FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

13. årgang, nr. 4, maj 2000

FAMØS 13.4; maj 2000.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Peter Lund

Deadline for næste nummer:
Fredag den 22. september 2000

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 700 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Endnu engang er det blevet forår i Danmark. Solen skinner, græsset er grønt og vi ved godt at vi burde sidde og læse. For snart er semesteret slut, og skal vi til at dokumentere at vi også i dette semester har lært noget. Når eksamensræset så er overstået en gang i juni, er det i de følgende måneder helt op til en selv at holde sit fag ved lige. For at hjælpe med det har vi samlet en masse måske lidt svære opgaver sammen til dette numer, så har I om ikke andet dem at arbejde med.

En god tradition er ved at forsvinde!

Hver anden/tredie fredag i semestrene har vi de sidste mange, mange år kunnet gå til studenterkollokvium, og høre enten en studerende eller en af de ansatte fortælle en times tid om et emne vedkommende synes er interessant, på et fagligt niveau der burde være tilgængeligt for studerende fra (i hvert fald) tredie år og fremefter. De sidste par semestrere har Troels Roussau Johansen arrangeret disse kollokvier alene, men nu bliver han snart færdig. Studenterkollokvierne er en tradition vi for alt i verden ønsker bevaret (men ikke sammenblandet med FAMØS), og derfor synes vi at de er meget kritisk at der ikke er nogen til at efterfølge Troels.

I følge Troels er det nemt at få en af de ansatte til at holde et kollokvium,[1] og nu hvor der også er blevet mulighed for at erstatte de velkendte seminarforedrag på andendelen med et studenterkollokvium,[2] er der udsigt til at det også bliver nemmere at få studerende til det. Det bør således være en opgave enhver kunne påtage sig.

Hvis du også føler det vil være synd at studenterkollokvierne dør, så tag kontakt til enten Troels på e-post `troelsj@math.ku.dk` eller evt. til redaktionen.

[1] Vi har den samme erfaring i forhold til at få skrevet side 9-sætninger.

[2] Spørg din vejleder hvis du synes det lyder interessant.

Uløste/uløselige opgaver?

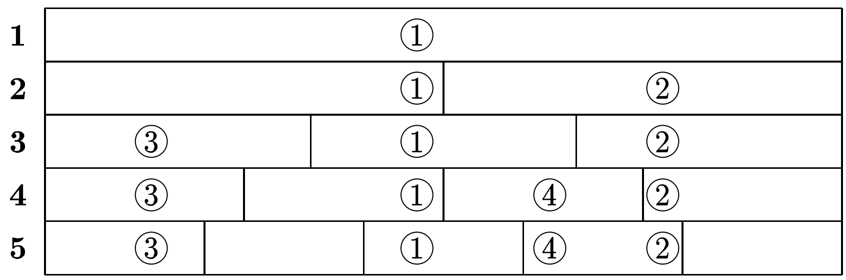
Henrik Chr. Grove

I Famøs september 1994, kunne man blandt opgaveløsningerne finde følgende:

> Det var således tæt på at jeg med ærestab måtte lære moralen: *tryk ikke små nuttede hyggeopgaver, før du har sikret dig, at du selv kan løse dem* ... Den anden og gode morale er, *at med ihærdighed løser selv et drog opgaver.*

Blandt opgaverne kunne man så finde følgende:

> Forestil dig en aflang kolonihave. I en sådan er der naturligvis en (idealistisk/uendelig tynd) flagstang. Da der bliver flere ældre?/arbejdsløse?/kolonister? deles grunden på midten til to lige store grunde, og man placerer straks en flagstang på den flagstangsløse halvdel. Senere bliver man nød til at dele grunden op i tre lige store dele, derpå i fire, fem, seks, osv. lige store dele. Nu er det din opgave for hvert trin at placere en flagstang så snedigt, at der ikke er to flagstænger der kommer til at stå på samme grund i et senere trin. Du kan f.eks. placere de fire første stænger således ...



> Sagt formalistisk: Find en følge $(x_n)_{n=1,2,3,\dots}$ således at $\forall N \forall k \leq N \exists! n \leq N : x_n \in]\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}[$
> Kan denne følge vælges uendelig, og er denne opgave overhovedet svær/værd at beskæftige sig med??? (Under henvisning til moraleafsnittet ovenfor, vil jeg afsløre, at jeg ikke har lært den første morale og stoler på den anden.)

I det følgende nummer måtte redaktøren så skrive:

> Denne opgave er tilsyneladende temmelig svær. Jeg har i hvert fald endnu ikke fundet en løsning. Min intuition siger mig, at den søgte følge af flagstænger (dvs. tal i $]0, 1[$) kan gøres vilkårelig lang. Morsomt nok sikre dette dog på ingen måde, at følgen kan gøres uendelig lang ...

Min eneste idé går på at betrage en uendelig følge af hele tal, hvor i'te tal skal angive nummeret på den grund, som mangler en flagstang efter i'te opdeling. Formålet med dette er at gøre et „overtælligt“ problem „tælleligt“. Dette har dog indtil videre ikke givet noget resultat. Opgaven får således lov til at køre videre ...

Opgaven kører såmænd endnu ... Siden da, har vi på redaktionen gjort meget ud af den første morale, men det er alligevel gået galt et par gange. I FAMØS marts 1996, stillede Kennie Nybo Mortensen de tre følgende opgaver:

Første opgave: Lad A være en delmængde af et topologisk rum, og lad A^-, A^c betegne hhv. afslutningen af A og komplementet til A. Vis, at $A^{-c-} = A^{-c-c-c-}$. Det er en meget rar regneregel

Anden opgave: Givet en mængde A i et topologisk rum. Bestem det maksimale antal forskellige mængder man kan få ved at anvende operationerne $^-$ og ^{c} gentagne gange på A. (Vink: Brug første opgave).

Tredie opgave: Find en mængde i $\mathbb{R}$ der realiserer antallet af mængder i sidste opgave.

Vi har aldrig bragt en løsning til disse tre opgaver.
I marts 1998 stillede Asger Grunnet to opgaver der lød:

Opgave Lad p være et komplekst polynomium i to variable. Antag at en kompleks funktion opfylder :

$$f(x)f(y) = f(p(x, y)), x, y \in \mathbb{C}$$

Vis at der findes et komplekst tal $c \in \mathbb{C}$, så funktionen $g(x) = f(x - c)$ opfylder enten :

$$g(x)g(y) = g(\alpha xy)$$

for et $\alpha \in \mathbb{C}$, eller

$$g(x)g(y) = g(x + y)$$

Vink: Del op i to tilfælde efter om f har et nulpunkt eller ej.
Opgave Lad a være et helt positivt tal forskellige fra 1,2 og 4. Find samtlige tal $n \in \mathbb{N}$, så $n(n + a)$ er et kvadrattal.
Vink: (*Advarsel.* Hvis du læser dette vink, bliver opgaven en hel del lettere!) Skriv $a = bcd$ med $c > d$ og $c - d$ lige. Vis at $n = b(\frac{c-d}{2})^2$ er en løsning, og at alle løsninger er på denne form.

Disse opgaver er heller aldrig blevet løst, men det skal dog retfærdigvis siges at det er generalisering af to opgaver fra det foregående nummer, hvortil der blev bragt løsninger i samme nummer som disse opgaver blev stillet.

Vi har også prøvet at trykke opgaver fundet på nettet sammen med løsninger, for så da vi skulle bringe løsningen at konstatere at den eller selve opgaven var direkte forkert.[1] Et eksempel er følgende opgave (der første gang blev stillet i maj 1998):

[1]Vi har også lappet på mangelfulde løsninger.

Betragt en pyramide konstrueret af lige store kuber, sådan at den kvadratiske grundflade består af n^2 kuber, det næste lag består af $(n-1)^2$ kuber, og så videre indtil toppen der består af en enkelt kube. Antag, at man kan tage alle disse kuber og lægge dem så de former et kvadrat. Vis, at da er enten $n = 1$ eller $n = 4900$.
Vink: En pyramide konstrueret på den måde vil bestå af $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ kuber.

I nummeret efter gjorde vi så opmærksom på at $n = 4900$ *ikke* er en løsning, og spurgte så hvilke(t) andre/andet tal end $n = 1$ der gav en løsning. Vi gav tilmed som vink at de 4900 ikke var et fuldstændig tilfældigt tal.

I den helt pinlige ende ligger der en ganske nem opgave, vi bare aldrig har bragt løsningen til, nemlig følgende lille sag fra marts 1998:

Hvis man differentiere x^2 ved vi alle, at man får $2x$, men hvad sker der så her:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = \left(\sum_{i=1}^{x} x\right)' = \sum_{i=1}^{x}(x)' = \sum_{i=1}^{x} 1 = x \cdot 1 = x$$

Endelig præsterede vi i decembernummeret sidste år, i ukoordineret samarbejde at stille to opgaver vi ikke havde løsninger til. For fuldstændighedens skyld skal de også gentages her.

Opgave 1

Et tal $h \in]0,1]$ kaldes (i denne opgave) for en vandret afstand, hvis der for alle kontinuerte funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, med $f(0) = f(1)$, findes et $x \in [0, 1-h]$ så $f(x) = f(x+h)$. Vis at hvis h er en vandret afstand, så er $h = \frac{1}{n}$ for et naturligt tal n.

Opgave 2

Tegn en trekant. Tegn et kvadrat på hver af siderne (så det vender væk fra trekanten og har siden som side, ja). Marker hvert af kvadraternes midtpunkter. Tegn streger fra hvert af de netop markerede punkter til trekantens modstående hjørnepunkt. Vis at de tre streger, du lige har tegnet, skærer hinanden i samme punkt.

Og hvad er så pointen?

Nu har vi fundet en masse opgaver fra de sidste 5 år, som vi ikke har bragt løsninger til (og som måske slet ikke kan løses?). Måske burde vi bare have ladet opgaverne hvile i fred, der er sikkert alligevel ingen der kan huske dem(?), men vi vil jo gerne se løsninger.

Derudover har vi et par opgaver uden færdige løsninger, vi gerne vil stille, så derfor starter vi nu med de opgaver der allerede har været stillet. Hvis der er en opgave du har tænkt over, og måske en delvis løsning til er du meget velkommen til at sende den til os på e-post `famos@math.ku.dk`.

Eftersom der forhåbentlig sidder nogen derude der har forsøgt sig med alle disse opgaver, vil vi alligevel stille en ny i kategorien.

Opgave $\aleph_2$

Når du står ved bankens dankortautomat, og skal indtaste sin pin-kode indtaster man 4 cifre hvorefter automaten kontrollerer om koden passer. Hvis man har tastet rigtigt er alt fint, men ellers må man indtaste alle 4 cifre endnu engang. Det giver i værste fald 40000 cifre hvis man skal være sikker på at ramme koden — men kortet inddrages allerede efter tre forkerte forsøg.

På et nærliggende kollegium har man et elektronisk adgangssystem der også er baseret på 4-cifrede koder, men det fungerer alligevel lidt anderledes. Her kontrollerer systemet efter hver indtastning af et ciffer (på nær efter de tre første), med andre ord: Hvis man indtaster 12345 og koden er 2345, bliver man lukket ind. Opgaven er nu hvor man cifre kan man i værste fald skulle indtaste for at komme ind, hvis man har glemt koden?

Vi har en idé til hvordan opgaven kan angribes, men ikke en færdig løsning. Vi håber i første omgang på at en vores læsere kan finde løsningen, som vi meget gerne bringer, ellers trykker vi lidt om vores (eller dine) ideer, og ser om det hjælper.

Kunsten at studere — En håndbog i studieteknik

Anmeldt af Henrik Chr. Grove

Teknisk forlag har udgivet en bog om studieteknik. Bogen er skrevet af Thomas Harboe og Jakob Ravn, der har læst på henholdsvis Handelshøjskolen i København og filosofi på Københavns Universitet.

Bogen har et udmærket forord af Jakob Lange, der blandt meget andet er kontorchef på Københavns Universitet.

Bogen udmærker sig ved ikke at fokusere på nogen bestemt(e) teknik(ker) eller emner, men dækker i stedet temmelig bredt. Der er kapitler om alt fra studiestart til projektarbejde. Man kan diskutere kapitlernes rækkefølge, der er et vist system i det, til gengæld er kapitlet om skrivning, som er et af af bedste og vigtigste, først blevet nummer 7.

Bogens største svaghed, fra en matematikers synspunkt, er at de to forfatter ikke har læst naturvidenskab, og åbenbart heller ikke har nogen videre indsigt i de forskelle der er mellem deres fag, og de meget teoretiske fag vi har på naturvidenskab.

Der er således mange råd der ikke virker rimelige, og helt absurd bliver det i afsnittet om skriftlige eksamener, hvor de i en liste over gode råd skriver:

> Lav en brainstorm på kladdepapir. Brug tid til at disponere stoffet og lav en tidsplan for resten af forløbet. Ved en fem-timers skriftlig eksamen kan disse indledende overvejelser godt tage de første 45 minutter.

Fra redaktionens side vil vi gerne advare mod at gøre dette til en skriftlig eksamen i matematik, men samtidig kunne det være interessant at se resultatet af en brainstorm over 2AN-opgavesættet.

Lige ovenover råder de dog til at gennemlæse hele eksamenssættet inden man går i gang, og det må stadig siges at være en godt råd. Vi kan for egen regning tilføje at det er en rigtig god ide at *skrive* sig igennem matematikbøger i stedet for blot at *læse* dem. Dvs. at man altid skal have papir og blyant (eller fyldepen) ved hånden når man læser matematik.

Bogen er generelt velskrevet, men dog med temmelig mange trykfejl.

Om der findes bedre bøger for en matematiker, ved vi desværre ikke noget om på redaktionen, men hvis man bare tænker sig om og bevarer en kritisk sans, kan bogen nok godt bruges. Bl.a. afsnittet om studiestart må dog siges primært at henvende sig studerende på de første år af studiet, men det er nok også dem der har mest brug for at lære at studere. Ud over de bøger der er nævnt i den, i øvrigt glimrende (kommenterede!) litteraturliste, vil vi gerne anbefale Lotte Rieneckers „Tekster til Tiden“. Det er nok den bedste bog på dansk om selve skrivningen og skriveprocessen. Det handler ikke kun om store projekter, specialer og artikler, men også om de tekster man dagligt arbejder med i tilegnelsen af sit studies stof.

Vi vil gerne slutte af med at henvise til vores meget dygtige studievejledere, som for de matematiske fag og datalogi er Merete Grove Jacobsen og Jakob Bruhns, som i dette semester (som godt nok snart slutter) kan træffes på Øster Voldgade 3:

- Mandag 12–15 (Merete)
- Onsdag 12–15 (Merete og Jakob)
- Torsdag 12–15 (Jakob)
- Fredag 12-15 (Merete og/eller Jakob)

Merete kan desuden træffes i lynvejledningen på HCØ torsdag 10–11.30, og Jakob kan træffes i lynvejledningen på DIKU mandag 10–11.30.
De aktuelle træffetider findes på `http://www.nat.ku.dk/nat-nsv/tider.html`.

Litteraturliste

[1] Harboe, Thomas og Jakob Ravn. *Kunsten at studere - en håndbog i studieteknik.* Teknisk Forlag, København, 1. udgave, 2000.

[2] Rienecker, Lotte. *Tekster til Tiden.* Dansk Psykologisk Forlag, 2. udgave, 1996.

Reelle divisionsalgebraer og Hopf invarianten

Kasper K. S. Andersen, Matematisk Afdeling

Indledning

Alle kender vel de reelle tal $\mathbb{R}$ og de komplekse tal $\mathbb{C}$. Disse er begge eksempler på endeligt-dimensionale reelle divisionsalgebraer:

Definition 1. *En reel algebra er et reelt vektorrum $\mathcal{A}$ udstyret med en bilineær afbildning $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Vi skriver $\mu(x, y) = x \cdot y$ og kalder μ for multiplikationen på $\mathcal{A}$. Vores krav til μ er altså:*

1. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ *og* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
2. $(rx) \cdot y = x \cdot (ry) = r(x \cdot y)$

for alle $x, y, z \in \mathcal{A}$ og alle $r \in \mathbb{R}$. Vi siger at $\mathcal{A}$ er endeligt-dimensional hvis vektorrumsdimensionen $\dim \mathcal{A}$ *er endelig. Algebraen $\mathcal{A}$ siges at være en divisionsalgebra hvis der for alle $a, b \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$, findes entydige løsninger $x, y \in \mathcal{A}$ til ligningerne $ax = b$ og $ya = b$ (kort sagt, vi kan dividere med a fra både venstre og højre). Når $\mathcal{A}$ er endeligt-dimensional er dette ækvivalent med at $x \cdot y \neq 0$ for $x, y \neq 0$.*

Både $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ og $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ er som sagt eksempler på endeligt-dimensionale reelle divisionsalgebraer. De er desuden begge *associative* (dvs. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ for $x, y, z \in \mathcal{A}$), *kommutative* (dvs. $x \cdot y = y \cdot x$ for $x, y \in \mathcal{A}$) og har *enhed* (dvs. et element $e \in \mathcal{A}$ med $e \cdot x = x \cdot e = x$ for alle $x \in \mathcal{A}$).

Endnu et eksempel er følgende: Sæt $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ som reelt vektorrum, men med multiplikationen $z \cdot w = \overline{zw}$. Dette er også en endeligt-dimensional reel divisionsalgebra, der desuden er kommutativ, men den er ikke associativ og den har heller ingen enhed (check det selv!).

Et andet mere velkendt og interessant eksempel er kvaternionerne $\mathbb{H}$, der opfylder $\dim \mathbb{H} = 4$. Disse blev (gen)opdaget af ireren Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) under en gåtur i 1843. Faktisk blev han så begejstret over sin opdagelse at han på stedet ridsede den fundamentale formel for multiplikation af kvaternioner i en sten på Brougham Bridge i Dublin (hvortil han var nået på sin tur). Den dag i dag findes en mindetavle ved broen; den var dog desværre overmalet med graffiti i 1991 da jeg besøgte den.

Endnu et eksempel er okternionerne $\mathbb{O}$ (også kendt som Cayleytallene eller bikvaternionerne), som opfylder $\dim \mathbb{O} = 8$. Disse blev opdaget af Graves i 1843 kun to måneder efter Hamiltons opdagelse af kvaternionerne og senere genopdaget i 1845 af Cayley.

Jeg vil ikke her fordybe mig for meget i historien bag disse eksempler, men blot henvise til [5]. Det skal dog nævnes at Hamilton opdagede kvaternionerne under et livslangt og forgæves forsøg på at finde en 3-dimensional reel divisonsalgebra. Vi vil her i denne artikel vise følgende resultat der forklarer hvorfor det ikke lykkedes ham:

Sætning 2. *Hvis* $\mathcal{A}$ *er en endeligt-dimensional reel divisionsalgebra gælder* $\dim \mathcal{A} = 1, 2, 4$ *eller* 8.

Dette resultat skyldes Bott og Milnor og uafhængigt af dem Kervaire i 1958. Før dette havde Hopf i 1940 vist at dimensionen måtte være en potens af 2. Karakteristisk for disse beviser er at de alle på essentiel måde bruger metoder fra den disciplin der kaldes *algebraisk topologi*, hvilket måske kan være overraskende da problemet virker som et rent algebraisk problem. Det er da også muligt at vise svagere udgaver af sætningen udelukkende ved algebraiske metoder, men de kræver alle yderligere antagelser om multiplikationen på $\mathcal{A}$, f.eks. at $\mathcal{A}$ er associativ.

Lidt topologi

Før vi kan gå igang med at vise Sætning 2 har vi brug for nogle topologiske konstruktioner. Lad $(Z, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og lad $\sim$ være en ækvivalensrelation på Z. Fra 3GT noterne afsnit 2.4.3 haves da kvotientrummet $(Z/\!\sim, \mathcal{T}_\sim)$, dette skriver vi blot som $Z/\!\sim$. Hvis $z \in Z$ betegnes det tilhørende element i $Z/\!\sim$ med $[z]$. Hvis $(Z_1, \mathcal{T}_1)$ og $(Z_2, \mathcal{T}_2)$ er topologiske rum, så er det ikke svært at gøre den disjunkte forening $Z_1 \amalg Z_2$ til et topologisk rum sådan at delrumstopologien på Z_i er $\mathcal{T}_i$ for $i = 1, 2$.

Lad X være et topologisk rum X, og lad $I = [0, 1]$ betegne enhedsintervallet. *Suspensionen* ΣX er da defineret som kvotientrummet $(X \times I)/\!\sim$, hvor ækvivalensrelationen $\sim$ er defineret ved $(x, 0) \sim (x', 0)$ og $(x, 1) \sim (x', 1)$ for $x, x' \in X$. Geometrisk er ΣX en cylinder over X (nemlig $X \times I$) med hver ende trykket sammen til et punkt (dette er netop ækvivalensrelationen $\sim$). Lad

$$S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \ldots x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

betegne enhedskugleskallen i $\mathbb{R}^{n+1}$. Så er ΣS^n homeomorf med S^{n+1} via homeomorfien $[(x, t)] \mapsto (\sin(\pi t)x, \cos(\pi t))$. For $n = 1$ kan man tænke på at to (tomme!) kræmmerhuse sat oven på hinanden er det samme som en kugleskal.

Lad nu $f : X \to Y$ være en kontinuert afbildning mellem topologiske rum. Da induceres en kontinuert afbildning $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ givet ved $(\Sigma f)([(x, t)]) = [(f(x), t)]$. Vi kan også danne *afbildningskeglen* C_f, der er defineret som kvotientrummet $((X \times I) \amalg Y)/\!\sim$, hvor ækvivalensrelationen $\sim$ er givet ved $(x, 0) \sim f(x)$ og $(x, 1) \sim (x', 1)$ for $x, x' \in X$. Man kan tænke på afbildningskeglen som cylinderen $X \times I$, hvor den ene ende er klæbet sammen med Y (via $(x, 0) \sim f(x)$) og hvor den anden ende er trykket sammen til et punkt (via $(x, 1) \sim (x', 1)$). Vi har en oplagt kontinuert afbildning $g : Y \to C_f$ givet ved $g(y) = [y]$, vi sender blot Y i Y-delen af C_f. Vi har desuden en kontinuert afbildning $h : C_f \to \Sigma X$ givet ved $h([(x, t)]) = [(x, t)]$ og $h([y]) = [(x_0, 0)]$, hvor $x_0 \in X$ er vilkårlig (det er let at se at dette er veldefineret). Denne afbildning trykker blot Y-delen af C_f sammen til et punkt, hvorved vi præcis får ΣX.

Samlet haves altså for enhver kontinuert afbildning $f : X \to Y$ afbildningsfølgen:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} C_f \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y. \tag{1}$$

K-teori

Vi mangler stadig hovedingrediensen i beviset: Et stærkt redskab fra algebraisk topologi, nemlig den kontravariante funktor $\widetilde{K}$: Top $\to$ Rng. Og hvad skal dette så betyde? Jo, mere præcist består $\widetilde{K}$ af to dele: For det første, hver gang vi har et topologisk rum X knytter vi en ring $\widetilde{K}(X)$ til det. For det andet, hver gang vi har en kontinuert afbildning $f : X \to Y$ mellem to topologiske rum knytter vi en ringhomomorfi $\widetilde{K}(f) : \widetilde{K}(X) \leftarrow \widetilde{K}(Y)$ til den. På diagram form ser det ud som følger:

$$\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \xmapsto{\widetilde{K}} \left(\widetilde{K}(X) \xleftarrow{\widetilde{K}(f)} \widetilde{K}(Y)\right)$$

Bemærk at $\widetilde{K}$ vender pilen f, dette er grunden til at funktoren kaldes *kontra*variant.

For en god ordens skyld skal det lige bemærkes at de ringe vi her betragter ikke nødvendigvis har et enhedselement (i modsætning til definitionen på Matematik 2AL). De er dog alle kommutative. De egenskaber om $\widetilde{K}$ vi skal bruge er samlet i følgende sætning, hvis bevis f.eks. kan findes i [6]:

Sætning 3. *Der findes en kontravariant funktor $\widetilde{K}$: Top $\to$ Rng med følgende egenskaber:*

1. *For en kontinuert afbildning $f : X \to Y$ giver afbildningsfølgen (1) en følge af ringe og ringhomomorfier:*

$$\widetilde{K}(X) \xleftarrow{\widetilde{K}(f)} \widetilde{K}(Y) \xleftarrow{\widetilde{K}(g)} \widetilde{K}(C_f) \xleftarrow{\widetilde{K}(h)} \widetilde{K}(\Sigma X) \xleftarrow{\widetilde{K}(\Sigma f)} \widetilde{K}(\Sigma Y).$$

   Denne følge er eksakt, dvs. at på en given plads i følgen er billedet for den indgående homomorfi lig kernen for den udgående homomorfi.

2. *For hvert $k \in \mathbb{N}$ findes en ringhomomorfi $\Psi^k : \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$, sådan at der for $k, l \in \mathbb{N}$ gælder $\Psi^k \circ \Psi^l = \Psi^l \circ \Psi^k$. Disse afbildninger er naturlige: For en kontinuert afbildning $f : X \to Y$ haves et kommutativt diagram:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{K}(X) \arrow[d, "\Psi^k"'] & \widetilde{K}(Y) \arrow[l, "\widetilde{K}(f)"'] \arrow[d, "\Psi^k"] \\ \widetilde{K}(X) & \widetilde{K}(Y) \arrow[l, "\widetilde{K}(f)"'] \end{tikzcd}$$

   dvs. vi har $\Psi^k \circ \widetilde{K}(f) = \widetilde{K}(f) \circ \Psi^k$.

3. *Hvis $n \in \mathbb{N}$ er ulige, så gælder $\widetilde{K}(S^n) = 0$. Hvis $n \in \mathbb{N}$ er lige, så er $\widetilde{K}(S^n)$ isomorf med $\mathbb{Z}$ som abelsk gruppe, og vi betegner en frembringer med β_n (så ethvert element kan skrives som $x\beta_n$ for $x \in \mathbb{Z}$). De er dog ikke isomorfe som ringe, der gælder nemlig $\beta_n^2 = 0$. Afbildningerne Ψ^k er bestemt ved formlen $\Psi^k(\beta_n) = k^{n/2}\beta_n$.*

4. *Der findes en lineær afbildning* $\lambda_2 : \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$ *sådan at* $\Psi^2(x) = x^2 - 2\lambda_2(x)$ *for* $x \in \widetilde{K}(X)$.

Hopf invariant problemet

Lad i det følgende $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, og betragt en kontinuert afbildning $f : S^{2n-1} \to S^n$. Afbildningsfølgen for denne bliver:

$$S^{2n-1} \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{g} C_f \xrightarrow{h} S^{2n} \xrightarrow{\Sigma f} S^{n+1},$$

idet vi husker at ΣS^m er homeomorf med S^{m+1}. Ifølge Sætning 3 del 1 og del 3 giver dette en eksakt følge af ringe og ringhomomorfier:

$$0 = \widetilde{K}(S^{2n-1}) \xleftarrow{\widetilde{K}(f)} \widetilde{K}(S^n) \xleftarrow{\widetilde{K}(g)} \widetilde{K}(C_f) \xleftarrow{\widetilde{K}(h)} \widetilde{K}(S^{2n}) \xleftarrow{\widetilde{K}(\Sigma f)} \widetilde{K}(S^{n+1}).$$

Lemma 4. *Vi har* $\widetilde{K}(\Sigma f) = 0$.

Bevis. Hvis $n+1$ er ulige er dette klart da $\widetilde{K}(S^{n+1}) = 0$. Antag nu at $n+1$ er lige. Vi har så at både $\widetilde{K}(S^{2n})$ og $\widetilde{K}(S^{n+1})$ er isomorfe med $\mathbb{Z}$ som abelske grupper, frembragt af hhv. β_{2n} og β_{n+1}. Derfor findes $x \in \mathbb{Z}$ så $\widetilde{K}(\Sigma f)(\beta_{n+1}) = x\beta_{2n}$. Lad nu $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ være vilkårlig. Fra Sætning 3 del 2 ved vi at der gælder $\Psi^k \circ \widetilde{K}(\Sigma f) = \widetilde{K}(\Sigma f) \circ \Psi^k$. Anvendes dette på β_{n+1} fås

$$\Psi^k \left(\widetilde{K}(\Sigma f)\left(\beta_{n+1}\right) \right) = \Psi^k\left(x\beta_{2n}\right) = x\Psi^k(\beta_{2n}) = xk^n\beta_{2n},$$

$$\widetilde{K}(\Sigma f)\left(\Psi^k\left(\beta_{n+1}\right)\right) = \widetilde{K}(\Sigma f)\left(k^{\frac{n+1}{2}}\beta_{n+1}\right) = xk^{\frac{n+1}{2}}\beta_{2n}$$

idet Ψ^k og $\widetilde{K}(\Sigma f)$ er ringhomomorfier. Da disse to udtryk skal stemme overens og $\widetilde{K}(S^{2n}) \cong \mathbb{Z}$ fås $xk^n = xk^{\frac{n+1}{2}}$. Dermed er $x = 0$ da $k, n > 1$, så $\widetilde{K}(\Sigma f)(\beta_{n+1}) = 0$. Idet β_{n+1} frembringer $\widetilde{K}(S^{n+1})$ er lemmaet bevist. □

Skrives $\varphi = \widetilde{K}(g)$ og $\sigma = \widetilde{K}(h)$ fås altså en eksakt følge:

$$0 \longleftarrow \widetilde{K}(S^n) \xleftarrow{\varphi} \widetilde{K}(C_f) \xleftarrow{\sigma} \widetilde{K}(S^{2n}) \longleftarrow 0. \tag{2}$$

Vi ser at φ er surjektiv, så hvis n er et lige tal kan vi vælge $a \in \widetilde{K}(C_f)$ sådan at $\varphi(a) = \beta_n$. Hvis n er ulige sættes blot $a = 0$ i $\widetilde{K}(C_f)$. Definer desuden $b = \sigma(\beta_{2n})$, da σ er injektiv ses $b \neq 0$. Vi får let $\varphi(a^2) = 0$ (husk at $\beta_n^2 = 0$ for n lige), så da følgen (2) er eksakt findes et $h \in \mathbb{Z}$ med $a^2 = hb$. Hvis n er lige er valget af a ikke entydigt. Man kan dog vise (ren algebra, prøv selv!) at $b^2 = 0$ og $ab = 0$, hvoraf det følger at værdien af h er veldefineret.

Tallet h kaldes *Hopf invarianten* af f. Vi viser nu artiklens hovedresultat:

Sætning 5. *Hvis Hopf invarianten* h *er ulige, så gælder* $n = 2, 4$ *eller* 8.

Sætningen blev først vist i 1960 af Adams [1], der dog havde annonceret resultatet allerede i 1958. Beviset er langt (85 sider) og involverer den til lejligheden konstruerede Adams spektralfølge.

Beviset vi giver her skyldes studiekammeraterne Adams og Atiyah [1] [2]. Hopf invariant problemet er et rent topologisk problem. Ydermere er det en generalisering af problemet om divisionsalgebraer, vi viser nemlig i næste afnit at Sætning 5 medfører Sætning 2.

Bevis. Hvis n er ulige er $a = 0$, og dermed er $h = 0$. Lad derfor $n = 2m$ være lige. Da følgen (2) er eksakt kan vi skrive ethvert element i $\widetilde{K}(C_f)$ som $xa + yb$ for entydigt bestemte $x, y \in \mathbb{Z}$. For $k \in \mathbb{N}$ fås $\varphi\left(\Psi^k(a)\right) = \Psi^k(\beta_n) = k^m \beta_n$, der findes dermed $q_k \in \mathbb{Z}$ med $\Psi^k(a) = k^m a + q_k b$. Desuden ses at $\Psi^k(b) = k^n b$. Skriv nu $\lambda_2(a) = xa + yb$. Fra Sætning 3 del 4 ved vi at $\Psi^2(a) = a^2 - 2\lambda_2(a)$, hvoraf vi ser at $2^m a + q_2 b = -2xa + (h - 2y)b$. Derfor er $q_2 = h - 2y$ ulige.

Vi har desuden $\Psi^2 \circ \Psi^k = \Psi^k \circ \Psi^2$. Anvendes dette på a fås:

$$\Psi^2\left(\Psi^k(a)\right) = \Psi^2\left(k^m a + q_k b\right) = k^m(2^m a + q_2 b) + q_k 2^n b,$$

$$\Psi^k\left(\Psi^2(a)\right) = \Psi^k\left(2^m a + q_2 b\right) = 2^m(k^m a + q_k b) + q_2 k^n b.$$

Da disse udtryk skal stemme overens fås derfor (husk at $n = 2m$):

$$k^m(k^m - 1)q_2 = 2^m(2^m - 1)q_k.$$

Lad nu k være ulige. Da 2^m er en divisor i højresiden og både k^m og q_2 er ulige ses $2^m \mid k^m - 1$. Dette betyder at $[k]^m = [1]$ i den multiplikative gruppe $(\mathbb{Z}/2^m)^*$. Dermed er ordenen af $[k]$ en divisor i m. For $k = 5$ kan denne orden let beregnes:

Lemma 6. *For $m \geq 3$ gælder $5^{2^{m-3}} \equiv 1 + 2^{m-1} \pmod{2^m}$. Specielt er ordenen af $[5]$ i den multiplikative gruppe $(\mathbb{Z}/2^m)^*$ lig 2^{m-2} for $m \geq 3$.*

Bevis. Den første del ses let ved induktion efter m, se eventuelt [3, chap. VII, §2, 4, Lemme 3, p. 73]. Ved at kvadrere begge sider fås for $m \geq 3$ at

$$5^{2^{m-2}} = \left(5^{2^{m-3}}\right)^2 \equiv \left(1 + 2^{m-1}\right)^2 = 1 + 2^m + 2^{2m-2} \equiv 1 \pmod{2^m},$$

så ordenen af $[5]$ er en divisor i 2^{m-2}. Omvendt viser den første del også at ordenen ikke er en divisor i 2^{m-3}. $\square$

Vi kan nu afslutte beviset for Sætning 5. Vi har altså fra lemmaet, at hvis $m \geq 3$ gælder $2^{m-2} \mid m$. For $m \geq 5$ gælder dog $2^{m-2} > m$, hvilket er en modstrid. Vi har derfor $m \leq 4$. Udsagnet $2^{m-2} \mid m$ gælder dog heller ikke for $m = 3$, så vi får $m = 1, 2$ eller 4, svarende til $n = 2, 4$ eller 8. $\square$

[1] Sir Michael Atiyah er en af de få matematikere der er blevet adlet for sine bedrifter! Han fik Fields medaljen i 1966.

Afslutning

Vi kan nu endelig bevise Sætning 2. Lad altså $\mathcal{A}$ være en endeligt-dimensional reel divisionalgebra, og sæt $n = \dim \mathcal{A}$. Hvis $n = 1$ er vi færdige, så vi kan antage $n > 1$. Vælges en basis kan vi identificere $\mathcal{A}$ med $\mathbb{R}^n$. Da multiplikationen μ er bilineær bliver μ kontinuert opfattet som afbildning $\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Da $\mathcal{A}$ er en divisionsalgebra gælder $\mu(x, y) = x \cdot y \neq 0$ når $x \neq 0$ og $y \neq 0$. Specielt fås en kontinuert afbildning $f : S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{|x \cdot y|}$, givet ved normering af $x \cdot y$.

Vi definerer nu en kontinuert afbildning $H(f) : S^{2n-1} \to S^n$ som følger. Lad $z = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in S^{2n-1}$ være givet. Det er nu muligt at finde t, $0 \leq t \leq 1$, og $x, y \in S^{n-1}$ med $(a_1, \ldots, a_n) = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) x$ og $(b_1, \ldots, b_n) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) y$. Elementet t er altid entydigt defineret, og hvis $t \neq 0, 1$ bliver også x og y entydige. I alle tilfælde ses dog at $H(f)(z) = (\sin(\pi t) f(x, y), \cos(\pi t))$ er veldefineret. Dette giver den ønskede (kontinuerte!) funktion $H(f)$ kaldet Hopf konstruktionen af f.

Det er muligt at udregne Hopf invarianten af $H(f)$ som følger: Lad $x_0, y_0 \in S^{n-1}$ være vilkårlige. Vi har nu afbildningerne $g_1(y) = f(x_0, y)$ og $g_2(x) = f(x, y_0)$, der begge er kontinuerte afbildninger af S^{n-1} ind i sig selv. Til enhver kontinuert afbildning $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ kan tilknyttes en *grad* (se f.eks. [4, IV.6.8]). For $n = 2$ er graden blot omløbstallet af $g : S^1 \to S^1$. Man kan så vise (se f.eks. [6, 15.3.5]) at Hopfinvarianten af $H(f)$ er produktet af graderne for de to afbildninger g_1 og g_2 ovenfor.

I vores tilfælde stammer f fra den bilineære multiplikation μ, så vi har $f(x, -y) = f(-x, y) = -f(x, y)$ for alle $x, y \in S^{n-1}$. Vi har så $g_1(-y) = f(x_0, -y) = -f(x_0, y) = -g_1(y)$. Heraf fås så at graden af g_1 er ulige ifølge [4, IV.20.6]. Tilsvarende ses at graden af g_2 er ulige. Dermed er Hopfinvarianten af $H(f)$ også ulige og Sætning 5 giver nu at $n = 2, 4$ eller 8, som ønsket! □

Af andre konsekvenser af Sætning 5 kan nævnes at S^n opfattet som differentiabel mangfoldighed er parallelliserbar netop hvis $n = 1, 3$ eller 7. Dette gælder endda også hvis S^n har en eksotisk differentiabel struktur, eksistensen af sådanne blev vist af Milnor i 1956. Mere generelt kan man faktisk ved hjælp af K-teori (igen et resultat af Adams! [2]) præcis bestemme det maksimale antal af lineært uafhængige vektorfelter på S^n. For $n = 2$ fås det klassiske resultat at der ikke findes et intetstedsforsvindende vektorfelt på S^2, man kan ikke "frisere" et pindsvin.

Litteraturliste

[1] J. F. Adams. On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math. (2)*, 72:20–104, 1960.

[2] J. F. Adams and M. F. Atiyah. K-theory and the Hopf invariant. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 17:31–38, 1966.

[2] Udover sine matematiske præstationer var Adams også kendt for at være uhyre adræt. Han kunne efter sigende bevæge sig rundt om bordpladen (ikke den vej I tror!) på et bord uden at røre gulvet!

[3] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. XIV. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II: Algèbre. Chapitre VI: Groupes et corps ordonnés. Chapitre VII: Modules sur les anneaux principaux.* Hermann et Cie, Paris, 1952. Actualités Sci. Ind., no. 1179.

[4] Glen E. Bredon. *Topology and geometry.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[5] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, and R. Remmert. *Numbers.* Springer-Verlag, New York, 1990. With an introduction by K. Lamotke, Translated from the second German edition by H. L. S. Orde, Translation edited and with a preface by J. H. Ewing, Readings in Mathematics.

[6] Dale Husemoller. *Fibre bundles.* Springer-Verlag, New York, third edition, 1994.

Ny undervisning på 2.delen?

Mikkel Øbro, studenterrepræsentant i Studienævnet for Matematiske Fag og i Matematisk Afdelings bestyrelse, samt suppleant til fakultetsrådet.

Undervisningen på kandidatuddannelsen i matematik er i mine øjne langt fra optimal. Der har længe været problemer, og man kan vel kun bebrejde sig selv at der ikke er skredet til handling før nu. Men i de ansvarlige kollegiale organer har vi desværre en udpræget tendens til at *reagere* frem for at *agere*.

Reaktion er dog denne gang nødvendig. Der er nye besparelser på vej, og det tvinger os til at tænke igennem, hvad vi kan undvære, og hvad vi vil beholde, og måske er tiden inde til ikke blot at prioritere, men også nytænke.

Mit sigte i denne artikel er - som før antydet - undervisningen på overbygningen. Jeg vil redegøre for de problemer jeg mener at kunne se i den nuværende, og til sidst fremlægge et forslag til omlægninger.

Dyrt og urentabelt

På fakultetsrådsniveau rynker man på næsen af vores overbygning. For dér er man begyndt at tænke i virksomhedsmetaforer, når man skal rise og rose de enkelte fag og institutter. Overbygningen på matematik bliver kritiseret for at være alt for dyr og urentabel. For mange penge bruges på for få studerende.

Og man er tilbøjelig til at nikke med. Især når man ved at forelæserne får nogenlunde samme antal undervisningstimer for et n-punkters 2.dels kursus som for et n-punkters 1.dels kursus. At afholde et n-punkters overbygningskursus udløser $15 \cdot 5 \cdot n$ timers undervisning (Mat 1 honoreres med $15 \cdot 7 \cdot n$, og resten af 1.dels kurserne med $15 \cdot 6 \cdot n$). Det første tal er antallet af uger i semesteret, og idet der som regel afholdes n forelæsninger i et n-punkters kursus, så betyder det at der er $5 - 1 = 4$ forberedelsestimer til hver forelæsning! Her skal det indskydes at de 4 forberedelsestimer er med alt inklusiv, altså litteratursøgning, tilrettelæggelse af kurset, opgaveretning, noteskrivning, osv. Derudover må det understreges at det er 4 almindelige arbejdstimer, og således ikke 4 effektive timer. Hvad man f.eks. kan præstere til en 4-timers eksamen kan man ikke præstere $2 \cdot 5$ gange om ugen uden at være nedslidt efter den første måned. Men med de forbehold in mente kan man skrive sig de 4 forberedelsestimer pr. forelæsningstime bag øret.

Hvor er 5-kurserne?

Alle, der har kigget i det gule hæfte over udbudte 2.dels kurser, ved at det nuværende udbud er minimalt. Der udbydes omtrent 24 kursuspunkter hvert semester. Det har nogle uheldige konsekvenser, som vi studerende ikke kan være tilfredse med: Dels er der i sagens natur ikke megen bredde i udvalget. Og dels umuliggør det sparsomme udbud en dybde, i den forstand at den overvejende del af kurserne er indledende kandidatkurser. Populært sagt hedder kurserne alle 4HA, 4AN, 4GE, og 5-kurserne dukker kun op i ny og næ.

Men kan det være anderledes, når studenterbestanden er så lav? Så længe antallet af 2.dels studerende er som nu, så kan det ikke betale sig at udbyde flere kurser. I hvert fald hvis man med „kurser“ mener kurser i den nuværende forstand.

Læsekursernes status

Når man nu skal kigge langt efter 5-kurserne, så er læsekurserne efter min mening retfærdiggørelsen af vores kandidatuddannelse. Hvordan skulle man ellers nå dybere ind i et emne? Og dog mener mange at læsekurser er en umådelig luksus, som vi ikke kan tillade os. Et læsekursus er personlig undervisning, og den slags er dyr, alt for dyr. Siger man.

Lad os et øjeblik iføre os fakultetsrådets briller og anskue problemstillingen økonomisk. Vejledning, det være sig til projekter eller til læsekurser, udløser 10 timer pr. kursuspunkt alt inklusiv. Altså, hvis tre studerende har et to punkters læsekursus, så udløser det $10 \cdot 2$ undervisningstimer til vejlederen, og ikke $10 \cdot 2 \cdot 3$ timer som man måske skulle tro. Timetallet er altså uafhængigt af hvor mange der skriver projektet eller læser bøgerne.

Man stiller sig selv spørgsmålet: Hvor mange studerende skal der være til et almindeligt 2.dels kursus, før det er mere rentabelt end at give de studerende et læsekursus hver? Lad os se, et n-punkters 2.dels kursus svarer til $15 \cdot 5 \cdot n$ timer og et læsekursus til $10 \cdot n$. Det vil sige at der skal være 8 studerende på kurset (overvej!) førend det er rentabelt at afholde fremfor *at give hver enkelt studerende et læsekursus af tilsvarende størrelse med personlig vejledning!*

Beregningerne er grove, og der er naturligvis aspekter som der ikke er taget højde for. Og dog må vi konkludere, medmindre disse oversete aspekter er særdeles væsentlige, at læsekurser *ikke* er en umådelig luksus! Tværtimod. Måske er det snarere de almindelige kurser, der er luksuriøse -

Vor pointe er nået, og lad os straks tage brillerne af igen. De er så forvrængende.

De „almindelige“ kursers undervisning

De almindelige kurser (altså kurser med forelæsninger) har som regel et publikum i størrelsesordenen 5-10 studerende. Det er jo ikke ret mange. Med den tid der pt. er afsat til et 2.dels kursus, så skulle der være tid til masser af dialog og masser af personlig vejledning. Men alligevel opfører både studerende og undervisere sig som om der var 100 tilhørere. Og hvorfor nu det?

Som studerende forholder vi os tavse og passive, måske af frygt for at dumme os over for de 99 andre, hvoraf de 90 ikke er tilstede. Vi åbner først munden, når vi med 100% sikkerhed kan udpege en fejl i tavle-krims-kramset. Og forelæseren underviser som om der var 100 tilhørere. Lutter envejs-kommunikation. Burde man ikke stille sig selv spørgsmålet: „Hvorfor *forelæser underviseren?*“.

Svaret er, tror jeg, begrundet i det grundlæggende synspunkt, at hele pensum skal gennemgås i undervisningen, eller i det mindste nævnes. Den slags kræver tid. Meget tid. Og dyr tid, når vi ihukommer forberedelsestimetallet. Når alt skal gennemgås, så vil undervisningen sjældent tage udgangspunkt i at kursusdeltagerne har forberedt sig. Hvis vi ydermere vil maksimere pensummængden, ja så bliver forelæsningen den bedste undervisningsform (overvej!). Og vel at mærke forelæsningen anskuet som en tekstnær gennemgang.

Men hvad er det værd at det gennemgåede pensum er stort, hvis man som studerende ikke når at tilegne sig det. At et emne er gennemgået ved en forelæsning betyder ikke nødvendigvis at de studerende har lært noget. Forelæsningerne er ikke læreprocessen selv, men en hjælp dertil. Det primære slag står i læsegrupper og ved skrivebordet derhjemme. Mener jeg.

Og de overvejelser fører os så endelig frem til mit forslag til en ny overbygning.

En ny overbygning?

Mit forslag er funderet i det (indlysende?) princip, at undervisningen skal være tilrettelagt for de studerende. Og ikke blot *for*, men også i højere grad *af* de studerende. Det er et forslag der fordrer en større grad af selvstændighed, og dermed ansvar, hos dem al undervisning i bund og grund drejer sig om: Nemlig, os studerende.

Jeg forestiller mig et gult hæfte med en liste over udbudte kurser, som de studerende så skal tilmelde sig (ny vin på gamle flasker!). Men de udbudte kurser er ikke kurser i den sædvanlige forstand. Kurserne skal være syntesen af læsekurser og „almindelige“ kurser, og lad os for nemheds skyld kalde dem studiekurser. Undervisningen i disse studiekurser skal have karakter af vejledning, for underviserens opgave skal ikke være at gennemgå stoffet, men at hjælpe de studerende igennem det.

For eksempel kunne jeg forestille mig, at der i et 4 punkters studiekursus blev afholdt 2-3 skemalagte vejledningstimer om ugen. Både de studerende og underviseren har til hver gang forberedt sig på et par aftalte tekster, og de to timer vil blive brugt på at diskutere tekniske detaljer og perspektiver. Decideret gennemgang af stof skal undgås. Eller eventuelt varetages af de studerende selv, som så kan undervise hinanden, med kyndig indgriben fra underviseren hvis det bliver nødvendigt.

Det er klart at en sådan omlægning øger kravet til os studerendes selvstændighed betragteligt. Der skal derfor opfordres til at deltagere til samme studiekursus organiserer sig i studiegrupper, men det skal ikke være et krav. Hvis man vil læse alene, så kan man gøre det.

Den økonomiske finte ved en sådan omlægning er at få underviserens forberedelsestid nedsat. Underviseren skal ikke længere have et to-timers foredrag parat til hver gang, men blot være velkendt med stoffet, så han/hun kan opklare misforståelser og trække de lange linjer. Som sidegevinst får vi at underviseren vil være vel bekendt med de studerendes niveau, så vi undgår at kurset foregår i et tempo hvor ingen kan følge med.

Når forberedelsestiden falder, så må der være overskud til at udbyde flere studiekurser. Ergo mere bredde og dybde i udbudet. Det er også klart, at studiekurser kan afholdes selv med meget få deltagere. De studiekurser, der kun får 1-2 tilmeldinger, kan måske afholdes som læsekurser, altså læsekurser i nuværende forstand. Angående læsekurser, så mener jeg at det fortsat skal være muligt at tage læsekurser. Måske vil behovet herfor falde en anelse, når udbudet af studiekurser er større end det nuværende kursusudbud.

Efterskrift og opfordring

Jeg synes selv at forslaget er godt, og jeg kender andre som også synes at ideen er god. Men måske har jeg talt med ikke-repræsentative studerende. Måske tager jeg gruelig fejl, måske er der vigtige aspekter jeg har overset. Så hvis DU kan hjælpe mig ud af min vildfarelse, så hører jeg meget gerne. Desværre udkommer FAMØS ikke ofte nok til at en ordentlig debat kan finde sit forum her. Så reaktioner per e-post, hvadenten det er klapsalver eller dundertaler, er særdeles velkomne.

For hvis ikke jeg får nogen reaktion, så vil jeg arbejde for at indføre det her foreslåede. Ja, det er korrekt: Jeg har taget din uddannelse som gidsel!

Kommentarer sendes til: oebro@math.ku.dk

Hvordan kunne første år på matematikuddannelserne se ud?

Niels Grønbæk og Inge Henningsen

Studienævnet for matematiske fag afholder til efteråret et fremtidsværksted om første års undervisning på matematikfagene. Som optakt hertil indbydes alle FAMØS' læsere til at skrive visioner for førsteårsundervisningen.

Man kan skrive om hele første år, men det kan også handle om et enkelt fag eller et enkelt aspekt af undervisningen. Det kan være studiestarten. Skal vi bruge en eller flere måneder på et introduktionsforløb, og hvad skal det indeholde. Skal vi have flere/færre projekter, og hvad skal de indeholde? Skal lærerne tilrettelægge projekterne eller skal de studerende gøre det selv? Skal vi bytte valgfrihed med tværfaglighed eller omvendt? Hvordan tilrettelægger vi første år, så der også bliver tid til fordybelse og eftertænksomhed? Eller har vi allerede rigeligt af den slags? Nye og spændende eksamensformer. Flere eller færre eksaminer. Lige som ved fremtidsværksted er der frit slag, det skal bare handle om det man gerne vil have. Og så er der er selvfølgelig nogle ganske skrappe randbetingelser: Man skal lære noget, men ikke nødvendigvis det samme som i dag. Vi kan ikke bygge H.C. Ørstedsinstituttet fuldstændigt om, men man kan måske benytte lokalerne anderledes. Vi får ikke flere lærere og instruktorer, men man kan måske bruge dem der er på en anden måde.

Send bidrag inden 1. august til Niels Grønbæk (gronbaek@math.ku.dk) eller Inge Henningsen (inge@stat.ku.dk) mærket „første år". Skriv helst kort, for det er meningen at alle bidrag skal offentliggøres. Derudover vil en selvbestaltet komite udvælge fem bidrag, der får en eller anden ussel præmie.

Matematikundervisning?

Inspirerede af en artikel på dagens (7/5-00) Slashdot (`http://slashdot.org/`), fik redaktionen lyst til at stille nogle spørgsmål om formålet med at undervise i matematik. Hvis du har en holdning til emnet, så skriv endelig til os, du kan evt. starte med at besvare disse spørgsmål:

- Af alle fag, hvilket er så det vigtigste for elevens udvikling? Med andre ord, hvilet fag giver eleven flest færdigheder udover selve den formidlede information? Hvorfor? Hvad er formålet med at lære børn matematik? Er det at give dem færdigheder til at håndtere tal eller er det for at opnå noget andet (eller måske begge dele)? Hvilke færdigheder er der i så fald tale om?
- Man siger ofte at matematik lærer én abstrakt tænkning. Er det rigtigt, hvordan og hvorfor? Kunne der være en bedre måde at opnå dette på?
- Ser du betydning at matematikundervisning forsvinde, som følge af udviklingen af lommeregnere og små computere? Hvorfor eller hvorfor ikke?
- Burde man tvinge børn til at lære den lille tabel udenad?
- Hvorfor bliver elever der er knap så gode til matematik ofte opfattet som „mindre smarte“, til forskel fra børn der ikke klarer sig godt i andre fag? Omvendt, hvorfor betragtes børn der er gode til matematik som begavede (mere end hvis det var andre fag)?