrid.

Der er altså essentielt tre forskellige holdninger til udvalgsaksiomet og den generaliserede kontinuumshypotese:

- Både udvalgsaksiomet og den generaliserede kontinuumshypotese er sande.
- Udvalgsaksiomet er sandt, men ikke den generaliserede kontinuumshypotese.
- Ingen af dem er sande.

Den sidste kategori er ret omfattende: Man hører hjemme her, hvis man tror på den ikke-generaliserede kontinuumshypotese, men ikke på udvalgsaksiomet, eller hvis man kun tror på udvalgsaksiomet for indeksmængder, der ikke er større end $\aleph_0$. Folk fra den *intuitionistiske* skole, det vil sige folk, der kun accepterer konstruktive beviser, hører også hjemme her, men rigtige intuitionister ville nok snarere angribe *potensmængdeaksiomet*, som medfører at alle de uendelige mængder, vi har beskæftiget os med, overhovedet eksisterer.

Den midterste kategori giver mulighed for et ganske stort matematisk univers. Hvis den generaliserede kontinuumshypotese er falsk, findes der ikke kun mange uendeligheder, men også mange forskellige typer af dem. Udvalgsaksiomet vil endvidere sikre eksistensen af mange interessante mængder, og der vil være mange nyttige sætninger til rådighed.

Den første kategori er nok den, hvor matematikken i en vis forstand hænger mest sammen. Der er styr på det hele. Men man kan også vende det om og sige, at det er den kedeligste af kategorierne, netop fordi det hele ser ud til at hænge sammen!

I sidste ende er spørgsmålet om størrelsen af en ret linje et spørgsmål om tro. Vi ved, at der er mange flere punkter på en ret linje, end vi kan gøre os håb om at tælle, og man kan også vise, at kardinaliteten c af en ret linje ikke er så stor, at den opfylder, at $c = \aleph_c$ (prøv at tænke lidt over, hvor stort sådan et kardinaltal må være!). Det vigtigste resultat i denne artikel er vel, at ikke alle matematikkens påstande på en eller anden entydig vis er sande eller falske, men at der så sandelig også er plads til mere filosofiske overvejelser over, hvordan vi egentlig tror, verden ser ud.

"Divergente Rækker ere i det Hele noget Fandenskab, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstration derpaa. Man kan faae frem hvad man vil naar man bruger dem, og det er dem som har gjort saa megen Ulykke og saa mange Paradoxer."

Niels Henrik Abel (1826)

Fourierrækker i forskellige afskygninger

Troels Roussau Johansen

På Matematik 1 gør man en del ud af at undersøge, om en given talrække konvergerer eller ej. På Matematik 2AN bliver man mere avancerede og ser mere generelt på konvergens af rækker, hvor leddene er funktioner. Dette medfører, at der er flere former for konvergens i spil: konvergens mht. norm (svag), punktvis konvergens og uniform konvergens (stærk), og på Matematik 2KF ser man specielt på Laurentrækker. Fælles for alle kurser er dog interessen i *konvergente* rækker, og med Abels bemærkning i baghovedet kunne man tro, at divergente rækker er uinteressante. Det er dog, som denne artikel forhåbentlig vil vise, ikke (altid) tilfældet.

En divergent Fourierrække.

Vi skal især se på, hvordan man kan ved at ændre lidt på den sædvanlige summation kan opnå interessante resultater om Fourierrækker for funktioner, der ikke kan behandles med den fra Mat 2AN til rådighed værende teori. Lad os dog først konstatere, at der *er* grund til at søge videre end Mat 2AN. Det gøres med følgende

Fejer. *Der findes en funktion $f \in C([0, 2\pi[)$ hvis Fourierrække ikke konvergerer i alle punkter.*

Bevis. Bevis Lad os blot sætte som mål at finde en funktion f, hvis Fourierrække divergerer i $x = 0$. Først bemærkes, at

$$Q_m(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\cos(2m-j)x - \cos(2m+j)x}{j} = 2\sin 2mx \sum_{j=1}^{m} \frac{\sin jx}{j}.$$

Da er $|Q_m(x)| \leq 10$.[1] Vi benytter dette til at konkludere, at med $m_k = 2^{k^2}$ er rækken $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_{m_k}(x)$ uniformt konvergent for $x \in [0, 2\pi[$, så der ved $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_{m_k}(x)$ defineres en kontinuert funktion på $[0, 2\pi[$. Dette betyder, at hvis

[1] Et håndfast bevis gives i [1], side 390-91. Ellers kan man bemærke, at $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ punktvist på $]0, 2\pi[$.

$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, da er

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} \int_0^{2\pi} Q_{m_k}(x) \cos nx \; dx \quad \text{og}$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} \int_0^{2\pi} Q_{m_k}(x) \sin nx \, dx = 0 \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $[m_k, 3m_k] \cap [m_i, 3m_i] \neq \emptyset \Leftrightarrow i = k$, er åbenbart $a_{2m_k - j} = \frac{1}{k^2 j}$ for $1 \leq j \leq m_k$, $a_{2m_k+j} = -\frac{1}{k^2 j}$ for $1 \leq j \leq m$ og $a_n = 0$ ellers, så f's Fourierrække kan skrives som

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \left(\frac{\cos(2m_k - j)x}{k^2 j} - \frac{\cos(2m_k + j)x}{k^2 j} \right).$$

Påstanden er nu, at denne række divergerer for $x = 0$, og det er ikke så svært at se: da

$$s_{2m_k}(x) - s_{m_k - 1}(x) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\cos(2m_k - j)x}{k^2 j},$$

er specielt $s_{2m_k}(0) - s_{m_k-1}(0) = \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{j} > \frac{1}{k^2} \log m_k = \log 2$, Fourierrækken for f konvergerer *ikke* for $x = 0$. (Enkelte detaljer er udeladt. Husk for eksempel Appendix C i hæfte 2 fra 2AN, samt øvelse II.2.6). $\square$

Der findes faktisk Fourierrækker, der er divergente *overalt*, så Fourierrækker behøver langt fra være "pæne" – se [2], side 163-174.

Cesaró-summabilitet

Divergente Fourierrækker er notorisk grimme, men vi kan omgå visse problemer ved at ændre på måden, hvorpå der summeres. Vi har naturligvis brug for en

. *En følge s_0, s_1,... af elementer i et vektorrum $\mathcal{V}$ med seminorm $\| \cdot \|$ siges at være* limitérbar med grænse $s \in \mathcal{V}$ *hvis* $\|c_n - s\| \to 0$ *for* $n \to \infty$*, hvor* $c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$.

Vi vil i det følgende kun betragte det tilfælde, hvor $\mathcal{V} = \mathcal{L}_2([-\pi, \pi])$ og $s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{int}$, $n \in \mathbb{N}_0$, er det symmetriske afsnit i f's Fourierrække. Ordet 'limitérbar' udskiftes da med 'Cesaró-summabel'. Vi er interesserede i limitérbarhed, fordi der gælder følgende

Cauchy. *En konvergent følge s_0, s_1,... med grænse s er limitérbar med samme grænse.*

Bevis. Bevis Givet $\epsilon > 0$ findes $M \in \mathbb{N}$ så $\|s_k - s\| < \frac{\epsilon}{2}$ for $k > M$. For alle $n > M$ er da

$$\|c_n - s\| = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (s_k - s) \right\| \leq \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=0}^{M} (s_k - s) \right\| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=M+1}^{n} \|s_k - s\|$$
$$< \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=0}^{M} (s_k - s) \right\| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Da $\frac{1}{n+1}\|\sum_{k=0}^{M}(s_k - s)\| \to 0$ for $n \to \infty$, findes $N \geq M$, så $\|c_n - s\| < \epsilon$ for $n > N$. $\square$

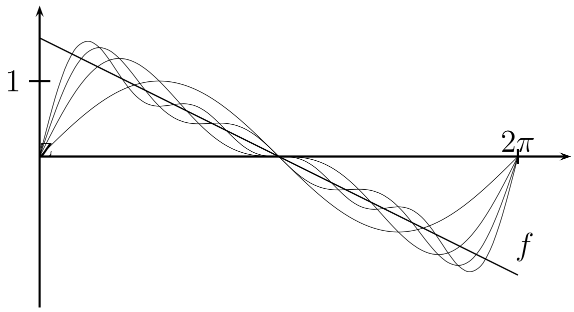
Det vel nok simpleste eksempel er at betragte rækken $\sum_n (-1)^n$, der oplagt er divergent. Den er imidlertid limitérbar med grænsen $\frac{1}{2}$. Et høkerargument for det samme ville være følgende: Med $s = \sum_n (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - \cdots) = 1 - s$, bliver $s = \frac{1}{2}$.[2]

Fourierrækker

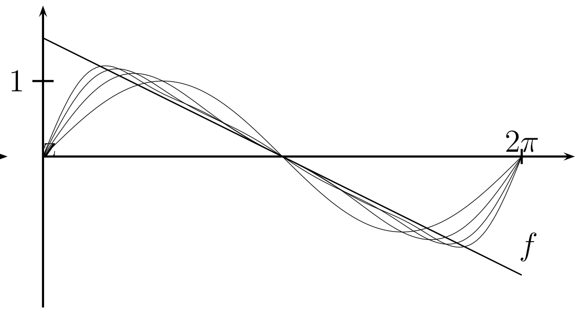
Siden vi har indført en ikke helt banal summation, må det vel skyldes, at afsnitssummerne c_i er pænere end afsnitssummerne s_j (dvs. som de kendes fra Mat 2AN). Det er hovedformålet med denne artikel at vise dette, men ved samme lejlighed får vi også værdifuld viden om Fourierrækker, og det er nok i lyset af dette, Cesaró-summabiliteten kan siges at være interessant. Lad os starte med et eksempel på, hvad der er i vente. Man kan let overbevise sig om, at

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \text{ punktvist på }]0, 2\pi[$$

I dette tilfælde er Cesaró-afsnittene gode approksimationer, og da vi samtidig har set, at Cesaró-summabilitet er svagere end sædvanlig summation, kan det ikke overraske, at man kan vise nogle mere generelle resultater. Det er netop det, vi vil gøre!



Figur 1: De 4 første afsnit.



Figur 2: De 4 første Cesaró-afsnit.

. *For* $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ *er* $\sin\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin(2n+1)\theta = \frac{\sin^2(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

Bevis. Bevis Da $\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$, er $\sin\theta(\sin\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin(2n+1)\theta) = \frac{1 - \cos 2(n+1)\theta}{2} = \sin^2(n+1)\theta$. $\square$

. *For* $f \in \mathcal{L}_2([-\pi, \pi])$ *er* $s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t) + f(x-t)]\mathcal{D}_n(t)\,dt$, *hvor*

$$\mathcal{D}_n(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} & \text{for } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 & \text{for } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

[2]Bare ikke Abel vender sig i sin grav...

er den n'te Dirichlet-kerne.

Bevis. Bevis [7], side II.2.6. $\square$

Der gælder nu følgende

. *Med notation som ovenfor er $c_n(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(\theta_0+\theta)+f(\theta_0-\theta)]\mathcal{F}_n(\theta)\,d\theta$, hvor*

$$\mathcal{F}_n(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\frac{(n+1)\theta}{2}}{(n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}} & \text{for } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{for } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

er den n'te Fejer-kerne.

Bevis. Bevis Der gælder, at

$$\begin{aligned} c_n(\theta_0) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(\theta_0+\theta)+f(\theta_0-\theta)]\mathcal{D}_k(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}[f(\theta_0+\theta)+f(\theta_0-\theta)]\mathcal{D}_k(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(\theta_0+\theta)+f(\theta_0-\theta)]\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}_k(\theta)\ d\theta \end{aligned}$$

så vi mangler at vise, at $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathcal{D}_k(\theta) = \mathcal{F}_n(\theta)$. Men det er let, idet

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}_k(\theta) = \frac{1}{(n+1)\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin(k+\tfrac{1}{2})\theta,$$

hvor

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(k+\tfrac{1}{2})\theta = \sum_{j=1}^{n+1}\sin(j-\tfrac{1}{2})\theta = \sum_{j=0}^{n+1}\sin(2j-1)\frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

(Egentlig er det her antaget, at $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Læseren kan more sig med at kontrollere korollaret for $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.) $\square$

Efterhånden har læseren nok fået det indtryk, at c_n'erne er ret besværlig at have med at gøre 'i praksis', men det er faktisk ikke så galt endda: hvis f kun antager reelle værdier (vel det, vi normalt har i tankerne), så er $s_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n} a_k - a_0$, hvor $a_k(x) = \widehat{f}(k)e^{ikx}$, og da $s_0 = a_0$, $s_1 = 2a_1 + a_0$, $\dots$, $s_n = 2a_n + \cdots + 2a_1 + a_0$, ser vi, at $(n+1)c_n = \sum_{k=0}^{n}\big(2(n-k)+1\big)a_k$. Det bemærkes iøvrigt, i forbindelse med korollar (6), at $\mathcal{F}_n$ er en lige funktion og at

$$\mathcal{F}_n(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\big(1-\tfrac{k}{n+1}\big)\cos k\theta,$$

så man ser let, at $\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}_n(\theta)\,d\theta = 2\pi$. Endvidere gælder der følgende oplagte

. *Hvis θ opfylder, at $0 < \delta \leq |\theta| \leq \pi$, da er* $\mathcal{F}_n(\theta) \leq \dfrac{1}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}$.

Vi er nu langt om længe i stand til at bevise noget rigtig pænt om $\{c_n\}$, nemlig følgende

. *Lad $f \in \mathcal{L}([-\pi,\pi])$. Da konvergerer c_n uniformt mod f på $[-\pi,\pi]$.*

Bevis. Bevis $[-\pi,\pi]$ er kompakt, så fra 2AN vides det, at der findes et M så der for alle $\theta \in [-\pi,\pi]$ gælder, at $|f(\theta)| < M$, og at der for et givent $\epsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så at der *for alle* $\theta, \vartheta \in [-\pi,\pi]$ gælder, at $|\theta - \vartheta| \leq \delta \Rightarrow |f(\theta) - f(\vartheta)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Nu er

$$
\begin{aligned}
|c_n(\theta) - f(\theta)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(\theta+\vartheta)+f(\theta-\vartheta)}{2}\mathcal{F}_n(\vartheta)\,d\vartheta - f(\theta)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(\theta+\vartheta)+f(\theta-\vartheta)}{2}\mathcal{F}_n(\vartheta)\,d\vartheta - f(\theta)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathcal{F}_n(\vartheta)\,d\vartheta\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(\theta+\vartheta)+f(\theta-\vartheta)-2f(\theta)}{2}\mathcal{F}_n(\vartheta)\,d\vartheta\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(\theta+\vartheta)+f(\theta-\vartheta)-2f(\theta)}{2}\mathcal{F}_n(\vartheta)\,d\vartheta\right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \mathcal{F}_n(\vartheta)\,d\vartheta + \frac{1}{2(n+1)\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_\delta^\pi \big(|f(\theta+\vartheta)| + |f(\theta-\vartheta)| + 2|f(\theta)|\big)\,d\vartheta \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2(n+1)\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_\delta^\pi 4M\,d\vartheta,
\end{aligned}
$$

hvor det andet led er mindre end $\frac{\epsilon}{2}$ for n stor nok. □

Uden bevis (se for eksempel FAMØS, december 1995) nævnes følgende klassiske resultat, der oplagt er analogt til sætning 8:

Weierstrass' Approksimationssætning. *Lad $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, og lad $\epsilon > 0$ være givet. Da findes et polynomium $p(x)$ med reelle koefficienter, så $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ for $x \in [a,b]$, dvs. f kan approksimeres uniformt med p.*

Analogien består i, at man ifølge sætning 8 kan approksimere $f \in C([-\pi,\pi])$ uniformt med trigonometriske polynomier, dvs. funktioner på $[-\pi,\pi]$ af formen $t(x) = a_0 + \sum_{n=1}^p (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, hvor a_0, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{N}$.

Lad os slutte af med et interessant – omend elementært – resultat, der udtaler sig om, præcis hvornår $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$ er Fourierrække for en funktion f:

Riesz-Fischer. *Lad $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være et ortonormalsystem i Hilbertrummet V og lad $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af komplekse tal. Så konvergerer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ netop når der findes en funktion $f \in V$, så at $c_n = (f, e_n)$ for alle n.*

Til beviset får vi brug for følgende simple

. *Lad $\{e_n\}$ være et ortonormalsystem i Hilbertrummet V og $(c_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$. Da findes et $f \in V$ så $\left\|f - \sum_{k=1}^n c_k e_k\right\| \to 0$ for $n \to \infty$.*

Bevis. Bevis Øvelse! □

Bevis. Bevis for sætning 10 Der er to ting at vise:

"$\Leftarrow$" Hvis $f \in V$ og $c_n = (f, e_n)$ for alle n, så er $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 \leq \|f\|^2$ ifølge Bessels ulighed.

"$\Rightarrow$" Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ konvergerer, da findes ifølge lemma 11 et $f \in V$, så at $\left\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\| \to 0$ for $n \to \infty$, så for et vilkårligt $m \in \mathbb{N}$ vil $\left|\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_m\right)\right| \leq \left\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\| \cdot \|e_m\| \to 0$ for $n \to \infty$, dvs. $(f, e_m) - \sum_{k=1}^{n} c_k(e_k, e_m) \to 0$ for $n \to \infty$, og dermed er $(f, e_m) = c_m$.

□

Epilog

Artiklens "højdepunkt" mener jeg er Sætning 8, for dette gælder langt fra om den sædvanlige afsnintsfølge $\{s_n\}$. Man kan dog – måske med rette – kritisere, at der ikke er sjove eksempler med. Jeg har undladt dette af to grunde: dels ville det fylde for meget, og dels kan læseren sikkert selv finde på sjove ting. Endelig er [2] altid værd at kigge på.

Litteraturliste

[1] Frank Jones: "*Lebesgue Integration on Euclidean Space*", Jones and Bartlett 1993.

[2] Leif Mejlbro: "*Mit rædselskabinet*", DTU 1988.

[3] Tage Gutmann Madsen: "*Noter til mål- og integralteori*", Københavns Universitets Matematiske Institut 1975.

[4] Howard J.Wilcox et.at.: "*An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*", Dover 1978.

[5] A.C.Zaanen: "*Continuity, Integration and Fourier Theory*", Springer-Verlag 1989.

[6] Harry F.Davis: "*Fourier Series and Orthogonal Functions*", Dover 1963.

[7] Bergfinnur Durhuus: "*Noter til Matematik 2AN*", 1996.

Vi er på vej ind i en af årets farligste måneder. December er julefrokost-tid. FAMØS har sat Martin Jul til at undersøge fænomenet.

Julefrokoster – om kunsten at omdanne sild og snaps til sex og utroskab

Martin Jul

Det overrasker ingen, at der til julefrokoster hele tiden er den underliggende dagsorden, at det hele blot handler om at omdanne sild og snaps til sex og utroskab...

...der er dog mere i det end som så. Julefrokoster er en gammel tradition, der er blevet forfinet gennem generationer. Lad os se lidt nærmere på fænomenet.

Det starter med, at folk dukker op. Dem, der er pæne og ordentlige mennesker og uerfarne julefrokostgængere, dukker op til det annoncerede tidspunkt. Allerede her har de begået en fejl: pæne og ordentlige mennesker går ikke til julefrokost! – hvis de da vil bevare deres renommé.

Vi andre, derimod, farer på dette tidspunkt rundt derhjemme og prævet at sikre, at der er tilpas ryddeligt til, at man kan navigere i seng iført nissehue, fjollet grin og en solid „night-cap".

Siden iler vi afsted og når frem netop som man sætter sig til bords. På denne måde undgås den pinlige tavshed og de alt for mange gensidige „hva' så... hvordan går det?", „ska' vi ikke hente os en øl?", og hvad ædru mennesker ellers kan finde på at sige, når de ellers tør åbne munden.

Vi andre, vi sætter os straks til bords og den manglende konversationsevne reddes af den gode tradition om, at man ikke må tale med mad i munden. Når man så en sjælden gang i mellem har tømt sin bugnende tallerken er der endnu en tradition, der redder en. Så kigger man rundt på de andre ved bordet, nikker afmålt og hæver glasset med et „skål", „lad os smage på varerne" eller „silden ska' ha' noget at svømme i." Endnu har ingen haft brug for at sige noget intelligent og den eneste bivirkning er, at de alle efter jul vil brokke sig over dels, at de har forædt sig, og dels, at de fik for meget snaps, men det er blot et udslag af januartraditionen for ikke at have noget fornuftigt at sige.

Nu har vi efterhånden spist risalamanden og rundt omkring begynder folk at smile fjoget, og måske endda hæve glasset og råbe skål til et af de andre borde. Den betænksomme vært ved dog, at folk ikke er helt klar til at socialisere endnu, og skynder sig at sætte noget høj musik på. Ikke fordi nogen lytter efter, men det giver en chance for at stå i baren og drikke uden de trælsomme afbrydelser, hvor man forventes at tale med hinanden. Højst en skål og hvad der ellers kan klares på tegnsprog er nødvendigt.

De mest modige indleder måske nu forsigtige forsøg på at tale med hinanden. Traditionen byder, at man på dette stadium går rundt og siger „kan du huske sidste år. . . nøj, hvor blev vi fulde“ og dunker hinanden på ryggen. Det er ligegyldigt, hvem man sig det til: om det så er til hunden, så kan man være sikker på, at nogen fyldte øl i dens vandskål og den er heller ikke i stand til at huske nok til at turde sige en imod.

Det gode ved julefrokoster er, at selv folk, der ikke ejer nogen sans for humor, kan optræde som sande komikere. Det kræver blot, at de hjemmefra øver sig på en enkelt vittighed. Er de i stand til at fortælle den nogenlunde korrekt, vil de til de fleste julefrokoster kunne høste stort bifald ved at fortælle den en 15–20 gange i træk, i tryg forvisning om, at folk har glemt begyndelsen inden de hører pointen. Nu byder almindelig høflighed folk at le: nogle lidt for højt, men det er blot et dække over, at de ikke har hørt efter og allerede glemt vittigheden.

Hvis man så alligevel, stik mod alle odds, havner i en situation, hvor ens smalltalkevner er opbrugte, kommer endnu en tradition een til undsætning. Man cirkulerer. Har man fem minutters samtalestof og er der tyve til festen kan man klare sig i næsten to timer på denne konto, og efter dette tidsrum bliver man frelst af, at ingen længere kan huske noget. Tværtimod vil folk her finde det charmerende – det giver noget at tale om – hvis en del af selskabet nu har løsnet slipset, og kravler rundt på gulvet mens de leger færge.

Nu er det også blevet tid til dans og igen reddes generationen, der blev smidt ud af Lilly Nicolaisens danseskole, af den nu udtalte beruselse. Er man blot i stand til at holde sig oprejst på gulvet går det an, og kan man også undgå at ens partner vælter, har man så godt som allerede dannet par: straks denne evne begynder at svigte, vil ingen argumentere mod det fornuftige i, at det rette sted at befinde sig er på noget stort og solidt. Gulvet for eksempel. Når så et øjebliks klarhed slår til, vil almindelig høflighed byde, at man skifter residens til en seng i nærheden, og så er målet med julefrokosten nået: vi har omdannet sild og snaps til sex og utroskab.

Opgavesiderne

De følgende opgaver stammer fra matematikkonkurrencen „Baltic Way“ 1997, der i år blev afholdt i København. Deltagerne i denne konkurrence er gymnasieelever fra landene omkring Østersøen – i denne sammenhæng er Island og Norge også østersølande.

De stakkels gymnasieelever havde $4\frac{1}{2}$ time til at løse de i alt 20 opgaver. De fik 5 point for hvert korrekt besvaret delspørgsmål.

Vinderne af konkurrencen var det polske hold med i alt 87 point. Nummer to blev Tyskland med 76 point, dernæst kom Estland og Sverige på en delt tredjeplads med 74 point, mens Danmark kom ind på femtepladsen med 73 point.

I skemaet nedenfor kan man se, hvor godt de enkelte lande havde det med de forskellige opgaver:

	Opgave																				
Land	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	**Total**
Polen	5	5	4	5	5	5	5	5	1	5	5	4	5	5	5	5	5	0	3	5	87
Tyskland	5	5	4	5	5	3	4	2	5	5	5	4	5	1	0	5	5	0	3	5	76
Estland	1	5	1	0	5	5	5	5	3	5	3	4	5	5	5	5	3	1	3	5	74
Sverige	5	5	5	0	2	5	5	5	0	5	5	4	5	5	0	5	5	0	3	5	74
Danmark	5	5	5	0	5	5	5	5	0	0	5	4	5	0	5	5	5	1	3	5	73
Letland	5	5	3	5	5	5	2	5	0	4	5	4	0	1	3	5	2	1	1	5	66
Finland	5	5	0	0	5	5	5	5	3	5	0	4	0	0	5	5	5	0	2	5	64
Norge	2	5	1	0	5	5	4	5	5	5	5	0	0	0	0	5	4	0	3	5	59
Skt. Petersborg	5	0	0	0	5	5	4	0	0	5	5	4	0	5	5	5	5	1	2	0	56
Island	5	0	0	0	5	5	0	0	0	3	0	4	0	0	1	5	4	0	5	5	42
Litauen	1	0	4	0	5	5	0	0	2	1	2	0	5	0	0	2	2	0	5	5	39

1. Bestem alle funktioner f fra de reelle tal ind i de reelle tal forskellig fra nulfunktionen, så

$$f(x)f(y) = f(x-y)$$

for alle reelle tal x og y.

2. Der er givet en følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ af positive hele tal, i hvilken ethvert positivt helt tal forekommer præcis en gang. Vis, at der eksisterer hele tal ℓ og m, $1 < \ell < m$, så $a_1 + a_m = 2a_\ell$.

3. Lad $x_1 = 1$ og $x_{n+1} = x_n + \left\lfloor \frac{x_n}{n} \right\rfloor + 2$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$, hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største hele tal, der ikke er større end x. Bestem x_{1997}.

4. Vis, at det aritmetiske gennemsnit a af $x_1, \ldots, x_n$ opfylder

$$(x_1 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2 \leq \frac{1}{2}(|x_1 - a| + \cdots + |x_n - a|)^2 .$$

5. I en følge $u_0, u_1, \ldots$ af positive hele tal er u_0 vilkårligt, og for hvert ikke negativt helt tal n er

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_n & \text{for lige } u_n\,, \\ a + u_n & \text{for ulige } u_n\,, \end{cases}$$

hvor a er et fast ulige, positivt helt tal. Vis, at følgen er periodisk fra et vist trin.

6. Find alle tripler (a, b, c) af ikke-negative hele tal, som opfylder $a \geq b \geq c$ og

$$1 \cdot a^3 + 9 \cdot b^2 + 9 \cdot c + 7 = 1997.$$

7. Lad P og Q være polynomier med heltallige koefficienter. Antag, at de hele tal a og $a + 1997$ er rødder i P, og at $Q(1998) = 2000$. Vis, at ligningen $Q(P(x)) = 1$ ikke har heltallige løsninger.

8. Hvis vi lægger 1996 til 1997, lægger vi først enerne 6 og 7 sammen. Vi får 13, skriver 3 og får 1 i mente. Når vi fortsætter, ser vi, at vi får tre menter i alt:

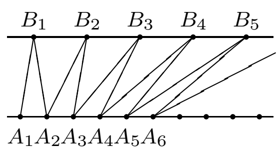
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 1996 \\ +1997 \\ \hline 3993 \end{array}$$

Eksisterer der et helt positivt tal k så vi ikke får nogen menter overhovedet, når vi lægger $1996 \cdot k$ til $1997 \cdot k$?

9. Verdenerne i Verdenssfæren er nummereret 1, 2, 3, ... og forbundet således, at troldmanden Gandalf for hvert helt tal $n \geq 1$ kan bevæge sig begge veje mellem to verdener med numrene n, $2n$ and $3n + 1$. Hvis han starter sin rejse i en vilkårlig verden, kan Gandalf da komme til en hvilken som helst anden verden?

10. Vis, at der blandt 79 på hinanden følgende hele positive tal skrevet i titalssystemet, findes et tal, hvor 13 går op i summen af cifrene.

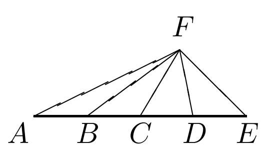
11. På to parallelle linier ligger forskellige punkter A_1, A_2, A_3, ... henholdsvis B_1, B_2, B_3, ... på en sådan måde, at $|A_iA_{i+1}| = 1$ og $|B_iB_{i+1}| = 2$ for $i = 1, 2, \ldots$ (se figur). Givet, at $\angle A_1A_2B_1 = \alpha$, find den uendelige sum



$$\angle A_1B_1A_2 + \angle A_2B_2A_3 + \angle A_3B_3A_4 + \cdots .$$

12. To cirkler $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ skærer hinanden i P og Q. En linie gennem P skærer igen $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ i henholdsvis A og B, og X er midtpunktet af AB. Linien gennem Q og X skærer $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ igen i henholdsvis Y og Z. Vis at X er midtpunktet af YZ.

13. Fem forskellige punkter A, B, C, D og E ligger på en linie, så $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$. Punktet F ligger uden for linien. Lad G være centrum for trekant ADF´s omskrevne cirkel og H centrum for trekant BEF´s omskrevne cirkel. Vis, at linierne GH og FC er vinkelrette.



14. I trekant ABC er$|AC|^2$ det aritmetiske gennemsnit af $|BC|^2$ og $|AB|^2$. Vis, at $\cot^2 B \geq \cot A \cot C$. ($\cot v = \frac{\cos v}{\sin v}$)

15. I en spidsvinklet trekant ABC skærer vinkelhalveringslinierne for henholdsvis $\angle A$, $\angle B$ og $\angle C$ den omskrevne cirkel igen i henholdsvis A_1, B_1 og C_1. Lad M være skæringspunktet mellem AB og B_1C_1, og lad N være skæringspunktet mellem BC og A_1B_1. Vis, at MN går gennem $\triangle ABC$´s indskrevne cirkels centrum.

16. På et 5×5 skakbræt spiller to spillere følgende spil: Den første spiller placerer en hest på et felt. Derefter flytter spillerne skiftevis hesten (efter de normale regler for skak), idet den anden spiller foretager første træk. Det er ikke tilladt at flytte hesten til et felt, der tidligere har været benyttet. Spilleren, som ikke kan trække, taber. For hvilken af de to spillere findes der en vindende strategi?

17. Et rektangel kan inddeles i n ens kvadrater. Det samme rektangel kan også inddeles i $n + 76$ ens kvadrater. Find n.

18. (i) Vis, at der findes to, ikke nødvendigvis disjunkte, uendelige mængder A og B af ikke negative hele tal, så hvert ikke negativt helt tal n entydigt kan skrives på formen $n = a + b$ med $a \in A$, $b \in B$.

(ii) Bevis, at for ethvert sådant par (A, B), indeholder enten A eller B kun multipla af et helt tal $k > 1$.

19. I en skov bor n dyr ($n \geq 3$) i hver deres hule, og mellem hvert par af disse huler findes netop en sti, (der ikke passerer nogen anden hule). Før valget af skovens konge fører nogle af dyrene en valgkampagne. Hvert af de dyr, der fører valgkampagne, besøger hver af de andre huler netop en gang. De benytter kun stierne til at komme fra den ene hule til den anden, skifter aldrig fra en sti til en anden mellem hulerne og vender tilbage til deres egen hule ved slutningen af kampagnen. Endvidere oplyses, at ingen sti mellem to huler bliver benyttet af mere end et dyr, som fører kampagne.

a) Vis, at for hvert primtal n, er det størst mulige antal dyr, der fører kampagne, $\frac{n-1}{2}$.
b) Find det størst mulige antal dyr, der fører kampagne for $n = 9$.

20. Tolv kort ligger på en række. Der er tre forskellige slags kort, nemlig kort med begge sider hvide, begge sider sorte og med en hvid og en sort side. Til at begynde med har ni af de tolv kort en sort side opad. Kortene 1–6 vendes, og derefter har fire af de tolv kort en sort side opad. Nu vendes kortene 4–9 , og så har seks kort en sort side opad. Til slut vendes kortene 1–3 og 10–12 , og nu har fem af kortene en sort side opad. Hvor mange kort er der af hver slags?

Glædelig jul og godt nytår!