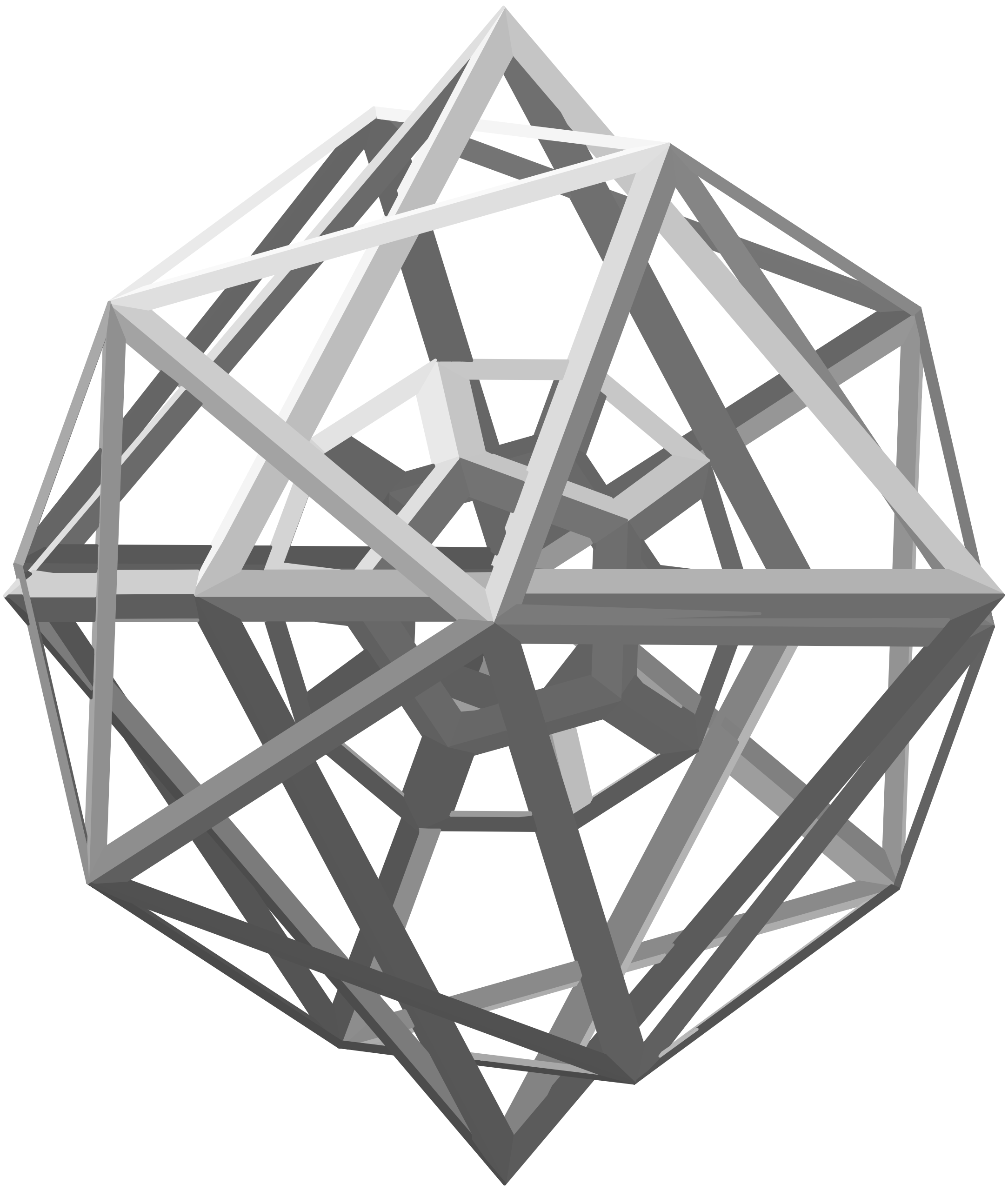
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

11. årgang, nr. 4, maj 1998



FAMØS 11.4; maj 1998.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove
Rasmus Borup Hansen (ansvh.)
Peter Lund
Anders Bo Nielsen
Søren Boel

Deadline for næste nummer:
Fredag den 25. september 1998

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX eller LaTeX 2ε), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 700 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

E-bygningen svirrer for tiden af idéer til at lave matematikstudiet bedre. Hovedparten af sidste nummer af FAMØS var henlagt til en række personers meninger og forslag til, hvad der kan gøres bedre, og fornyligt blev der afholdt et stormøde, hvor matematikuddannelserne var til debat. Debatten har i høj grad drejet sig om, på hvilket semester kurset i mål- og integralteori skal ligge (det ligger i øjeblikket på *mindst* tre forskellige semestre), og om hvorvidt vi skal have et geometrikursus på andet år. Disse må siges at være forholdsvis konkrete problemer, men der har også været emner af mere generel karakter til debat. For eksempel diskuterer man, om det er hensigtsmæssigt på første år at have ét stort matematikkursus, som deles af et stort antal studieretninger, hvor de studerende må forventes at have ganske forskellige holdninger til matematik. Desuden har man diskuteret, i hvor høj grad man skal give køb på eksaktheden og stringensen til fordel for teori, der præsenteres på et mere intuitivt grundlag. Endelig har det været fremme, at man egentlig bør planlægge hele studiestukturen bagfra ved at overveje, hvad vores bachelorer og kandidater skal kunne, og så derfra konstruere et uddannelsesforløb.

Denne sidste bemærkning må ikke siddes overhørig.

Københavns Universitet er på én gang en forsknings- og en uddannelsesinstitution, og har derfor to slags produkter: Forskning samt bachelorer og kandidater. Lige nu er det produktet „bachelorer og kandidater“, der skal produktudvikles. I produktudvikling er det vigtigt, at man har et veldefineret, realistisk og relevant kvalitetsbegreb. Man skal være klar over, hvornår noget er godt, og hvornår noget er skidt.

Universitetsloven giver os et udgangspunkt til at definere vores kvalitetsbegreb: Universiteterne skal uddanne til det højst mulige videnskabelige niveau, og undervisningen skal være forskningsbaseret. Men disse mål opnås ikke kun ved at uddanne folk til at kunne forstå og gengive de nyeste videnskabelige resultater. Det spiller også en rolle, hvilke arbejdsmetoder og tankegange man lærer at bruge. Det kommer vel næppe bag på nogen, at en matematiker nogle år efter at have forladt Universitetet ikke kan huske sætning 2.4.7 fra noterne om ikke-Riemannske hyperkvadrater, men at han stadig anser det for vigtigt at checke alle forudsætninger, og at han stadig har nemt ved at sætte sig ind i en ny abstrakt referenceramme.

For at vi kan gøre os klart, hvilke kvaliteter vi skal stræbe efter, vil FAMØS hermed udskrive en *kvalitetskonkurrence*, hvor læserne inviteres til at give deres bud på, hvad vores kvalitetsbegreb skal bestå i. Husk, at det ikke kun drejer sig om, hvad der er kvaliteter set fra de studerendes side; vi skal også tænke på, hvilke kvaliteter, der kan lokke folk til at læse matematik, og hvilke kvaliteter folk udenfor universitetsverdenen vil forvente, en matematiker besidder. Præmien? Glæden ved at være med til at lave en bedre matematikuddannelse!

Matematikseminar 1998

Igen i år bliver der afholdt Matematikseminar. De korte fakta er

Tid Tirsdag den 25. august til fredag den 28. august.
Sted Gurredam ved Helsingør.
Pris 125,00 kr per person. Rejseudgifter (1 gråt klip) afholdes af deltagerne
Tilmelding 11. maj – 22. maj. Eftertilmelding er muligt hos
Niels Hansen: 38 60 69 11 – 367
Malene Kaul: 35 85 33 19
Katja Hansen: 55 73 66 52.
Yderligere Information Ved henvendelse til ovenstående personer. Deltagerne får tilsendt et brev med nærmere besked i august.
Målgruppe Kommende 3. års og overbygningsstuderende. Dette gælder *også* de, der ikke har bestået matematik 2. Studerende, der „kun“ har matematik som bifag, er også velkomne!!!

Men hvorfor tage med på Matematikseminar. Der er flere svar på dette spørgsmål.

For det første er det en *meget god* måde at lære andre studerende at kende på. Det er et velkendt fænomen, at man tager 3. års og andendelskurser på kryds og tværs af årgangene. Seminaret er derfor en *enestående* mulighed for at kunne genkende ansigter (og måske endda sætte et navn på) ved den første forelæsning.

Det andet argument er, at du får information/debat om følgende emner

- Kurser på 3. år.
- Bachelorprojektet.
- Matematik på andendelsstudiet.
- Fagprojekter.
- Specialet.
- Ph.d studiet.
- Rejser i studieøjemed.
- Arbejdet som matematiker i erhvervslivet.
- Arbejdet som gymnasielærer.
- Regler (og problemer) for de kommende gymnasielærere.
- Sandsynligvis meget mere end vi har kunnet nævne her.

Vi ses på Matematikseminar!!!
Mvh. Seminargruppen.

Andrei Nikolaevich Kolmogorov

Rasmus Borup Hansen

I denne artikel skal vi kaste vores blik på en af det 20. århundredes store sovjetiske matematikere Andrei Nikolaevich Kolmogorov, der blev født 25. april 1903 i byen Tambov lidt over 300 km sydøst for Moskva.

Figur 1: Andrei Nikolaevich Kolmogorov.

Faktisk er det ikke første gang, Kolmogorov bliver omtalt i FAMØS; i det allerførste nummer af FAMØS fra december 1987 havde Ernst Hansen oversat en nekrolog fra den engelske avis „the Times“ for den dengang nyligt afdøde Kolmogorov. Men FAMØS vil ikke afholde sig fra endnu en gang at udbrede kendskab til Kolmogorov, den moderne sandsynlighedsregnings fader.

Kolmogorov beskæftigede sig med rigtig mange områder af matematikken (faktisk siger man, at det eneste område, han *ikke* beskæftigede sig med, var talteori), og det er derfor al for stor en mundfuld at redegøre for hele hans matematiske virke her.

Som sagt blev Kolmogorov født i 1903, men hans mor, Mariya Yakovlevna Kolmogorova, overlevede ikke fødslen, men hendes søster, Vera Yakovlevna Kolmogorova, tog Kolmogorov til sig og opdragede ham, som var han hendes eget barn. Man ved kun lidt om Kolmogorovs far.

Efter revolutionen i 1917 arbejdede Kolmogorov en tid som togkonduktør, og i 1920 startede han på Moskvas Universitet. De studerendes stipendier havde en ringe materiel værdi, men hvis man havde overstået det første matematikkursus og fulgte det andet, blev ens madrationer sat kraftigt op. Så da Kolmogorov allerede besad en del matematisk viden, var han ikke lang tid om at komme til at opfylde kravene for at følge det andet matematikkursus.

Nogle af de første ting, Kolmogorov interesserede sig for, var mængdelære, projektiv geometri og analytiske funktioner, og i 1921–22 viste han sit første resultat, eksistensen af Fourier-Lebesgue-rækker med vilkårligt langsomt aftagende koefficienter. Han blev elev af Luzin, der var det store navn i Moskva på den tid. Urysohn fristede Kolmogorov med nogle topologiske problemer og bragte Kolmogorov i kontakt med Aleksandrov, hvis forskningsområde passede bedre sammen med de resultater, Kolmogorov havde opnået. Men kort efter konstruerede Kolmogorov en Fourier-række, der var overalt divergent – et resultat det skabte international opmærksomhed – og han røg tilbage til Luzin igen. Kolmogorovs kontakter til Aleksandrov var derfor beskedne på det tidspunkt.

I 1925 blev Kolmogorov interesseret i matematisk logik og udgav en artikel om loven om det udelukkede tredje (også kaldet *tertium non datur*). Dette var den første Sovjetiske artikel med nye, væsentlige resultater indenfor matematisk logik, og det var samtidig den første systematiske undersøgelse af intuitionistisk logik. Kort fortalt definerede Kolmogorov en operation (der siden er blevet kaldt Kolmogorov-operationen), der indlejrer den klassiske logik i den intuitionistiske logik. Dermed viste han, at anvendelser af reglen om det udelukkede tredje ikke i sig selv kan give anledning til en modstrid.

Efter at have fået sin grad i 1925 blev Kolmogorov fire år mere på Universitetet som forskningsstuderende. Men da der i 1928–29 kom strengere krav til, hvor lang tid en studerende havde til forskning, afsluttet et hidtil uhørt antal af 70 studerende deres studie. Heriblandt var Kolmogorov. Men takket være Aleksandrov fik Kolmogorov tilkæmpet sig den eneste ledige stilling ved Institut for Matematik og Mekanik ved Moskvas Universitet, og han kunne derfor fortsætte sin forskning.

Kolmogorov er måske mest kendt for sit arbejde indenfor sandsynlighedsregning. Denne interesse startede i 1924, og i 1928 fandt han nødvendige og tilstrækkelige betingelser for store tals lov og beviste loven om den itererede logaritme under nogle meget generelle forudsætninger. I 1929 fremsatte han et udkast til et aksiomssystem for sandsynlighedsregning baseret på målteori. Sådan en teori var først blevet foreslået af Borel i 1909, var blevet udviklet yderligere i 1923 og fik sin endelige form med Kolmogorovs klassiske bog fra 1933, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [2]. Udover at markere sandsynlighedsregning som en selvstændig gren af matematikken, gav hans bog også det nødvendige grundlag for på stringent vis at diskutere følger af stokastiske variable. Kolmogorovs idéer er helt centrale for moderne studier af procesteori, og for Kolmogorovs senere studier af informations- og ergodeteori.

I årene 1930–40 publiserede Kolmogorov mere end 60 artikler om sandsynlighedsregning, projektiv geometri, matematisk statistik, funktioner af én reel variabel, topologi, matematisk logik, matematisk biologi, filosofi og matematikkens historie. I 1931 blev han professor ved Moskvas Universitet, og det er også fra denne periode, at hans varme venskab med Pavel Sergeevich Aleksandrov stammer.

Kolmogorovs venskab med Aleksandrov startede i 1929 under en sejltur på Volga. På den tid tilbød „Proletarernes Selskab for Turisme og Udflugter" aktiv ferie: Man kunne få en båd og campingudstyr i en by langs Volga og kunne så aflevere det længere nede af floden. Kolmogorov, der allerede havde erfaring med flodbåde, besluttede at arrangere sådan en tur og spurgte blandt andet Aleksandrov, om han ville med. Af bøger medbragte de ikke andet end en sejlplan for dampbåden, et eksemplar af Odysséen og så naturligvis en række manuskripter til artikler, de var i gang med at skrive. De sejlede 1300 km, hvorefter de afleverede båden, tog til Kaukasus og efter nogle dages vandring indkvarterede de sig i et lille værelse i et kloster på en halvø ved Savan-søen. Selvom de brugte en stor del af de næste tre uger på at svømme og slikke sol, fik de også lavet noget matematik. Kolmogorov arbejdede med integrationsteori og analytiske beskrivelser af Markov-kæder i kontinuert tid, mens Aleksandrov skrev på sin bog med Hopf om topologi. De fortsatte deres tur med forskellige former for transportmidler, og de endte med at bestige det 4100 m høje bjerg Alagez. Da Aleksandrov for lang tid siden havde aftalt et møde med nogle matematikere, skiltes Kolmogorov og Aleksandrov for en tid. Senere mødtes de dog ved Sortehavet, hvor de brugte mere tid på solbadning, svømning og matematik.

I 1930 var både Kolmogorov og Aleksandrov i Göttingen, hvor Kolmogorov diskuterede grænsesætninger med Courant, intuitionistisk logik med Weyl og funktionsteori med Landau. Om sommeren besøgte de Carathéodory i München og blev inviteret til Middelhavet af Fréchet – en tur der både involverede vandreture i Bayern og et besøg ved Urysohns grav i Bretagne, hvor han var druknet i 1924 kun 26 år gammel.

Kolmogorov blev i Paris til december, idet han mødtes med Borel og ikke mindst Lévy. Der er ingen tvivl om, at de matematikere, Kolmogorov mødte i 1930, i høj grad har inspireret ham til hans arbejde med sandsynlighedsregning.

I 1935 erhvervede Kolmogorov og Aleksandrov sig en gammel herregård ved Komarovka. „Huset ved Komarovka“ blev hurtigt et mødested for matematikere: „Som regel,“ har Kolmogorov sagt, „blev fire ud af ugens syv dage brugt ved Komarovka, hvoraf én var afsat helt til fysisk adspredelse – skiløb, roning og vandreture. På solrige martsdage løb vi på ski kun iført shorts i helt op til fire timer. På andre dage var morgengymnastik obligatorisk, om vinteren suppleret af 10 km's skiløb... Vi kunne især godt lide at svømme i floden lige som den begyndte at smelte... Jeg svømmede kun korte afstande i det kolde vand, men Aleksandrov svømmede meget mere. Til gengæld kunne jeg løbe væsentligt længere på ski uden tøj.“ Ved Universitetet havde han en femværelses lejlighed med stakke af artikler i ét hjørne, en samling teatermasker i et andet hjørne og nogle ski et andet sted. Da Kolmogorov blev adspurgt, om det var her, han arbejdede, svarede han, „Nej, nej. Jeg arbejder ude ved dacha'en; Jeg er kun her tre dage om ugen.“ [1]

En anden væsentlig begivenhed i 30'erne var, at Kolmogorov samtidig med og uafhængigt af den amerikanske matematiker J.W. Alexander opfandt kohomologibegrebet. I slutningen af 30'erne blev Kolmogorovs interesse draget mod teorien for turbulens. Med stor fysisk intuition – og naturligvis med matematisk præcision – beskrev han i to korte artikler i 1941 sine idéer, som anses for at være blandt de vigtigste bidrag til teorien for turbulens hidtil.

I 1942 giftede Kolmogorov sig med Anna Dmitriyevna Egorov, men de fik ingen børn.

Det er en stor mundfuld at redegøre for Kolmogorovs matematiske virke. Han var ganske enkelt med for mange steder. Men ud over de ting, der allerede er blevet nævnt her, er det også på sin plads at nævne hans arbejde med informationsteori og algoritmik. Specielt bør teorien for Kolmogorov-kompleksitet nævnes – Kolmogorov-kompleksitet går ud på at måle kompleksiteten af et objekt ved længden af den mindste algoritme, der skal bruges til at rekonstruere objektet.

Kolmogorovs pædagogiske aktiviteter startede allerede i 1922, og at videregive viden og idéer havde en enorm betydning for Kolmogorov. Det var ikke kun uddannelse på universitetsniveau, der interesserede ham. Han var med til at organisere matematikolympiader i skoler, skrev bøger om matematik som proffession, der blev trykt i et stort antal eksemplarer, og han skrev også lærebøger i geometri, algebra og analyse for 6. til 10. klasse.

Ifølge Kolmogorov når omtrent halvdelen af de 14–15 årige til den overbevisning, at de ikke har brug for matematik og fysik. Dette kan man tage hensyn til ved at lave et specielt simpelt undervisningsprogram til sådanne elever. Men ved 15–16 års alderen viser der sig gerne en interesse for matematik, der nemt kan føre den studerende til koncentreret arbejde og videre til mere forskningsagtigt arbejde i 18–20 års alderen. Det er vigtigt, at unge, der beskæftiger sig med videnskab for første gang, så hurtigt som muligt bliver overbeviste om, at de er i stand til at lave selvstændigt arbejde. Derfor skal vejlederen, når han finder forskningsemner til en studerende, ikke kun tænke på vigtigheden af emnet, men også på, hvordan emnet vil stimulere den studerende, og på om det ligger indenfor den studerendes rammer at gennemføre projektet, uden det bliver for nemt.

Evnen til på én gang at finde spændende forskningsemner, der ikke leder de studerende ud i blindgyder, og som samtidig giver de studerende udfordringer, der ikke overstiger deres formåen, er meget karakteristisk for Kolmogorov. Han har også haft over 60 studerende, der har fået, hvad der svarer til en ph.d.-grad.

Et andet kendetegn for Kolmogorov var, at han også underviste i musik, kunst og litteratur, idet han mente, at de studerendes intellektuelle udvikling skulle være balanceret ligeligt mellem alle former for intellektuelle aktiviteter. Endelig var Kolmogorov en af de få ikke-politiske matematikere i Sovjetunionen, der havde indflydelse nok til at hjælpe talentfulde folk med ikke helt politisk korrekte synspunkter.

I løbet af sit liv modtog Kolmogorov Lenin-ordenen i alt syv gange, og han fik Lenin-prisen i 1965. Desuden fik han Oktoberrevolutionsordenen og titel „helt for det socialistiske arbejde“. Han skrev over 300 artikler, lærebøger og monografier, han var medlem af mange udenlandske akademier og selskaber og var æresdoktor ved et væld af universiteter, og i 1963 fik han den Internationale Bolzano-pris.

Kolmogorov døde den 20. oktober 1987 i Moskva.

Litteraturliste

[1] P.M.B. Vitányi: *Andrei Nikolaevich Kolmogorov*, CWI Quarterly **1** (1988), p. 3–18. `http://www.cwi.nl/~paulv/KOLMOGOROV.BIOGRAPHY.html`

[2] A.N. Kolmogoroff: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Verlag von Julius Springer, Berlin 1933.

Side 9 sætningen: Keplers formodning om optimal kuglepakning

Jan Philip Solovej

Et klassisk problem i matematikken er, hvordan man bedst pakker identiske kugler i et givet volumen i 3 dimensioner. Problemet går tilbage til Kepler. Det er et ikke-trivielt problem, som afliver et par af de myter, der ofte omgiver matematikken. En af de myter, der aflives, er, at det kun er de abstrakte problemer, der er ikke-trivielle. En anden myte, der aflives, er, at der i matematikken aldrig er tvivl om, hvornår noget er bevist eller ej.

I 1993 publicerede Wu-Yi Hsiang fra Berkeley et bevis for Keplers formodning, eller rettere hvad han påstår er et bevis (On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture. *Internat. J. Math.* **4** (1993), no. 5, 739–831). Beviset blev efterfølgende kritiseret af andre eksperter for ikke at være tilstrækkeligt detaljeret til at kunne verificeres. Specielt var der en kritik af Hales og et efterfølgende svar fra Hsiang i Math. Intelligencer (se T.C. Hales, The status of the Kepler conjecture, *Math. Intelligencer* **16** (1994), no. 3, 47–58 og A rejoinder to T. C. Hales's article: "The status of the Kepler conjecture"*Math. Intelligencer* **17** (1995), no. 1, 35–42.

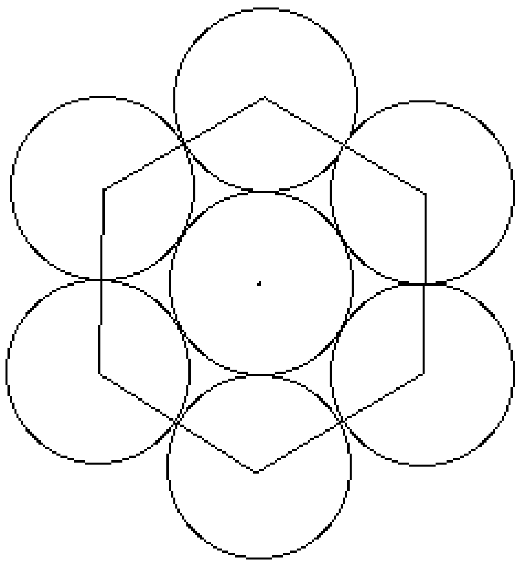
Lad mig formulere problemet. Man kan f.eks. spørge, hvor stor en brøkdel af en Euklidisk kugle med radius R i n dimensioner der kan fyldes af kugler med radius 1. Lad $V_n^-(R)$ være den maksimale brøkdel af volumenet af en kugle af radius R der kan optages af disjunkte kugler af radius 1 indeholdt i kuglen af radius R. Det er klart, at $V_n^-(R) = 0$, hvis $R < 1$, $V_n^-(R) = (1/R)^n$, hvis $1 \leq R < 2$. Allerde $V_n^-(2)$ er mere kompliceret.

Man kan også definere $V_n^+(R)$ til at være den maksimale brøkdel af volumenet af en kugle af radius R, der kan overdækkes af disjunkte kugler af radius 1, som dog ikke behøver være indeholdt i kuglen af radius R.

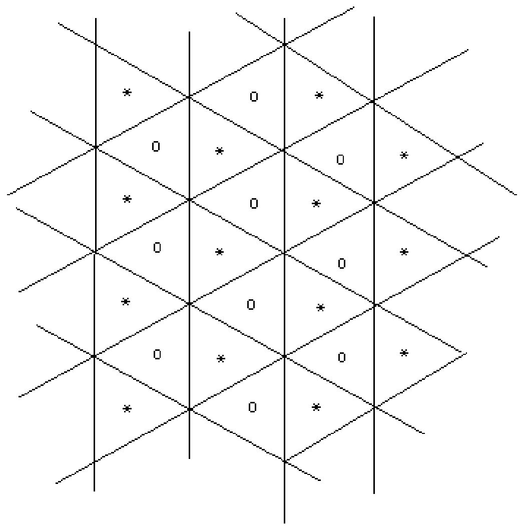
Det er klart, at $V_n^-(R) \leq V_n^+(R)$. Det er heller ikke så svært at bevise, at $\lim_{R\to\infty} \frac{V_n^-(R)}{V_n(R)} = 1$. Noget mere kompliceret er det at vise, at $V_n(\infty) = \lim_{R\to\infty} V_n^{\pm}(R)$ eksisterer.

Sætning (Optimal pakning i 2 dimensioner). *For $n = 2$ har man, at $V_2(\infty) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.9069$.*

Beviset er nemt. I 2 dimensioner vil en kugle af radius 1 kunne omringes af 6 identiske kugler. De 6 kuglers centre vil udgøre hjørnerne i en sekskant (se figur 1). Observationen er nu, at man kan fortsætte denne konstruktion til hele planen. Man kan nemlig placere kugler i hjørnerne af et trekantsgitter som det der er vist i figur 2. Man kan nu forholdsvis nemt argumentere for at dette er den optimale overdækning.



Figur 1: Optimal kuglepakning i to dimensioner.



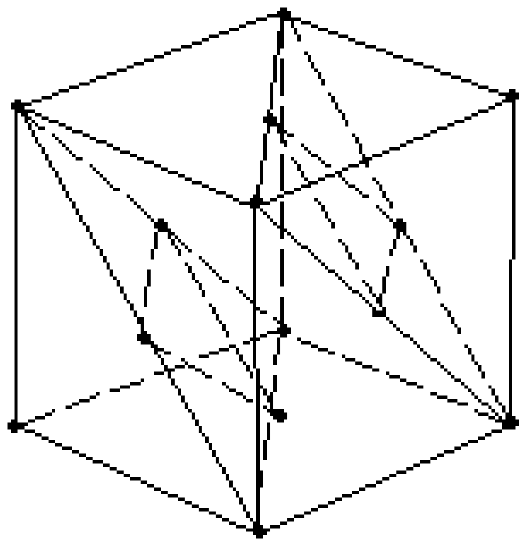
Figur 2: Idé til hvordan en optimal 2-dimensional pakning kan udviddes til tre dimensioner.

Derfor vil det maksimale arealforhold være lig med det for overdækningen af en ligesidet trekant med sidelængde 2, hvilket man nemt ser er $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Problemet er nu, at man ikke kan gennemføre den samme konstruktion i tre dimensioner. En kugle i 3 dimensioner kan omringes af 12 identiske kugler. Men en sådan pakning kan *ikke* fortsættes til hele rummet.

Keplers formodning siger $V_3(\infty) = \pi/\sqrt{18} = 0.740480$ og at man kan opnå den optimale pakning ved at pakke kuglerne optimalt i 2-dimensionale lag som placeres oven i hinanden. Man genkender denne pakning fra pakningen af appelsiner på en frugtbod. Mere præcist pakker man først kugler i en plan ved at placere dem i hjørnerne af et trekantsgitter. Ovenpå denne plan lægger man nu igen en plan med optimalt pakkede kugler. Der er præcist to måder man kan lægge den anden plan ovenpå den første. Dette er illustreret i figur 2. Det tegnede trekantsgitter repræsenterer den første plan. Kuglerne i den anden plan kan nu enten lægges over punkterne mærket med $*$ eller punkterne mærket med 0. Bemærk, at punkterne mærket med $*$ eller 0 udgør trekantsgittre der er identiske med det, der er tegnet.

Vi har derfor mange kuglepakninger med identiske volumener. Benævn det tegnede gitter i figur 2 med A, gitteret der udgøres af $*$ punkter med B og gitteret af 0 punkter med C. Så kan kuglepakningerne karakteriseres ved følger af A,B,C med den eneste restriktion at to bogstaver ved siden af hinanden i følgen ikke må være ens. Der er overtælleligt mange sådanne følger i kontrast til det 2 dimensionale tilfælde, hvor der er en entydig optimal kuglepakning. Den specielle pakning $ABCABCABC\dots$ kan karaktriseres på en anden måde. Nemlig som at kuglerne er placeret som hjørner i det såkaldte fcc gitter. Her står fcc får "face centered cubic". Det er det gitter, man får ved at tage et kubisk gitter og placere punkter i centrum af hver side i hver kube. Figur 3 viser en sådan kube og hvordan planerne med trekantsgittre ligger. Gitteret fcc finder man som den krystalinske form af ædelgasserne. I modsætning til andre atomer er ædelgasatomerne helt kugleformede. Det er derfor ikke overraskende, at deres krystalinske struktur svarer til den optimale pakning af kugler.



Figur 3: Et fcc-gitter.

Hvis Keplers formodning er korrekt, kan man stille spørgsmålet, om det kun er de pakninger beskrevet ovenfår, som er optimale. Dette spørgsmål er dog ikke helt veldefineret. Keplers formodning drejer sig om det maksimale volumenforhold når man går til grænsen hvor det volumen der overdækkes er meget stort. Som beskrevet ovenfor kan man nemt definere volumenforholdet i grænsen, men kan man også definere grænsepakningen? Det kan man faktisk på følgende måde. Man siger, at en pakning af hele $\mathbb{R}^n$ med kugler af radius 1 er optimal, hvis man ikke ved at omrokere et endeligt antal kugler kan få plads til flere kugler. Spørgsmålet er nu, om kun Keplerpakningerne er optimale.

Forskerdag 1998

Rasmus Borup Hansen

Mandag den 27. april 1998 afholdt Matematisk Afdeling en „forskerdag", hvor fem af afdelingens ansatte fortalte kort om det, de arbejder med i deres forskning.

Den første taler var Christian Berg, der fortalte om ortogonale polynomier så som Legendre-, Hermite- og Jacobi-polynomier. Dernæst fortalte Søren Jøndrup om ikke-kommutativ ringteori. Så blev det Mikael Rørdams tur, og han fortalte om de irrationale rotationsalgebraer og „the ten Martini problem". Efter kaffepausen, hvortil Matematisk Afdeling havde hamstret småkager, fortalte Bergfinnur Durhuus om et kombinatorisk problem i kvanteteori, og til sidst fortalte Christian U. Jensen om Galoisteoriens omvendingsproblem.

Efter de fem foredrag gav afdelingen pizza til dem, der havde meldt sig til på forhånd.

Forskerdagen var helt bestemt et vellykket arrangement, som gerne må gentages en anden gang.

Hørt på forskerdagen

Den fri algebra er for vild. Der røg fem års forskning. Det var heldigvis ikke mig, der havde lavet det...

– Søren Jøndrup

Bortset fra at dette integral ikke giver mening, er det meget værdifuldt...

– Bergfinnur Durhuus

I kan læse en meget god bog, som jeg selv har publiceret... Hvad er det nu den hedder?

– Bergfinnur Durhuus

Spørgsmålet er nu: Er det her veldefineret? Og svaret er naturligvis nej!

– Bergfinnur Durhuus

Naar man dyrker Galoisteori, er det først og fremmest fordi, man synes, det er sjovt.

– Christian U. Jensen

Hvis man ikke kan løse det, kan man i hvert Fald generalisere det.

– Christian U. Jensen

Gnomen og Visdommens Perle

En fabel af Richard Willmott, oversat af Birger Nielsen[1]

Der var engang en meget begærlig gnom, som boede på kongeslottet i gnomernes land. Han samlede på marmorkugler og havde ganske ganske mange. Hans største fornøjelse var at lege med dem og selv om han havde langt flere end han kunne bruge, fik ingen andre lov så meget som til at røre hans marmorkugler.

En dag kom en rejsende matematiker ved navn Merlin forbi slottet og Gnomernes Konge blev så imponeret af hans kunnen at han inviterede ham til at blive på slottet et stykke tid og lære gnomerne noget matematik. Merlin tog glad imod tilbudet og undervisningen startede straks. Alle gnomerne var dybt fascinerede af Merlin og hans visdom og fulgte undervisningen med stor flid. Eller rettere sagt alle undtagen den begærlige gnom, for han ville hellere lege med sine marmorkugler.

Nogen tid efter undrede han sig dog over at det var længe siden nogen sidst havde plaget ham om at låne en af hans marmorkugler og det gik nu op for ham at alle andre fulgte Merlins undervisning og han blev meget nysgerrig efter at finde ud af hvad der fascinerede de andre så meget. Han sneg sig ind til en af Merlins timer og blev omgående tryllebundet af en enestående smuk perle, som lå på bordet foran Merlin. En af de andre fortalte at dette var en Visdommens Perle, som Merlin altid havde hos sig, men kun tog frem, når han underviste. Efter nogen tid fik den begærlige gnom dog flyttet sin opmærksomhed fra perlen og hen på Merlins undervisning.

Merlin var ved at gennemgå noget om kardinaltal og om at det at tælle var en en-til-en korrespondance mellem objekter og et kardinaltals elementer. Den begærlige gnom forstod ikke rigtigt hvad der foregik, men fik dog den ide at han ville tælle sine marmorkugler Han gik derfor tilbage og begyndte at nummerere sine marmorkugler ved at skrive tal på dem. Mange dage efter kom han til tallet 3.429.200.728 og syntes endda ikke at han var kommet længere end da han startede. Han besluttede sig derfor til at spørge Merlin. Merlin fandt ved at spørge gnomen ud af at selvom gnomen ikke kunne gøre noget på ingen tid, så *kunne* han dog gøre det så hurtigt, han havde lyst til. Merlin foreslog derfor at gnomen til at nummerere en kugle skulle bruge halvt så lang tid som han havde brugt til at nummerere den foregående.

Gnomen lovede at gøre dette, men tilbød inden han gik at give alle de marmorkugler han indtil nu havde optalt i bytte for Visdommens Perle. Han syntes selv at dette var noget af et offer, men han var meget optændt af ønsket om at eje Perlen. Imidlertid takkede Merlin nej, hvilket overraskede gnomen og også gjorde ham lidt vred, så han gik surmulende tilbage for at tælle resten af sine marmorkugler.

Han fulgte dog Merlins instrukser og nummererede den første kugle på 1 sekund, den næste på $\frac{1}{2}$, den næste på $\frac{1}{4}$ sekund og så videre. Efter blot 2 sekunder var han færdig. Han havde brugt alle tal og han var derfor stadig ikke sikker på hvor mange

[1] Denne tekst er taget fra Mathematical Magazine, Vol. 50, No. 3, May 1977.

kugler han egentlig havde. Det hvilket undrede ham. så han spurgte igen Merlin, der kort svarede at havde han fulgt undervisningen ville han have vidst at der var præcis $\aleph_0$ kugler.

Gnomen tilbød nu at bytte *alle* sine marmorkugler for Merlins Perle, som han nu eftertragtede som kun en begærlig gnom er i stand til det. Merlin forklarede at det var en Visdommens Perle, som man kun fik, hvis man var vis og foreslog at gnomen kom til undervisningen. Gnomen blev inderligt sur over dette svar og gik. Han blev kun i lidt bedre humør ved at afslå en anden gnoms ønske om at låne en marmorkugle, selv om denne argumenterede, men hen over hovedet på den begærlige gnom, for at han kunne forære en marmorkugle væk uden at have færre af den grund. (Den anden gnom havde selvfølgelig fulgt Merlins undervisning.)

En dag kort efter kom Merlin på et uventet besøg hos gnomen og han havde endda taget Visdommens Perle med.

„Jeg vil give dig en chance,“ sagde han. „Jeg har to opgaver til dig og klarer du dem begge, vil jeg bytte Visdommens Perle for en enkelt af dine marmorkugler.“

Gnomen overvejede dette og så at han dårligt kunne tabe noget ved dette tilbud og spurgte derfor hvad opgaverne gik ud på.

„Du vil få dem en ad gangen. Jeg har her en stor kasse og $\aleph_0$ små kasser, som er nummereret ligesom dine marmorkugler. Jeg hælder nu i rækkefølge dine kugler over i den store kasser, lukker den og åbner for den for neden så du kan tage kuglerne ud i nummerorden.“ Som sagt, så gjort. Da han var færdig, lukkede han den store

kasse og lukkede den op for neden, så man kunne se kugle nummer 1.

„Dette er den første opgave. Klokken 1 minut i 10 tager du den første kugle og lægger i kasse 1. $\frac{1}{2}$ minut i, tager du den anden kugle og lægger i kasse 1 og tager kuglen med det højeste nummer og lægger i kasse 2. $\frac{1}{4}$ minut i tager du den tredje kugle og lægger i kasse 1, og tager kuglen med det højeste nummer og lægger i kasse 2 og tager kuglen med det højeste nummer og lægger i kasse 3. Således fortsætter du indtil klokken 10, hvor du må stoppe. Ønsker du at prøve denne opgave?"

Gnomen tænkte for sig selv. „Først kugle 1 i kasse 1, så kugle 2 i kasse 1 og videre til kasse 2, så kugle 3 i kasse 1, videre til kasse 2 og ned i kasse 3 og så videre. Det er jo det samme som at tage kugle 3 og putte den ned i kasse 3. Hvorfor er instrukserne formuleret så indviklet?" Det så så enkelt ud at gnomen tøvede, og overvejede om der var et trick gemt i instrukserne, men der var jo ikke noget at tabe, selv hvis han skulle udføre opgaven forkert.

Den begærlige gnom gik altså med på idéen. Klokken 1 minut i 10 gav Merlin signal og gnomen startede. Han arbejdede målbevidst og lynende hurtigt et helt minut, indtil Merlins ur gav et højt klemt. Gnomen checkede de små kasser og sandelig som han havde forventet: Kugle 1 var i kasse 1, kugle 2 i kasse 2, kugle 3 i kasse 3... og så videre. Faktisk var den store kasse tom, hvilket forbløffede ham lidt indtil Merlin gjorde ham opmærksom på at eftersom alle kugler havde et nummer og kugle nummer n blev fjernet fra den store kasse inden et $\frac{1}{2^n}$ minut i 10, så måtte alle kugler være væk klokken 10.

Merlin medgav gnomen at den første opgave var udført fuldt tilfredsstillende og stillede så den sidste opgave. Gnomen ventede mistroisk en opgave, han enten ikke kunne eller ville løse, så han var overrasket over Merlins beskrivelse af den.

Merlin lagde alle kuglerne tilbage i den store kasse i rigtig rækkefølge og sagde: „Den sidste opgave er næsten mage til den første, men en af instrukserne er lidt anderledes, så lyt godt efter. Klokken 1 minut i 11 tager du kugle 1 og lægger den i kasse 1. Klokken $\frac{1}{2}$ minut i, tager du kugle 2 og lægger i kasse 1 du tager så kuglen med det *laveste* nummer og lægger i kasse 2. Klokken $\frac{1}{4}$ minut i, tager du kugle 3 og lægger i kasse 1, kuglen med det laveste nummer flytter du til kasse 2 og kuglen med det laveste nummer her til kasse 3. Således fortsætter du indtil klokken 11, hvor du må stoppe!"

Igen tænkte gnomen. „Det er jo ikke svært. Instruktionerne er ligesom før bortset fra at jeg skal tage kuglen med det *laveste* nummer i stedet for med det højeste. Det kan ikke gøre nogen forskel. Hver gang skal jeg tage en kugle fra den store kasse og putte i den første af de små, derefter fra den første til den anden, osv. Begge tilfælde svarer til at tage en fra den store kasse og putte i den første tomme af de små kasser. Merlin må jo tro at jeg er en idiot, der ikke kan følge hans indviklede instrukser til punkt og prikke."

Gnomen accepterede således også den anden opgave. Havde han nu haft lidt mere respekt for Merlin, havde han måske tænkt lidt mere over hvorfor Merlin ville stille ham så lette opgaver, men han var selvsikker og utålmodig efter at få Perlen og endelig var han jo sikker på ikke at tabe noget, selv om han skulle komme til at lave en fejl undervejs.

Så klokken 1 minut i 11 gik han i gang og på slaget elleve stoppede han og som forventet var den store kasse helt tom. Han kiggede i den lille kasse mærket 1 og opdagede til sin undren at den også var tom! og det samme var alle de små kasser, da han hurtigt så efter!

I forbløffelse og rædsel udbrød han „Hvordan kan alle kasserne være tomme og hvor er mine marmorkugler?“

„Dit første spørgsmål er let at svare på.“ sagde Merlin. „Den store kasse er tom af samme grund som før. De andre kasser er tomme, fordi du hver gang du har puttet en kugle i en af dem lidt efter har flyttet den igen

„Men jeg efterlod en kugle i hver kasse hver gang“ protesterede gnomen.

„Det er sandt, men ligegyldigt“ sagde Merlin. „Se på det således Betragt en af kasserne, den har et nummer, lad os kalde det k. Hvis der skulle ligge en kugle i den, ville kuglen have et nummer, lad os sige n. Men nej, kugle n bliver fjernet fra kasse k inden et $\frac{1}{2^{n+k}}$ minut i 11. Så kugle n kan ikke ligge i kasse k. Og det argument holder for en vilkårlig kugle og en vilkårlig kasse, så der er ingen kugler i nogen kasse. Dit sidste spørgsmål må du selv kunne svare på. Det er jo kun dig selv, der har flyttet på dine marmorkugler!“

Gnomen blev mere og mere rasende efterhånden som det dæmrede for ham at hans kugler var og blev væk. Men pludselig blev han i godt humør igen.

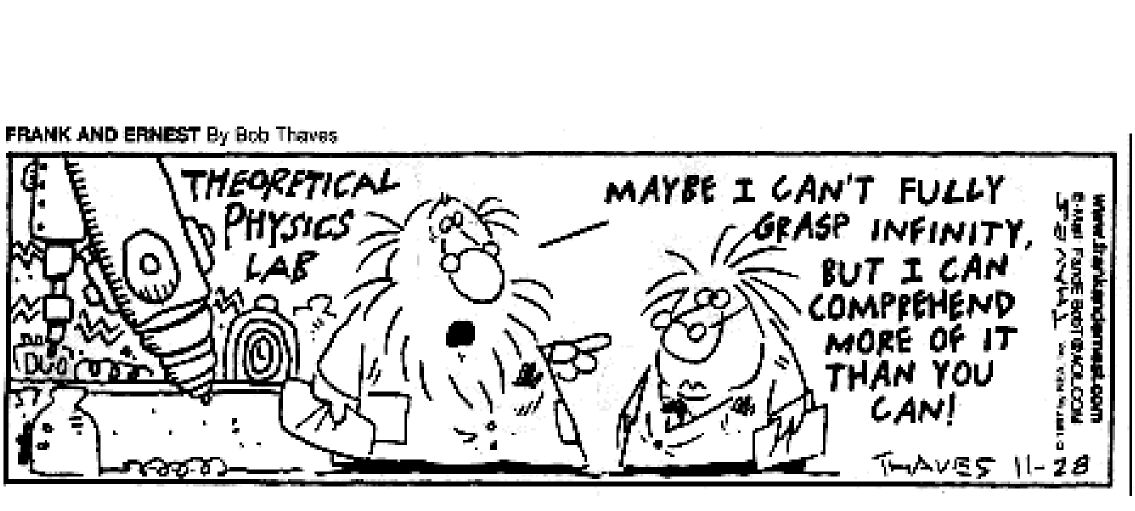
„Giv mig Perlen. Jeg har udført opgaverne og nu er den min.“

„Nej,“ svarede Merlin. „Det er den ikke. Du har udført opgaverne korrekt, men du har ingen marmorkugle at give i bytte for Perlen.“

Gnomen, der nu indså, hvor grundigt Merlin havde narret ham, var ude af sig selv af raseri og fortvivlelse.

„Du tåbelige og begærlige gnom,“ sagde Merlin strengt. „Man kan kun gøre sig fortjent til en Visdommens Perle ved at være vis“

Og således blev den begærlige gnom straffet for sin begærlighed og uvidenhed.



Opgavesiderne

Rasmus Borup Hansen

Opgave 1

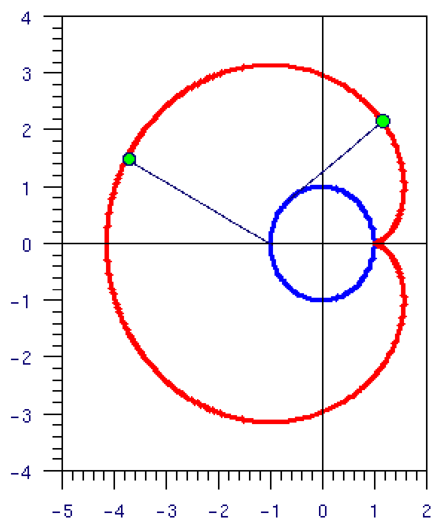
Ud af tre mænd er der én, der altid taler sandt, én der altid lyver, og én der tilfældigt siger ja eller nej. De tre mænd ved, hvem af dem, der gør hvad. Hvis du må stille tre ja/nej spørgsmål i alt, hvad og hvem skal du så spørge for at finde ud af, hvem der er hvem?

Opgave 2

Tre personer A, B og C skal over en bro. A, der er i dårlig form, kan komme over broen på 10 minutter, B kan komme over på 5 minutter, mens C, kun skal bruge 2 minutter. De har også mulighed for at bruge en cykel, og ligegyldigt hvilken person, der cykler, skal han kun bruge 1 minut på at komme over. Hvad er den korteste tid, der skal til, for at alle kan komme over broen?

Opgave 3

Et får er bundet fast til muren på et cirkulært tårn med radius 1 omgivet af græs. Snoren, det er bundet fast med, har længde π. Fåret kan ikke gå ind i tårnet. Hvor stort et areal af græsset kan fåret nå? (Se figuren nedenfor.)



Opgave 4

Betragt en pyramide konstrueret af lige store kuber, sådan at den kvadratiske grundflade består af n^2 kuber, det næste lag består af $(n-1)^2$ kuber, og så videre indtil toppen, der består af en enkelt kube. Antag, at man kan tage alle disse kuber og lægge dem, så de former et kvadrat. Vis, at da er enten $n = 1$ eller $n = 4900$.

Vink: En pyramide konstrueret på den måde vil bestå af $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ kuber.

Opgave 5

Fire hunde er placeret i hvert sit hjørne af et kvadrat med sidelængde a. Samtidig begynder hver hund at gå (alle med samme fart) lige mod den hund, der er til venstre for den. Til sidst vil alle hundene mødes i midten af kvadratet. Hvilken vej vil hundene følge, og hvor langt skal de gå for at komme til midten af kvadratet?

Opgave 6

Hvis n punkter vælges tilfældigt på randen af enhedscirklen, hvor stor er da sandsynligheden for, at de alle ligger i den samme halvcirkel.

Opgave 7

En nat bliver det snevejr. Om morgenen kl. 6:00 kører en sneplov ud for at rydde en vej. Sneploven kan rydde et fast volumen sne pr. tidsenhed, dens fart er med andre ord omvendt proportional med snedybden. Hvis sneploven rydder en dobbelt så stor strækning i løbet af den første time som den gør i den anden time, hvornår begyndte det da at sne?

Opgave 8

Foran dig på et bord ligger to konvolutter med penge. I den ene er der dobbelt så mange penge som i den anden. Du får lov til at tage én af konvolutterne og beholde de penge, der er i den. Men inden du åbner den, får du lov til at beslutte dig om, hvis du vil. Du ræssonerer nu som følger: Hvis den konvolut, du valgte i første omgang indeholder x kroner, er der 50% chance for at den anden konvolut indeholder $\frac{x}{2}$ kroner og 50% chance for at den indeholder $2x$ kroner. Altså må du, hvis du ombestemmer dig, i gennemsnit få $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{5}{4}x$ kroner, og det kan tilsyneladende godt betale sig at skifte mening – eller hvad?

Matematikundervisning?

(Fundet på Internet)

Der var engang en dreng, der klarede sig dårligt i matematik i skolen. Hans forældre prøvede alting lige fra eneundervisning til hypnose. Alt sammen til ingen verdens nytte. Men så fik de et råd af en af deres venner: De skulle flytte deres dreng over i den private, katolske skole.

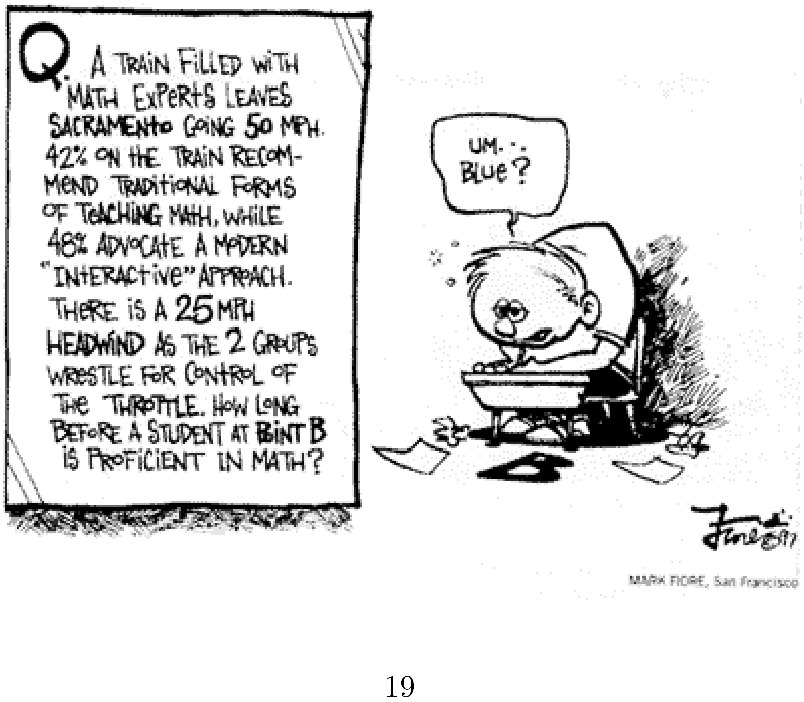
Efter drengens første skoledag i den nye skole, blev forældrene ganske overraskede, da han, så snart han kom hjem, med det samme gik op på sit værelse og lukkede døren efter sig med en meget beslutsom mine.

Han brugte mange timer på sit værelse – med matematikbøger både på skrivebordet og på gulvet. Han kom kun ud for at spise, og så snart han havde overstået det, gik han op på sit værelse for at arbejde videre.

Drengen blev ved med at opføre sig på den måde – lige indtil han fik sin første karakterbog med hjem.

Han kom hjem, lagde sin karakterbog på spisebordet og gik straks op på sit værelse for at arbejde. Nysgerrig gik hans mor hen for at studere karakterbogen nærmere. Drengen havde fået et stort, flot tretten-tal i matematik. Ovenud lykkelige styrtede forældrene op på deres drengs værelse.

„Var det nonnerne, der var gode lærere?“ spurgte drengens far. Drengen rystede blot på hovedet og sagde, „nej“. „Var det eneundervisningen, lærebøgerne, kammeraterne eller hvad?“ spurgte drengens far. „Nej,“ svarede drengen igen, „da jeg den første dag kom ind af hoveddøren og så den fyr, de havde hamret fast i plus-tegnet, blev jeg klar over, at de mente deres undervisning alvorligt.“



Læreanstalternes Fælleskurser

Informationsmøder

Arbejdsmarkedet råber på højtuddannede, som kan se ud over deres egen faglige horisont. Nye medarbejdere skal kunne begå sig på tværs af fagskel og trække på hinandens faglige styrker. Denne arbejdsform kræver forudsætninger, og dem giver Fælleskurserne dig. Det tværfaglige projektarbejde er Fælleskursernes bærende idé.

Kurserne kører fra september til maj, giver normalt 1/4 årsværk merit og er for overbygningsstuderende fra: Arkitektskolen, DTU, Farmaceutisk Højskole, Handelshøjskolen, Københavns Teknikum, Københavns Universitet, Landbohøskolen og RUC.

5 indgange til den tværfaglige verden

Byplankursus LFB tlf. 33 13 00 05
Informationsmøde onsdag 27. maj kl. 15.00 på Øster Voldgade 10
Årets tema er "Bæredygtig byomdannelse i Københavns Sydvestområde".

Formidlingskursus LFF tlf. 35 32 00 92 og 35 32 00 94
Informationsmøde tirsdag 19. maj kl. 15.00 på Jagtvej 155D, 1. sal
Den fulde glæde af din faglige viden får du først, når du kan formidle den letforståeligt til ikke-fagfæller.

Miljøkursus LFM tlf. 33 32 29 28
Informationsmøde onsdag 27. maj kl. 15.00 på Øster Voldgade 10
Kvaliteten af vores fødevarer er i mediernes søgelys, og årets tema er "Fødevarer – produktion, forbrug og miljø".

Projektleder- og Innovationskursus LFPI tlf. 39 17 98 70
Informationsmøde mandag 25. maj kl. 15.00 på Symbion, Fruebjergvej 3
Innovation bygger i høj grad på ledelse, samarbejde, videnskobling og nytænkning. På kurset trænes du i projektledelse og den innovative proces.

Ulandskursus LFU tlf. 33 32 29 31
Informationsmøde onsdag 27. maj kl. 15.00 på Øster Voldgade 10
Årets tema er "Naturressourcer og demokratisering i Det sydlige Afrika".