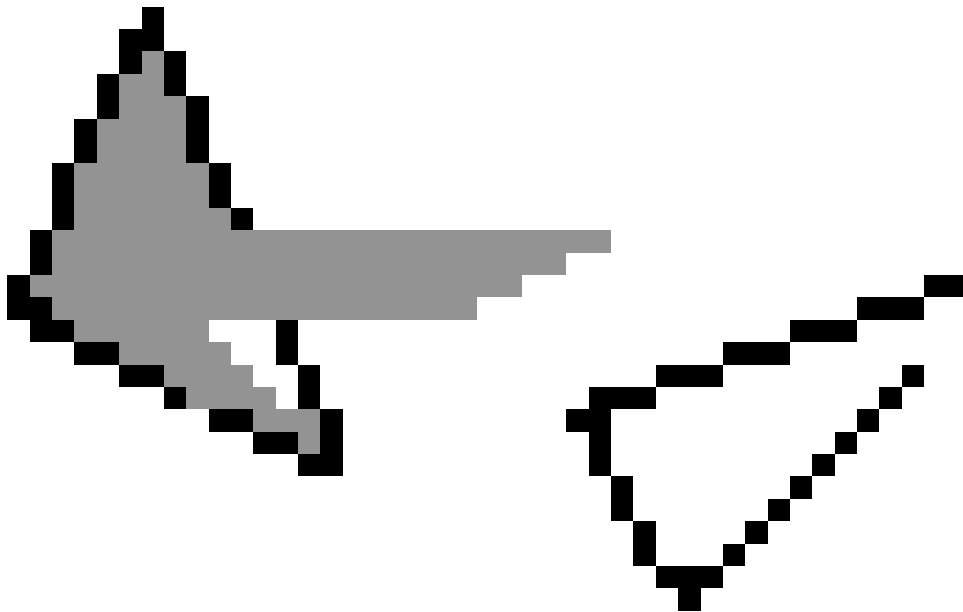


# FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

14. årgang, nr. 2, december 2000



(December 2000. Datalogerne laver grafikopgave, og tegner bl.a. trekanter)

Også i praksis er selv simpel matematik nyttig.

FAMØS 14.2; december 2000.  
Fagblad for Aktuar-, Matematik-,  
Økonomi- og Statistikstuderende ved  
Københavns Universitet.

**Redaktionsgruppe:**

Henrik Christian Grove (ansvh.)  
Peter Lund

Deadline for næste nummer:  
Fredag den 16. februar 2001

Indlæg modtages gerne og kan sendes  
til [famos@math.ku.dk](mailto:famos@math.ku.dk) (meget gerne  
skrevet i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X), eller afleveres på  
Matematisk Afdelings sekretariat i E  
103.

FAMØS er et internt fagblad.

Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS  
c/o Institut for matematiske fag  
Matematisk Afdeling  
Universitetsparken 5  
2100 København Ø

World Wide Web-adresse:  
<http://www.math.ku.dk/famos/>

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 700 stk.

ISSN 1395-2145

## Indhold

Leder . . . . .	3
Juleoperatoren . . . . .	4
Dansk matematisk forening . . . . .	5
Gamle redaktører . . . . .	7
Gensyn med fødselsdagsproblemet . . . . .	9
Opgaveløsninger . . . . .	19
Sommerskole i ikke-relativistisk QED . . . . .	25

## Leder

Så blev studenterkollokvierne reddet. Til deres første kollokvium havde Ruth og Lars, fået Jesper Michael Møller til at tale om „Klassifikation af kompakte flader“. Jesper var som altid fantastisk underholdende og leverede et glimrende kollokvium for de mange fremmødte. Bagefter fulgte han med ned i S01, hvor der blev klippet i Seifertflader, og Möbiusbånd. En glimrende start der siden er blevet fulgt op med flere gode kollokvier, en stor tak til Ruth og Lars for at sikre denne tradition.

Nu mangler vi bare at der er nogen der viser vilje til at sikre den fortsatte eksistens af FAMØS! Denne gang sidder vi to mand og redigerer bladet, og den ene er slet ikke studerende længere. Skal vi virkelig ligeså langt ud som kollokvierne var? Det vil gøre det temmelig svært for den nye redaktion, hvis I derimod tager jer sammen nu, kan I blive indført i arbejdet af os der kender det. Det eneste krav vi stiller er at du kan afse fire dage om året til klippe-klistre-møderne<sup>1</sup>! Skriv til redaktionen på [famos@math.ku.dk](mailto:famos@math.ku.dk).

På trods af at det endnu ikke er så koldt endda, er vi i december måned og julen nærmer sig med hastige skridt. Inden det bliver jul, er der dog lige valg til de kollegiale organer på universitetet. Du har sikkert allerede modtaget en stemmeseddel, og forhåbentlig har du allerede sat dit kryds og sendt den tilbage. Ellers skal der herfra lyde en kraftig opfordring til at få det gjort. I sidste nummer af universitetsavisen kan du læse en præsentation af spidskandidaterne, ellers kan du stemme på fagrådets kandidat.

Når du engang er færdig med julemaden, er det tid til at fejre årtusindskiftet, og derefter kommer januar måned sikkert med et par eksaminer der skal bestås. Herfra skal der lyde

*Glædelig jul*  
*Godt nytår*  
*Held og lykke til eksamen*

---

<sup>1</sup>Et gammelt navn fra dengang der var saks og lim involveret.

# Juleoperatoren

Henrik Grove

Over alle Byens Veie hang grønne Granguirlander, nogle steder med lysende Hjerter eller Stjerner, og alle Boutiker satte Nisser eller Grantræer i Vinduerne. Der var pyntet fra Kælder til Qvist. Ingen vidste dog rigtigt hvorfor, de kunde bare huske at det plejede de at gjøre paa denne Aarstid. Paa det Mathematiske Institut sad der dog en mængde Mennesker der vidste hvad der var galt.

Her vidste man at før Aarets Juleoperator var bleven udregnet vilde Julestemningen ikke brede sig i Byen. Uheldigvis var den gamle Professor, Eksperten paa Omraadet, netop død, og en talteoretisk Spidsfindighed ved Aarstallet gjorde Opgaven overmaade svær dette Aar. Saa nu sad alle Instituttets Ansatte og arbejdede paa denne Opgave, lige meget hvor langt det laa fra deres sædvanlige Forskningsomraade, for Jul skulde det være.

Som Dagene gik, skete det af og til at en Ansat løste et Problem der havde plaget Alverdens Matematikere i mange Aar; men de ænsede det næppe for det bragte ikke Julen nærmere.

Man satte Secretairerne til at fintælle Regnskaberne oppefra og nedefra for at finde alle de Penge man overhovedet kunde, saa man kunde invitere Verdens førende paa Omraadet til Instituttet for at hjælpe med Udregningerne, men lige lidt hjalp det.

Man gik til Datalogerne, for at faa dem til at sætte nogle af deres Elektronregnemaskiner til at regne paa Operatoren. Da Datalogerne langt om længe havde forstaaet Problemet og faaet programmeret deres Elektronregnemaskiner, og gjort Huller i deres Hulkort, skete der Ingenting. De bare stode og skrev Prikker ud paa deres Skiærme, men noget brugbart Resultat kom der ikke, og Maskinerne regner vist endnu . . .

Man fandt ud af at Opgaven svarede ganske til et noget obscurot fysisk Forsøg, og bad Physikerne prøve at udføre dette Forsøg, i haab om at et empirisk Resultat vilde være godt nok. Da Physikerne endelig havde indset at de ikke havde brug for nyt Udstyr til flere Hundrede Tusinder Rigsdaler for at udføre Forsøget, gik de i Gang. Forelagt Resultatet maatte Matematikerne desværre konstatere at Physikerne havde været for upræcise med deres Forsøgsopstilling.

Man havde ogsaa forsøgt at stille det som en skriftlig Opgave til de Studerende, men det havde kun medført at de Studerende havde rendt de Ansatte paa dørene for at faa et Vink, indtil man havde bildt en Studerende ind at der var en Trykfejl i Opgaven.

Til sidst var man blevne saa desperate at man besluttede at samle alle Studerende og Ansatte, baade Forskere og Secretairer, til et Stor-Møde, hvor Instituttlederen redegjorde for Situationens Alvor. Her besluttede man at man i Fællesskab vilde forsøge at gjøre som om der var Julestemning og se om det hjalp Udregningerne lidt paa Vei. Omendskiønt det var svært at huske Opskrifter og den Slags, gik man igang med at bage Smaakager, koge Glögg, gjøre Julestads og mange andre af de Ting man kunde huske fra de foregaaende Aar.

Da man til sidst havde en to Mil og halvtredie Fjerdingsvej lang Guirlande af Glanspapir i alle Regnbuens Farver, 704 Pægl Glögg og Toogtresindstyve Lispund Smaakager, satte man sig ned og regnede igjen. Ved fælles Hjælp og med den producerede julestemning tog det kun faa Minutter, før Resultatet stod paa Papiret og Radioen begyndte at spille Høit fra Træets grønne Top!

---

## Dansk matematisk forening

Jan Philip Solovej

Sekretær og næstformand i Dansk Matematisk Forening

Dansk Matematisk Forening er en af de ældste matematiske foreninger i verden. Den blev stiftet i 1873 og har til formål at virke til gavn for forskning og undervisning i matematik.

Hovedparten af medlemmerne i Dansk Matematisk Forening er ansatte ved universiteterne, men også en del gymnasielærere og andre med interesse for matematik er medlemmer. Foreningen har ca 350 medlemmer. Man kan se en medlemsliste på <http://www.dmf.mathematics.dk/memberdb/>.

Listen indeholder dog kun informationer om de medlemmer der har tilladt at oplysningerne offentligøres.

Foreningen arrangerer foredrag (ca. 3–5 per semester). De afholdes normalt mandag kl. 17 på HCØ med mulighed for at deltage i en efterfølgende middag sammen med foredragsholderen. Man behøver ikke være medlem for at deltage. 2. dels studerende opfordres kraftigt til at komme til foredragene. De er ikke (eller bør ikke være) for specialister.

Desuden arrangerer foreningen et årsmøde. Årsmødet afholdes efter tur på landets universiteter.

Som et nyt initiativ planlægger foreningen et 3 dages seminar rettet mod 2. dels studerende i matematik fra hele Danmark. Seminaret vil blive afholdt på Sandbjerg gods i Sønderborg i august 2001. Seminaret er stadig i planlægningsfasen og et emne er endnu ikke endelig fastlagt. Foreningen arbejder på at finde

sponsorer til seminaret, således at deltagelse bliver økonomisk overkommeligt. Man behøver ikke være medlem af foreningen for at deltage i seminaret.

Foreningen udgiver bladet Matilde (se <http://www.matilde.mathematics.dk/>) der udkommer i 3 ordinære numre per år.

Foreningen har en elektronisk kalender (se <http://www.matnyt.mathematics.dk/>) som annoncerer begivenheder fra hele landet af interesse for matematikere. Man kan abonnere på en ugentlig e-mail version af denne kalender, også uden at være medlem.

Som medlem af Dansk Matematisk Forening kan man til reduceret pris blive reciprocitetsmedlem af en række andre matematiske foreninger verden over. F.eks. kan man for ca. 25% af prisen blive medlem af European Mathematical Society og for ca. 60% af prisen blive medlem af American Mathematical Society.

Kontingentet for medlemskab af Dansk Matematisk forening har for i år været 200 kr, men forventes at blive 300 kr i 2001. Studerende og pensionister betaler halv pris.

Man kan læse mere om foreningen på <http://www.dmf.mathematics.dk>. Her er der også en elektronisk blanket, hvor man kan melde sig ind i foreningen. Som medlem støtter man foreningens virke og modtager Matilde.

Foreningen håber meget at få flere medlemmer blandt studerende. Så hast til computerne og meld jer ind.

# Gamle redaktører

Henrik Grove

I sidste nummer bragte vi et e-brev vi havde modtaget fra Henning Makhom, hvor han bl.a. skrev: „Normalt nøjes jeg med at skabslæse FAMØS, eftersom jeg kun er halvvejs matematiker (et bifag for snart længe siden).“ Det kan godt være Henning kun har et bifag i matematik, men hans tilknytning til FAMØS er større end som så. Siden sidst har vi ved et tilfældigt kig i nogle gamle numre fundet ud af at Henning faktisk var medredaktør af FAMØS i første halvdel af 90'erne.

Andre skribenterne i sidste nummer har også været FAMØS-redaktører, det drejer sig om Toke Lindegaard Knudsen og Asger Grunnet.

Selvom han ikke bidrog direkte til sidste nummer er der dog endnu en gammel redaktør der fortjener lidt omtale. I september 98-nummeret af FAMØS skrev jeg at jeg midlertidigt havde overtaget posten som ansvarshavende redaktør, mens min forgænger aftjente sin værnepligt. Specielt midlertidigt blev det aldrig, Rasmus er ganske vist vendt tilbage til studierne, og har også bidraget en smule til FAMØS, men ansvaret forblev mit. Før Rasmus var Jette Randløv ansvarshavende for et enkelt nummer, og før hende havde Bo Markussen ansvaret, og det er ham det drejer sig om.

Vi er nemlig tilbage ved bl.a. september 1994-nummeret, hvorfra nogle af læserne måske husker at flagstangsopgaven stammer. Der stod ikke nogen navne på artiklen, og jeg kunne ikke tage mig sammen til at spørge Bo hvem der havde stillet opgaven, så da den blev stillet igen før sommerferien, var det uden navn. Det er Bo meget forståeligt lidt ked af, så lad os hermed slå fast at det var Bo der stillede opgaven, vi overlader nu ordet til Bo.

Strengt taget er flagstangsopgaven naturligvis ikke min; den oprindelige opgave har jeg fra hyggebogen:

Ivan Moscovich: „Hjernegymnastik - med kombinationer og logik“, Clausen bøger 1988,

hvor opgaven gik ud på at plante 11 træer. Min fortjeneste bestod i at skifte træerne ud med flagstænger, samt at stille spørgsmålet: Er de maksimale følger af flagstænger begrænsede, endelige eller uendelige? Ifølge Asger er svaret: De maksimale flagstangsfølger har højst længde 17. Interessant nok nævner Ivan Moscovich også tallet 17 i denne forbindelse:

„Man kunne måske tro, at hvis man er tilstrækkelig forudseende, kan man få antallet af mulige parceller og træer på dem til at nærme sig

det uendelige. Men det går ikke. De begrænsende faktorer ligger i det ufravigelige krav om tilføjjelsen af endnu et ekstra træ for hver ny opdeling af linien i lige store stykker samt disse træers uflyttelighed, når de først er plantet. Det kan dog sagtens lade sig gøre at komme videre end de 11 linier. Men for endnu at understrege forudberegningens betydning skal det siges, at den strategi, man bruger for at klare 11 linier, kan være fuldkommen forskellig fra den, man skal bruge for at klare for eksempel 17 linier. Hvor langt kan du komme?“

Derefter følger en tegning, hvor der er gjort klar til at opgaveløseren kan forsøge at placere 18 træer!!! Så denne Ivan Moscovich er måske mere inde i sagerne end hans bog umiddelbart kunne give udtryk for.

Vi er ganske enige med Bo i at det er interessant at Moscovich nævner tallet 17, og derefter opfordrer læseren til at prøve 18.

Heldigvis er Bo ikke blevet mere ked af det end som så, han har jo i hvert fald skrevet en god side 9-sætning til dette nummer, så endnu en gang undskyld og tak til Bo Markussen.

Sammen med sin klage sendte Bo et stort tillykke til Asger for at have løst flagstangsopgaven.

Endnu en gammel FAMØS-redaktør har henvendt sig til redaktionen siden sidst Søren Feodor Nielsen har sendt redaktionen følgende kommentar, som indeholder nogle spørgsmål til overvejelse.

Jeg blev ganske skuffet over løsningen af opgaven om differentiation af  $x^2$ . Bevares den løsning I bragte er rigtig, men det er ærlig talt en snydeløsning på en snydeopgave! Se, opgaven burde (i mine øjne!) være formuleret ved integral ikke sum:

$$(x^2)' = \left( \int_0^x x \, dy \right)' = \int_0^x x' \, dy = x$$

Samme opgave, stadig forkert men ingen snydeløsning. Hvad der er galt er jo ikke svært at se; vi differentierer kun ‘efter det ene  $x$ ’ og den går naturligvis ikke. Men hvordan skal vi differentiere sådan en størrelse generelt? Overvej

$$f(x) = \int_0^x g(x, y) \, dy$$

Et naivt forsøg på at se det som en sammensat funktion giver ikke mig det korrekte resultat. Er man virkelig nødt til at gå helt tilbage til tilvækster for at finde  $f'$ ? Næste spørgsmål (eller måske snarere første) er hvad man må kræve af  $g$  for at  $f$  er differentiabel?



# Gensyn med fødselsdagsproblemet

Bo Markussen, Afdeling for Statistik og Operationsanalyse

Hvad er sandsynligheden for at der hver dag i året er mindst en ud af 400 tilfældige personer der har fødselsdag? I julenummeret af FAMØS 1999 blev der udledt to formler til beregning af denne sandsynlighed. Lad  $q(k, n)$  være sandsynligheden for at  $k$  indbyrdes stokastisk uafhængige og ligefordelte fordelte fødselsdage dækker et år med  $n$  dage. Den første formel, som følger af inklusions-eksklusions princippet,

$$q(k, n) = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} \left(\frac{n-j}{n}\right)^k,$$

er numerisk ustabil og i praksis ubrugelig. Via den anden formel, som er givet rekursivt ved  $q(k, 1) = 1$ ,  $q(1, n) = 1_{(n=1)}$  og

$$q(k+1, n) = q(k, n) + \left(\frac{n-1}{n}\right)^k q(k, n-1), \quad (1)$$

kan grafen for  $q(k, 365)$  som funktion af  $k$  let tegnes. Denne er S-formet og vokser relativt hurtigt omkring  $k = 2287$ ,  $q(2287, 365) \approx \frac{1}{2}$ , fra 0 til 1.

Det kombinatoriske problem beskrevet ovenfor kan analyseres via en effektiv og yderst elegant indlejringsteknik, som jeg lærte ved et foredrag af Lars Holst, Kongelige Tekniske Højskole i Stockholm, ved den Nordiske Konference i Statistik, Grimstadt 5.-8. juni 2000.

**Side 9-sætningen 1.** For  $n$  stor gælder

$$q(k, n) \approx \exp\left(-\exp\left(-\frac{k}{n} + \log n\right)\right),$$

og for alle  $\epsilon > 0$  gælder

$$q(\lceil(1-\epsilon)n \log n\rceil, n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad q(\lfloor(1+\epsilon)n \log n\rfloor, n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

## Omformulering af problemstillingen

Lad  $n$  være antallet af dage i året. Lad der være givet en uendelig følge af personer indiceret ved  $j \in \mathbb{N}$ . Lad  $R_{nj} \in \{1, \dots, n\}$  være den  $j$ 'te persons fødselsdag og

lad

$$T_n = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{j=1}^k 1_{(R_{nj}=i)} \geq 1 \right\}$$

være det første "tidspunkt" hvor der hver dag i året vil være mindst en person der har fødselsdag. Så gælder

$$\begin{aligned} q(k, n) &= \Pr(k \text{ fødselsdage dækker et år med } n \text{ dage}) \\ &= \Pr(\text{de første } k \text{ fødselsdage dækker et år med } n \text{ dage}) \\ &= \Pr(T_n \leq k). \end{aligned}$$

Strategien er nu at beskrive fordelingen af  $T_n$ . Dette gøres ved at indlejre de stokastiske variable  $R_{nj}$  og  $T_n$  i en poissonproces i planen og udnytte formlen

$$\sum_{j=1}^{T_n} Z_{nj} = V_n.$$

Ingredienserne i denne strategi vil blive beskrevet i afsnittene nedenfor. I det følgende vil *indbyrdes stokastisk uafhængige* blive forkortet ved *i.s.u.*. Videre vil  $X \equiv c$  angive at den stokastiske variable  $X$  er konstant lig med  $c \in \mathbb{R}$ , og  $X \sim U(M)$  angive at  $X$  er ligefordelt på mængden  $M$ . Tilsvarende vil  $Exp(\mu)$  angive en eksponential fordeling med middelværdi  $\mu$ ,  $Pois(\mu)$  en poissonfordeling med middelværdi  $\mu$  og  $\Gamma(\mu, \kappa)$  en  $\Gamma$ -fordeling med skalaparameter  $\mu$  og formparameter  $\kappa$ .

## Poissonprocesser

Fra Statistik 1B kendes en poissonproces som en familie  $\tilde{X}_t$ ,  $t \geq 0$ , af stokastiske variable med  $\tilde{X}_0 \equiv 0$  og i.s.u. poissonfordelte tilvækster,

$$\tilde{X}_t - \tilde{X}_s \sim Pois(t - s), \quad 0 \leq s < t.$$

I dette afsnit vil vi først undersøge hvilke egenskaber en poissonproces har givet den eksisterer, hvorefter vi vil konstruere en poissonproces.

Antag altså at  $\tilde{X}_t$ ,  $t \geq 0$ , er en poissonproces. Idet tilvæksterne antager værdier i  $\mathbb{N}_0$  følger det at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(\tilde{X}_{t+1} - \tilde{X}_t \notin \{0, 1\}) = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-j}}{j!} e^{-\frac{1}{k}} < \infty$$

følger det af Borel-Cantelli's lemma, at

$$\Pr\left(\bigcap_{q \in \mathbb{Q}_+} \bigcup_{k=1}^{\infty} (\tilde{X}_{q+\frac{1}{k}} - \tilde{X}_q \in \{0, 1\})\right) = 1.$$

En poissonproces er dermed stykkevis konstant med spring af størrelse 1. Springene af poissonprocessen vil vi kalde for poissonhændelser. Lad

$$\tau_n = \inf \{t > 0 \mid \tilde{X}_t = n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

være tidspunktet for det  $n$ 'te spring af  $\tilde{X}_t, t \geq 0$ . Dermed indtræffer den  $n$ 'te poissonhændelse netop til tidspunktet  $\tau_n$ . Lad  $X_A$  være antallet af poissonhændelser i  $A$ ,

$$X_A = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\tau_n \in A)}, \quad A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}_+),$$

hvor  $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}_+)$  er mængden af Borel-målelige delmængder af  $\mathbb{R}_+$  med endeligt lebesgue-mål. Hvis vi antager at  $t \mapsto \tilde{X}_t$  er kontinuert fra højre, så er  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ ,  $(X_A)_{A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}_+)}$  og  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bestemt udfra hinanden ved

$$\tilde{X}_t = X_{(0,t]}, \quad (\tilde{X}_t = n) = (\tau_n \leq t < \tau_{n+1}).$$

Det kan vises at

$$\tau_n - \tau_{n-1}, n \in \mathbb{N}, \text{ er i.s.u. med } \tau_n - \tau_{n-1} \sim \text{Exp}(1), \quad (2)$$

specielt  $\tau_n \sim \Gamma(1, n)$ , og for disjunkte mængder  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}_+)$  er

$$X_{A_i}, i \in \{1, \dots, k\}, \text{ i.s.u. med } X_{A_i} \sim \text{Pois}(\lambda(A_i)), \quad (3)$$

hvor  $\lambda(A)$  er lebesgue-målet af  $A$ . Videre er fordelingen af poissonhændelserne i  $A$  givet  $X_A = n$  identisk med fordelingen af  $\{U_1, \dots, U_n\}$ , hvor  $U_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , er i.s.u. med  $U_i \sim U(A)$ .

Poissonprocessen kan nu konstrueres ved enten at vælge springtidspunkterne udfra (2), eller ved at stykke den sammen udfra (3) og den efterfølgende beskrivelse af den betingede fordeling af poissonhændelserne. Idet der ikke findes en god ordningsrelation på  $\mathbb{R}^2$  er det kun den anden fremgangsmåde der lader sig generalisere til planen. Fremover vil vi kalde familien  $X_A, A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}_+)$ , af stokastiske variable for poissonprocessen i tiden.

## Poissonprocessen i planen

Lad  $A_{ij} = (i-1, i] \times (j-1, j]$ , og lad  $X_{A_{ij}}, i, j \in \mathbb{Z}$ , være i.s.u. med  $X_{A_{ij}} \sim \text{Pois}(1)$ . Givet  $X_{A_{ij}} = n$  lad poissonhændelserne  $\tau_{ijk}, k = 1, \dots, n$ , være i.s.u. med  $\tau_{ijk} \sim U(A_{ij})$ . Lad  $X_A$  være antallet af poissonhændelser i  $A$ ,

$$X_A = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{X_{A_{ij}}} 1_{(\tau_{ijk} \in A)}, \quad A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2).$$

Familien  $X_A$ ,  $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$ , af stokastiske variable vil vi kalde for poissonprocessen i planen. Det kan vises, at for disjunkte mængder  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$  er

$$X_{A_i}, i \in \{1, \dots, k\}, \text{ i.s.u. med } X_{A_i} \sim \text{Pois}(\lambda(A_i)).$$

Bemærk at for fast  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$  er familien

$$X_{B \times A} \sim \text{Pois}(\lambda(B)\lambda(A)), \quad A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}_+),$$

er en poissonproces i tiden med intensitet  $\lambda(B)$ , hvorfor vi specielt får fordelingsegenskaberne for denne til vores rådighed.

## Indlejring i en poissonproces

Ved en indlejring af de stokastiske variable  $R_{nj}$  og  $T_n$  i en poissonproces  $X_A$ ,  $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$ , vil vi forstå situationen hvor  $R_{nj}$  og  $T_n$  er givet som funktioner af  $X_A$ .

Med navneændringerne *dato*  $\rightsquigarrow$  *urne* og *fødselsdag*  $\rightsquigarrow$  *kugle* skiftes til et klassisk sprogbrug. Desuden vil vi generalisere vores model ved at lade alle parametre i vores problemstilling være stokastiske.

## Den generelle model

Lad der på et passende bagvedliggende sandsynlighedsfelt  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  være defineret stokastiske variable  $N \in \mathbb{N}$ ,  $M_j \in \mathbb{N}$ ,  $O_j \in \mathbb{R}_+$  og  $X_A \in \mathbb{N}_0$  for  $j \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$ , således at  $X_A$ ,  $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$ , er en poissonproces i planen stokastisk uafhængig af de andre stokastiske variable, som vi vil give følgende fortolkning:

$N$  = antal urner,

$M_j$  = antal kugler som  $j$ 'te urne skal indeholde for at være fuld,

$O_j$  = intensiteten hvormed der falder kugler i den  $j$ 'te urne.

Ud fra disse grundliggende stokastiske variable defineres  $Y_j \in \mathbb{R}_+$ ,  $Z_{nj} \in \mathbb{R}_+$ ,  $U_n \in \mathbb{R}_+$  og  $V_n \in \mathbb{R}_+$  for  $n, j \in \mathbb{N}$  ved

$$\begin{aligned} Y_j &= \inf \{t > 0 \mid X_{(\sum_{k=1}^{j-1} O_k, \sum_{k=1}^j O_k] \times (0, t]} = M_j\}, \\ Z_{nj} &= \inf \{t > 0 \mid X_{(0, \sum_{k=1}^n O_k] \times (0, t]} = j\} - \inf \{t > 0 \mid X_{(0, \sum_{k=1}^n O_k] \times (0, t]} = j - 1\}, \\ U_n &= \min\{Y_1, \dots, Y_n\}, \\ V_n &= \max\{Y_1, \dots, Y_n\}, \end{aligned}$$

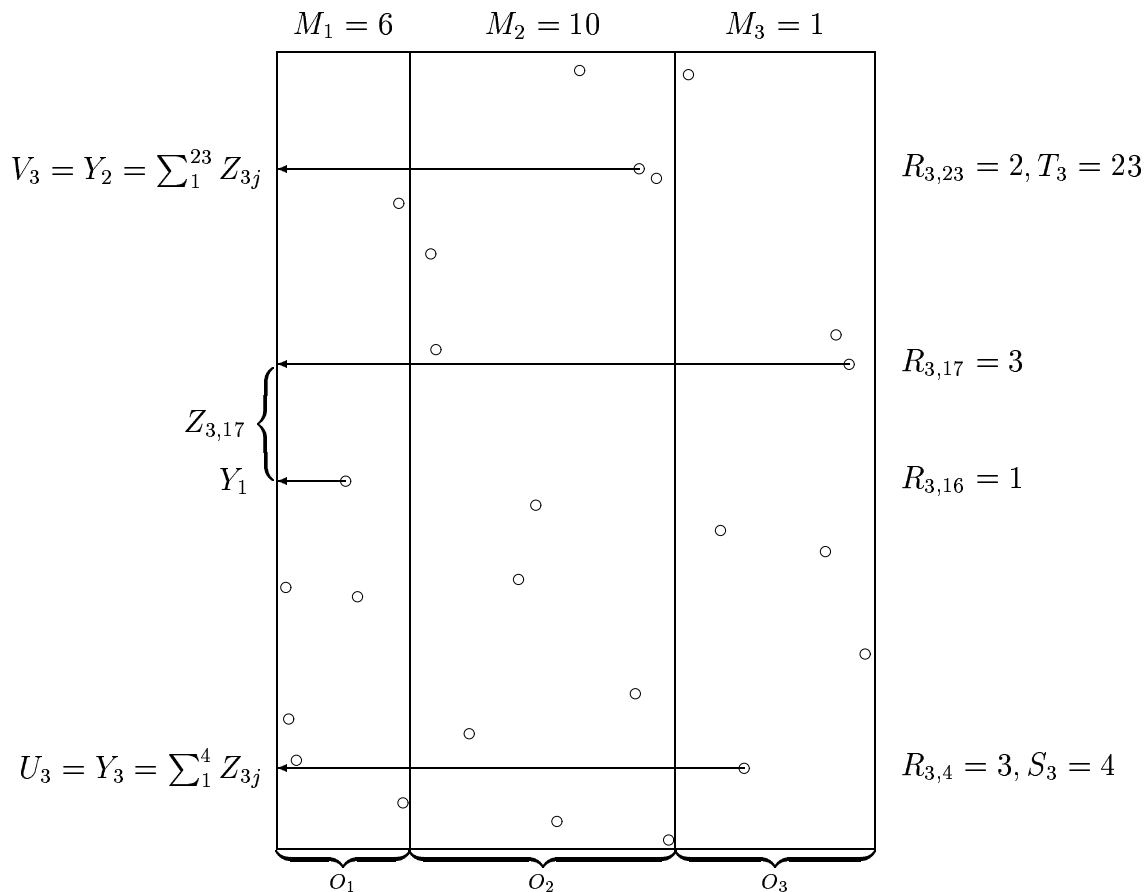
og  $R_{nj} \in \{1, \dots, n\}$ ,  $S_n \in \mathbb{N}$  og  $T_n \in \mathbb{N}$  for  $n, j \in \mathbb{N}$  ved

$$(R_{nj} = i) = (X_{(\sum_{k=1}^{i-1} O_k, \sum_{k=1}^i O_k] \times \{\sum_{k=1}^j Z_{nk}\}} = 1),$$

$$S_n = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{j=1}^k 1_{(R_{nj}=i)} = M_i \right\},$$

$$T_n = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{j=1}^k 1_{(R_{nj}=i)} \geq M_i \right\}.$$

På figuren nedenfor er der tegnet en realisation af poissonprocessen, hvor  $\circ$ 'erne er poissonhændelserne, og de afledte stokastiske variable.



Den første gruppe af afledte stokastiske variable er knyttet til processer i kontinuert tid og har følgende fortolkning

- $Y_i$  = ventetiden indtil den  $i$ 'te urne er fuld,
- $Z_{nj}$  = ventetiden mellem poissonhændelserne i de  $n$  første urner,
- $U_n$  = ventetiden indtil en af de  $n$  første urner er fuld,
- $V_n$  = ventetiden indtil alle de  $n$  første urner er fulde.

Den anden gruppe af afledte stokastiske variable er knyttet til processer i diskret tid, målt ved antallet af poissonhændelser i de  $n$  første urner, og har følgende fortolkning

$$\begin{aligned} R_{nj} &= \text{den af de } n \text{ første urner som den } j\text{'te kugle falder i,} \\ S_n &= \text{ventetiden indtil en af de } n \text{ første urner er fuld,} \\ T_n &= \text{ventetiden indtil alle de } n \text{ første urner er fulde.} \end{aligned}$$

Ud fra fortolkningen af de afledte stokastiske variable, eller ved at se på figuren ovenfor, kan det nu *konstateres* at der gælder

$$\sum_{j=1}^{S_N} Z_{Nj} = U_N, \quad \sum_{j=1}^{T_N} Z_{Nj} = V_N. \quad (4)$$

Af fordelingsegenskaberne for poissonprocessen i planen følger det direkte, at givet  $N$ ,  $M_j$  og  $O_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , er  $(S_N, T_N)$  og  $(Z_{Nj})_{j \in \mathbb{N}}$  i.s.u.,

$$\begin{aligned} Y_j, j \in \mathbb{N}, & \text{ er i.s.u. med } Y_j \sim \Gamma\left(\frac{1}{O_j}, M_j\right), \\ Z_{Nj}, j \in \mathbb{N}, & \text{ er i.s.u. med } Z_{Nj} \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^N O_k}\right), \\ R_{Nj}, j \in \mathbb{N}, & \text{ er i.s.u. med } \mathbb{P}(R_{Nj} = i) = \frac{O_i}{\sum_{k=1}^N O_k}, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Den generelle model indeholder foruden vores fødselsdagsproblem også mange andre tilsvarende problemer, f.eks. det klassiske fødselsdagsproblem; Hvad er det gennemsnitlige antal personer skal der til for at to har fødselsdag på samme dag?

## Den sædvanlige model

Fødselsdagsproblemet med et år med  $n$  dage og med i.s.u. og ligefordelte fødselsdage er givet ved  $N \equiv n$ ,  $M_i \equiv 1$  og  $O_i \equiv \frac{1}{n}$ . I denne situation gælder

$$Y_i \sim \Gamma(n, 1) = \text{Exp}(n), \quad Z_{nk} \sim \text{Exp}(1),$$

og dermed

$$\mathbb{P}(V_n \leq y) = \mathbb{P}(\max\{Y_1, \dots, Y_n\} \leq y) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(Y_j \leq y) = (1 - e^{-\frac{y}{n}})^n.$$

Ligning (4) og regnereglerne for betingede middelværdier og betingede varianser giver

$$E(V_n) = E\left(E\left(\sum_{j=1}^{T_n} Z_{nj} \mid T_n\right)\right) = E(T_n),$$

$$\text{Var}(V_n) = E\left(\text{Var}\left(\sum_{j=1}^{T_n} Z_{nj} \mid T_n\right)\right) + \text{Var}\left(E\left(\sum_{j=1}^{T_n} Z_{nj} \mid T_n\right)\right) = E(T_n) + \text{Var}(T_n),$$

og dermed

$$E(T_n) = E(V_n), \quad \text{Var}(T_n) = \text{Var}(V_n) - E(V_n).$$

Via substitutionen  $u = e^{-\frac{y}{n}}$  og rækkeudviklingen  $\log u = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-u)^j}{j}$  fås

$$\begin{aligned} E(V_n) &= \int_0^{\infty} ye^{-\frac{y}{n}}(1 - e^{-\frac{y}{n}})^{n-1} dy = n^2 \int_0^1 (-\log u)(1 - u)^{n-1} du \\ &= n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(1-u)^{n+j-1}}{j} du = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^2}{j(n+j)} = \sum_{j=1}^n \frac{n}{j}, \\ E(V_n^2) &= n^3 \int_0^1 (\log u)^2 (1-u)^{n-1} du = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^3}{jk(n+j+k)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+j} \frac{n^3}{j(n+j)k} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^3}{j(n+j)k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=k-n}^{\infty} \frac{n^3}{j(n+j)k} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{n}{j}\right)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=k-n}^{k-1} \frac{n^2}{jk}, \end{aligned}$$

og da  $\sum_{j=1}^n 1/j = \log n + \gamma + o(1)$ , hvor  $\gamma = -\Gamma'(1) = 0.5772156\dots$  er Eulers konstant,

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{j=1}^n \frac{n}{j} = n(\log n + \gamma + o(1)), \\ \text{Var}(T_n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{n+k-1} \frac{n^2}{j(n+k)} - \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} < \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)}{k} < n^2(\log n + 1), \end{aligned}$$

hvormed anden halvdel af side 9-sætningen følger via Chebychevs ulighed. Ifølge store tals stærke lov gælder

$$\begin{aligned} V_n &= T_n \left( \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^{T_n} Z_{nj} \right) \approx T_n \cdot E(Z_{nj}) = T_n, \\ q(k, n) &= \mathbb{P}(T_n \leq k) \approx \mathbb{P}(V_n \leq k) = (1 - e^{-\frac{k}{n}})^n \approx \exp(-ne^{-\frac{k}{n}}), \end{aligned}$$

men variansen af  $V_n - T_n = \sum_{j=1}^{T_n} (Z_{nj} - 1)$ , som er givet ved

$$E(\text{Var}(\sum_{j=1}^{T_n} (Z_{nj} - 1) | T_n)) + \text{Var}(E(\sum_{j=1}^{T_n} (Z_{nj} - 1) | T_n)) = E(T_n),$$

er for stor til at disse approksimationer er pålidelige. For at få første halvdel af side 9-sætningen bliver vi således nødt til at bruge det asymptotiske resultat

$$\mathbb{P}(T_n - n \log n \leq nx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

som er vist i litteraturen. For  $n$  stor kan  $q(k, n)$  dermed approksimeres ved

$$q(k, n) = \mathbb{P}(T_n - n \log n \leq k - n \log n) \approx \exp\left(-\exp\left(-\frac{k}{n} + \log n\right)\right),$$

og specielt fås

$$q(k, 365) \approx \frac{1}{2} \implies k \approx 365(\log 365 - \log \log 2) \approx 2287.24,$$

hvilket passer perfekt med den numeriske beregning baseret på formel (1).

## En realistisk model

Det er en kendsgerning at fødselsdage ikke er i.s.u. og ligefordelte på årets dage. I tabellen nedenfor er der angivet nogle af årsagerne til afvigelserne fra de sædvanlige antagelser.

Årsager til afvigelser fra	
Stokastisk uafhængighed	Ligefordelingen
1: Tvilling (trilling . . . ) fødsler	1: Årstidsvariationer
2: Vekselvirkninger mellem fødsler	2: Ugedagsvariationer
3: Kollektive hændelser	

De foreslåede årsager er ordnet efter hvor betydningsfulde jeg formoder de er. Under stor risiko for at afsløre min manglende viden om faktorer der sætter fødsler i gang vil jeg uddybe de to sidste årsager i kolonnen *Stokastisk uafhængighed*. Givet stor travlhed på en fødegang kunne det tænkes at man venter med at sætte fødsler i gang, og evt. udskyder dem til næste dag. Dette ville være en vekselvirkning mellem fødsler, der medfører negativ korrelation. Det kan være at meteorologiske fænomener, f.eks. højt lufttryk, kan sætte en fødsel i gang. Dermed ville en kollektiv begivenhed (højt lufttryk) medføre positiv korrelation mellem fødsler. Vi vil nøjes med at korrigere for fler-fødsler og årstidsvariationer, som jeg tror forklarer de væsentligste afvigelser fra de sædvanlige antagelser. Antallet af i.s.u. ligefordelte fødselsdage der skal bruges for at dække alle årets dage viser



Antal fødte	1981	1982	1983	1984	1985	Ialt
Januar	4200	4368	3863	3974	4060	20465
Februar	4087	4067	3864	3871	3952	19841
Marts	4595	4732	4597	4653	4662	23239
April	4765	4640	4577	4570	4929	23481
Maj	4745	4876	4363	4623	4834	23441
Juni	4725	4600	4521	4490	4604	22940
Juli	4790	4606	4474	4545	4826	23241
August	4545	4405	4493	4546	4754	22743
September	4616	4334	4342	4340	4631	22263
Oktober	4155	4239	4188	4247	4422	21251
November	3870	3878	3816	4027	4037	19628
December	3996	3913	3724	3776	4038	19447
Ialt	53089	52658	50822	51662	53749	261980
Tvillinger	1038	1064	1036	1134	1174	5446
Trillinger	21	18	21	21	21	102

Kilde: *Befolkningens bevægelser*, 1981-1985, Danmarks Statistik.

Antal fødte for februar 1984 er korrigeret for skudår.

med stor tydelighed, at der skal bruges rigtigt mange observationer for at få et estimat af fødselsdagens fordeling på datoer, hvor enkelte sandsynligheder ikke underestimeres. Og da små sandsynligheder vil hæve det forventede antal fødselsdage der skal bruges for at dække året betydeligt er det dermed både rimeligt og praktisk at antage, at fødselsdagsfordelingen er konstant indenfor måneder. Specielt vil vi se bort fra særlige dage såsom juleaftensdag, nytårsdag og d. 29. februar. Det skal overvejes hvordan afvigelsen fra ligefordelingen skal beskrives i den generelle model. Det mest poetiske ville være at lade intensiteterne  $O_j$  være stokastiske og identisk fordelt i forhold til den empiriske fordeling af fødselsdage. Efter nogen overvejelse indses det dog, at det korrekte er at vælge intensiteterne deterministisk efter den empiriske fordeling. Vi får dermed

$$O_{\text{md}} \equiv \frac{1}{|\text{md}|} \frac{\text{Antal fødte (md,ialt)}}{\text{Antal fødte (ialt,ialt)}}, \quad \text{md}=\text{jan}, \dots, \text{dec},$$

$$E(Z_{365,j}) = E\left(\text{Exp}\left(1/\sum_{\text{md}=\text{jan}}^{\text{dec}} |\text{md}|O_{\text{md}}\right)\right) = 1,$$

$$\mathbb{P}(V_{365} \leq y) = \prod_{\text{md}=\text{jan}}^{\text{dec}} (1 - e^{-O_{\text{md}}y})^{|\text{md}|},$$

$$E(V_{365}) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(V_{365} > y) dy < \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{P}(V_{365} > y) < E(V_{365}) + 1.$$

Ved at summere baglæns fra  $\infty$  (approksimeret ved 9999) til 0 fås, at det forventede antal fødsler der skal til at dække året er givet ved

$$E(T_{365}) = \frac{E(V_{365})}{E(Z_{365,j})} = E(V_{365}) \in (2403.18, 2404.18).$$

Endelig korrigeres for at tvilling hhv. trilling fødsler giver anledning til to hhv. tre fødselsdage. Dermed er det forventede antal fødselsdage givet ved

$$\frac{261980}{261980 - \frac{1}{2}5446 - \frac{2}{3}102} E(T_{365}) \in (2429.06, 2430.06),$$

hvilket skal sammenholdes med  $\sum_{j=1}^{365} \frac{365}{j} = 2364.646$ , som fås under de sædvanlige antagelser.

## Afsluttende bemærkninger

I den naive sandsynlighedsregning er en stokastisk variabel  $X$  beskrevet ved et udfaldsrum  $E$  og en sandsynlighedsfordeling  $P$  på  $E$ . Man skriver

$$X \sim (E, P),$$

og kalder parret  $(E, P)$  for et sandsynlighedsfelt. I den målteoretiske formulering af sandsynlighedsregningen er en stokastisk variabel  $X$  med udfaldsrum  $(E, \mathcal{A})$ , hvor  $\mathcal{A}$  er en  $\sigma$ -algebra på  $E$ , og fordeling  $P$  en målelig funktion på et bagvedliggende sandsynlighedsfelt med værdier i  $E$  og med billedmål  $P$ ,

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E, \mathcal{A}, P), \quad P = X(\mathbb{P}). \quad (5)$$

Givet et sandsynlighedsmål  $P$  på  $(E, \mathcal{A})$  så finder der altid et bagvedliggende sandsynlighedsfelt  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  og en målelig afbildning  $X$  så (5) er opfyldt. Man kan f.eks. bruge  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (E, \mathcal{A}, P)$  og  $X = id_E$ . Jeg vil slutte med at fremhæve to gode grunde til at arbejde med bagvedliggende sandsynlighedsfelter.

Matematisk set er det praktisk at lave sandsynlighedsregning uden sandsynligheder; Altså at glemme sandsynlighedsmålene og arbejde med stokastiske variable som funktioner. Denne artikels helt essentielle formler (4) er fremragende eksempler på dette. Ved at indlejre problemstillingen i en poissonproces blive svarene på vores spørgsmål indlysende og af en nærmest fysisk karakter. Når vi så kender svarene kan vi derefter inddrage de besværlige sandsynlighedsmål. Og idet fordelingen af en poissonproces indeholder megen stokastisk uafhængighed bliver disse sandsynligheder endda lette at regne med.

Statistisk set er det bagvedliggende sandsynlighedsfelt nødvendigt for man kan tale om observationer. En observation af en stokastisk variabel er nemlig et konkret element i udfaldsrummet som i en eller anden forstand alligevel har en fordeling. En sådan realisation  $X(\omega)$  af en stokastisk variabel  $X$  fås let ved at indsætte et  $\omega$ , og så overlade det til naturen at trække dette  $\omega \in \Omega$  ud fra det bagvedliggende sandsynlighedsmål  $\mathbb{P}$ .

## Opgaveløsninger

Her følger først Toke Lindegaard Knudsens egen løsning på den opgave som han stillede i forrige nummer af FAMØS på side 31.

Lad os først forsøge at udfylde et kvadrat med 21 mindre kvadrater. Antag at vi har  $m$  kvadratiske mursten med sidelængde  $\alpha$  og  $n$  kvadratiske mursten med sidelængde  $\beta$ , hvor  $m + n = 21$ . Da disse 21 mursten tilsammen udfylder et kvadrat med sidelængde 1 må der gælde, at

$$m\alpha^2 + n\beta^2 = 1.$$

Det er dog vigtigt at indse, at en løsning til denne ligning ikke nødvendigvis løser vores problem. For eksempel vil 9 mursten med sidelængde  $\frac{11}{39}$  og 12 mursten med sidelængde  $\frac{2}{13}$  *ikke* udfylde et kvadrat med sidelængde 1, selvom der gælder  $9 \times \left(\frac{11}{39}\right)^2 + 12 \times \left(\frac{2}{13}\right)^2 = 1$  (bevist overlades til læseren).

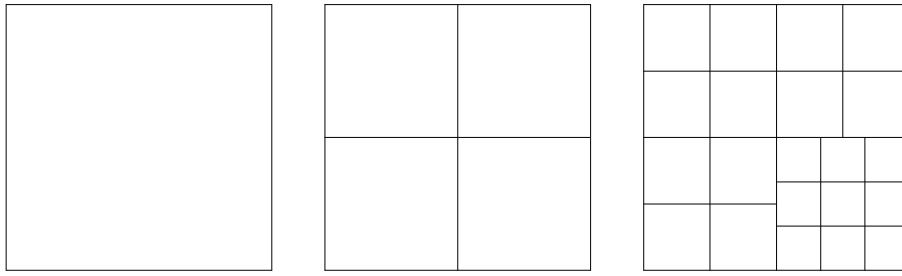
Opgaven kan dog løses simpelt på anden vis. Den første idé som jeg kom på, da jeg forsøgte at løse opgaven var (med samme notation som ovenfor) at antage, at et af heltallene  $m$  eller  $n$  er et kvadrattal, for eksempel  $m = k^2$ . Da  $m + n = 21$  er der netop fire tilfælde, hvor  $m$  er et kvadrattal, nemlig  $m = 1, 4, 9, 16$ . Vi kan nu placere de  $m = k^2$  mursten med sidelængde  $\alpha$  inden i det oprindelige kvadrat med sidelængde 1 som et kvadrat med sidelængde  $k\alpha$ . Tilbage har vi  $n$  mursten med sidelængde  $\beta$ . Disse kan man forsøge at arrangere som en gnomon<sup>1</sup> omkring kvadratet med sidelængden  $k\alpha$ , således at det store kvadrat bliver udfyldt. Disse overvejelser leder let til følgende løsninger på vores problem:

$$(m, n, \alpha, \beta) = \begin{cases} (1, 20, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}) \\ (4, 17, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}) \\ (9, 12, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}) \\ (16, 5, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}) \end{cases}.$$

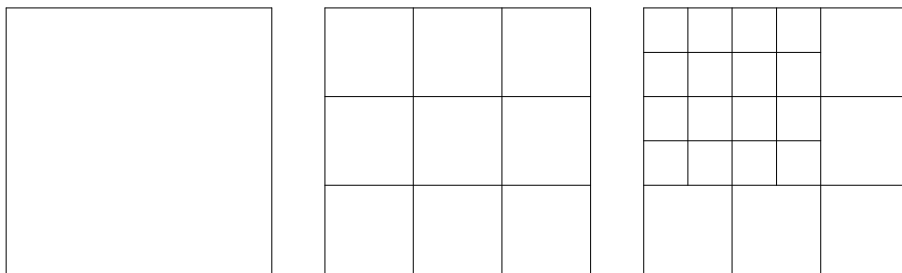
Bemærk, at disse alle er løsninger—de resulterende 21 kvadrater kan udfylde et kvadrat med sidelængde 1.

Den metode som jeg tror, at de oldindiske matematikere har benyttet er følgende: Ved at dele hver af siderne i et kvadrat i  $i$  lige store dele kan vi inddele kvadratet i  $i^2$  mindre kvadrater. Dette princip kan udnyttes til at løse vores problem. Lad os starte med et kvadrat med sidelængde 1. Først deles kvadratet op i fire lige store kvadrater. Tre af disse deles igen op i fire lige store kvadrater, mens det sidste deles op i ni lige store kvadrater. Dette er illustreret på figur 1. Hermed har vi fået opdelt det oprindelige kvadrat i 21 mindre kvadrater.

<sup>1</sup>Gnomonerne er de L-formede figurer som kvadraterne danner til højre i figur 1 og 2.



**Figur 1:** Udfyldning af et kvadrat med 9 kvadrater med sidelængde  $\frac{1}{6}$  og 12 kvadrater med sidelængde  $\frac{1}{4}$



**Figur 2:** Udfyldning af et kvadrat med 5 kvadrater med sidelængde  $\frac{1}{3}$  og 16 kvadrater med sidelængde  $\frac{1}{6}$

Alternativt kan vi opdele det oprindelige kvadrat i ni lige store kvadrater. Fire af disse kvadrater inddeles dernæst i fire lige store kvadrater. Dette er vist på figur 2. Dette giver en anden opdeling af det oprindelige kvadrat i 21 mindre kvadrater.

De to løsninger som vi har fundet ved hjælp af denne gentagne opdeling i mindre kvadrater er

$$(m, n, \alpha, \beta) = \left\{ \begin{array}{l} (9, 12, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}) \\ (16, 5, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}) \end{array} \right. , \quad (1)$$

som var blandt de fire løsninger som vi fandt ovenfor. Disse to løsninger er netop de løsninger på problemet, som angives i den oldindiske tekst Baudhāyana-śulbasūtra (ca. 800 f.kr.).

Bemærker vi, at begge disse løsninger anvender kvadrater med sidelængde  $\frac{1}{6}$  er det nu klart, at vi kan opbygge det ønskede alter i fem lag ved brug af tre slags kvadratiske mursten (med sidelængder henholdsvis  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  og  $\frac{1}{6}$ ). Vi kan nemlig let omarrangere slutresultaterne i figur 1 og figur 2 således, at de kan placeres ovenpå hinanden uden at kanterne på murstenene falder sammen (undtagen på randen). Denne opgave overlades til læseren. Dette er faktisk den løsning på opgaven der anvender færrest typer kvadratiske mursten, da opgaven ikke kan løses hvis man kun har to typer kvadratiske mursten til rådighed. Hermed har vi fundet en

løsning på vores egentlige opgave: Med så få størrelser af kvadratiske mursten som muligt ønskes et kvadratisk alter opbygget i fem lag (af disse er første, tredje og femte lag samt andet og fjerde lag identiske) således, at kanterne på murstene i to på hinanden følgende lag ikke falder sammen. Vi benytter et omarrangement af slutresultatet i figur 1 som første, tredje og femte lag, og et omarrangement af slutresultatet i figur 2 som andet og fjerde lag.

---

Henning Makholm har sendt os fire løsninger på problemet (se figur 3), i sit brev skriver Henning:

Jeg formoder (og pusler på et bevis) at disse fire løsninger er de eneste løsninger med højst to slags sten i hvert lag, udover løsninger der kan afledes fra dem ved at flytte rundt på stenene internt i et eller begge lag.

Af sådanne afledte løsninger findes der (modulo rotationer og spejlinger) én for løsning A, nul for løsningerne B og C, og mange for løsning D.

Løsning A anvender kun tre kantlængder ialt, og må derfor formodes at være optimal ifølge Tokes "jo færre jo bedre"-kriterium.

Variant: hvad sker der hvis vi stiller os det modsatte mål, altså at bruge så mange forskellige sidelængder som muligt (og altså stadig bruge netop  $2 \times 21$  kvadratiske sten)? Jeg har en løsning med 12 forskellige sidelængder, men jeg er ikke sikker på at der ikke er en med 13 eller flere. I modsætning til den minimale løsning er det her ganske uoverkommeligt blot at inspicere alle alternative løsninger en ad gangen for at udelukke at der findes en bedre – der skal matematik til!

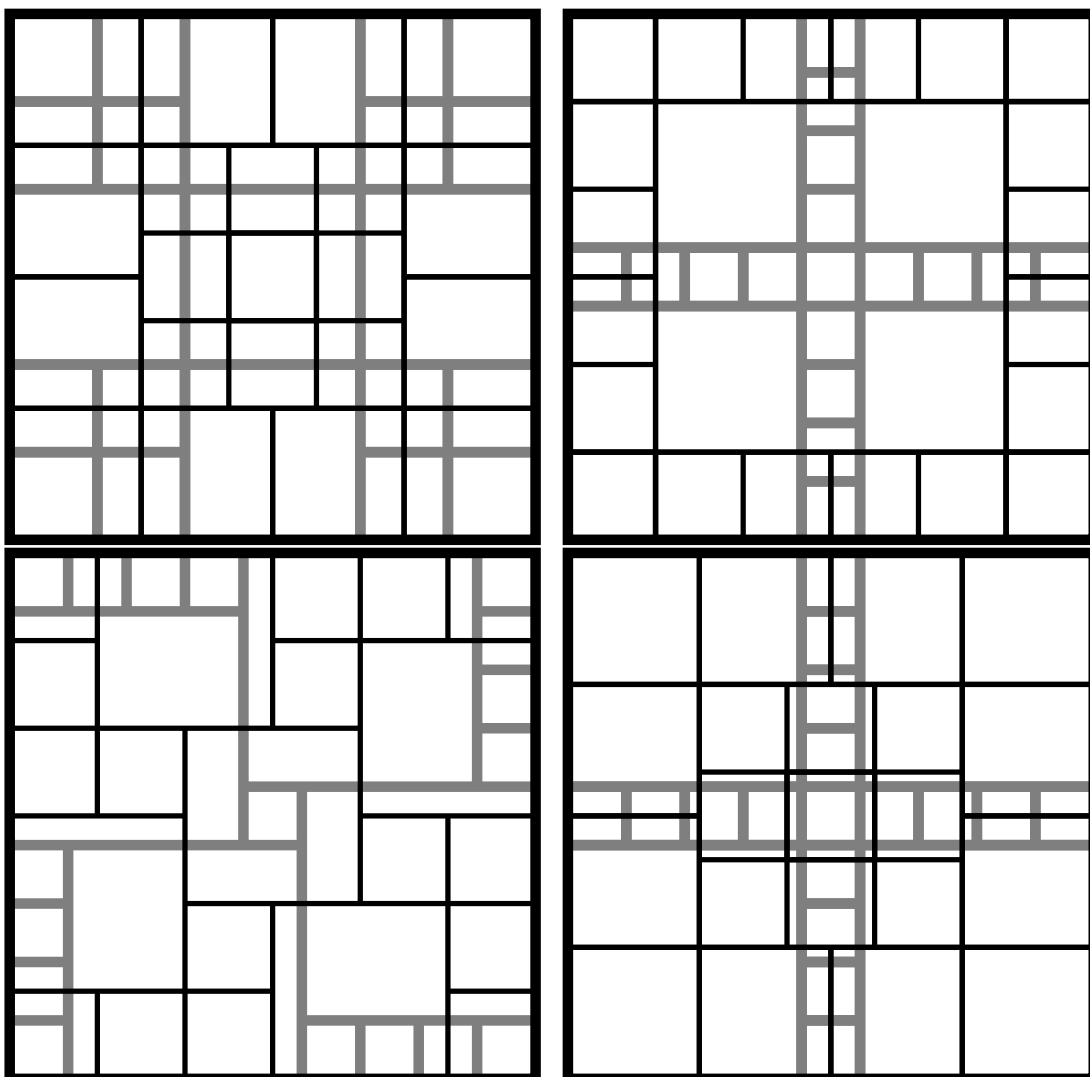
Yderligere en variant: Hvorfor netop 21 sten i hvert lag? Hvis vi generaliserer til at der skal være  $n$  sten i hvert lag, kan vi undersøge hvordan det maksimale antal kantlængder  $M(n)$  varierer. Fx er min formodning ovenfor at  $M(21) = 12$ . For  $n$  hvor opgaven er uløselig, fx  $n = 3$  eller  $n = 4$ , kan vi sætte  $M(n) = 0$ . Vis at  $M(n)$  asymptotisk er lineær (altså at der findes  $N, \alpha, \beta$  så  $\alpha n < M(n) < \beta n$  for  $n > N$ ).

---

I sidste nummer stillede Henning Makholm et par opgaver, Asger Grunnet har kigget på dem, og indsendt følgende . . .

**Definition.** For en kontinuert funktion  $f$  på  $[0; 1]$  defineres mængden  $V(f)$  af vandrette afstande for  $f$  ved :

$$V(f) = \{\alpha \in ]0; 1[ \mid \exists x \in [0; 1 - \alpha] : f(x) = f(x + \alpha)\}.$$



**Figur 3:** Hennings fire løsninger

**Lemma.** Lad  $f$  være en kontinuert funktion på  $[0; 1]$ . Lad  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in [0; 1]$  opfylde at  $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2$ . Sæt  $m = \max\{f(x) | x \in [a_1; b_2]\}$ . Antag at  $f([a_1; b_1]) = f([a_2; b_2]) = [0; m]$ , og vælg  $z_1 \in [a_1; b_1]$  og  $z_2 \in [a_2; b_2]$  så  $f(z_1) = f(z_2) = 0$ . Så er  $]0; z_2 - z_1] \subseteq V(f)$ .

**Bevis.** Lad  $\alpha \in ]0; z_2 - z_1]$ . Mængden  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  defineres ved :

$$M = \{(x, y) | x \in [a_1; b_2] \text{ og } y \leq f(x)\}.$$

Betragt kurven  $\gamma : [a_1 + \alpha; b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  givet ved  $\gamma(x) = (x, f(x - \alpha))$ .

Vi ønsker at vise at der findes punkter  $x_1$  og  $x_2$ , så  $\gamma(x_1) \notin M$  og  $\gamma(x_2) \in M$ . I så fald kan vi, idet  $\gamma$  er kontinuert, finde et punkt  $x$ , så  $\gamma(x)$  ligger på randen

af  $M$ , det vil sige så  $\gamma(x) = (x, f(x))$ , men så må  $f(x) = f(x - \alpha)$ , hvilket viser at  $\alpha \in V(f)$ .

Vælg  $m_1 \in [a_1; b_1]$  og  $m_2 \in [a_2; b_2]$ , så  $f(m_1) = f(m_2) = m$ .

- (1a) For  $m_1 + \alpha \leq b_2$  er  $f(m_1) = m \geq f(m_1 + \alpha)$ . Hvis  $f(m_1) = f(m_1 + \alpha)$  er vi færdige. Ellers er  $f(m_1) > f(m_1 + \alpha)$  og dermed er  $\gamma(m_1 + \alpha) \notin M$ .
- (1b) For  $m_1 + \alpha > b_2$  er  $b_1 \geq m_1 > b_2 - \alpha$ , så  $f$  er ikke-negativ på intervallet  $[a_1; b_2 - \alpha]$ , specielt er  $f(z_2) = 0 \leq f(z_2 - \alpha)$ . (Bemærk at vi her udnytter valget af  $\alpha$  til at slutte at  $z_2 - \alpha \geq z_1 \geq a_1$ .) Igen har vi enten at  $f(z_2) = f(z_2 - \alpha)$  eller at  $\gamma(z_2) \notin M$ .
- (2a) For  $a_1 + \alpha \leq m_2$  er  $f(m_2) = m \geq f(m_2 - \alpha)$ . Vi har derfor at  $\gamma(m_2) \in M$ .
- (2b) For  $a_1 + \alpha > m_2$  er  $f$  ikke-negativ på  $[a_1 + \alpha; b_2]$ , specielt er  $f(z_1 + \alpha) \geq 0 = f(z_1)$ , og vi har at  $\gamma(z_1 + \alpha) \in M$ .

Dette viser at de to ønskede punkter findes og dermed er lemmaet bevist.

**Sætning.** Lad  $p$  være et polynomium af grad højst  $2n$  med  $p(0) = p(1)$ . Så er  $]0; \frac{1}{n}] \subseteq V(p)$ .

**Bevis.** Først deler vi intervallet  $[0; 1]$  op i delintervaller med endepunkter  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$ , så  $p$  er skiftevis positiv og negativ på delintervallerne. (Her regnes tallet 0 for både positivt og negativt.) Idet en lodret forskydning af  $p$  ikke ændrer på de vandrette afstande, kan det antages at  $p(0) = p(1) = 0$ . Desuden kan det antages at  $p$  er positiv på intervallet  $[x_0; x_1]$ , idet vi ellers erstatter  $p$  med  $-p$ . Da  $p$  højst har  $2n$  nulpunkter i  $[0; 1]$ , slutter vi at  $m \leq 2n - 1$ .

Vælg nu  $i_1 < m$ , så  $p$ 's maksimumsværdi på  $[0; 1]$  antages i intervallet  $[x_{i_1}; x_{i_1+1}]$ . Vælg derefter  $i_2 < i_1$ , så  $p$ 's maksimumsværdi på  $[0; x_{i_1}]$  antages i intervallet  $[x_{i_2}; x_{i_2+1}]$ . Forsæt således indtil  $i_r = 0$ . Bemærk at  $i_{k-1} - i_k \geq 2$  for  $1 < k \leq r$ , idet  $p$  kun er positiv på hvert andet delinterval.

Vi bruger nu lemmaet med  $(a_1, b_1, a_2) = (x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_{k-1}})$  og  $b_2$  valgt passende i  $[x_{i_{k-1}}; x_{i_{k-1}+1}]$ , og får at  $]0; x_{i_{k-1}} - x_{i_k}] \subseteq V(p)$  for  $1 < k \leq r$ .

På tilsvarende måde vælges  $j_1 = i_1 + 1 < j_2 < \dots < j_s$ , så  $j_k - j_{k-1} \geq 2$  og  $]0; x_{j_k} - x_{j_{k-1}}] \subseteq V(p)$  for  $1 < k \leq s$ . Hvis  $m$  er lige, er  $p$  negativ på intervallet  $[x_{m-1}, x_m]$  og vi har at  $j_s = m - 1$ . Ellers er  $j_s = m$ .

Antag at  $p$  antager sin maksimumsværdi i punktet  $m \in [x_{i_1}; x_{i_1+1}]$ . Med  $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (x_{i_1}, m, m, x_{i_1+1})$  giver lemmaet at  $]0; x_{i_1+1} - x_{i_1}] \subseteq V(p)$ . I tilfældet hvor  $m$  er lige, bruges samme metode på intervallet  $[x_{m-1}; x_m]$  (idet man bruger lemmaet på  $-p$  for at gøre funktionen positiv) og vi får ligeledes at  $]0; x_m - x_{m-1}] \subseteq V(p)$ .

Betragt nu delintervallerne givet ved endepunkterne

$$0 = x_{i_r} < \dots < x_{i_1} < x_{j_1} < \dots < x_{j_s}$$

(samt intervallet  $[x_{m-1}; x_m]$  hvis  $m$  er lige). Da  $i_{k-1} - i_k \geq 2$  og  $j_k - j_{k-1} \geq 2$  er der ialt højst  $\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor \leq n$  delintervaller. Tilsammen har de længde 1, så et af delintervallerne må have længde mindst  $\frac{1}{n}$ . Dermed må  $]0; \frac{1}{n}] \subseteq V(p)$  som ønsket.

**Bemærkning.** Sætningen giver en partiel løsning på Henning Makholms anden opgave fra sidste nummer af FAMØS. Min egen personlige hypotese er at man ikke kan gøre det bedre, altså at rummet af polynomier af grad højst  $2n - 1$  eller højst  $2n$  præcis vil have de vandrette afstande

$$V = \left]0; \frac{1}{n}\right] \cup \left\{ \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

Det er dog ikke lykkedes mig at vise dette.



# Sommerskole i ikke-relativistisk QED

Jakob Stubgaard

## Indledning

Denne artikel beskriver indholdet af en sommerskole jeg deltog i på Sandbjerg slot nær Sønderborg i dagene 2–9 august. Sommerskolen var arrangeret af MaPhySto (Centre for Mathematical Physics and Stochastics), som er en dansk forening, der er dannet for at styrke forskningen inden for centrets områder. Vi var i alt 3 studerende fra matematisk afdeling, og vi var alle tre så heldige at få dækket alle vores udgifter af Julie Damms studiefond.

Sommerskolens emneområde var matematisk fysik. Emnet er i høj grad anvendelsesorienteret, noget der til tider er ret underprioriteret i matematik. Men dermed ikke sagt at matematikken der anvendes er triviel, snarere tværtimod. Man skal have haft en del fysikkurser og man benytter også mange forskellige discipliner fra matematikken.

Det mere præcise indhold af sommerskolen var at studere *ikke-relativistisk kvanteelektrodynamik*, forkortet *I.R. QED*. QED er en fysisk teori for den elektromagnetiske vekselvirkning mellem elementarpartikler. Teorien er en kvantemekanisk generalisering af den klassiske elektromagnetiske teori. Man tager altså specielt højde for, at lys forekommer i kvanter (masseløse fotoner) med en energi, der er proportional med lysets frekvens. Styrken hvormed elektron og elektromagnetisk felt påvirker hinanden kaldes *koblingskonstanten*. Beregninger i QED udføres efter en rækkeudvikling i potenser af denne koblingskonstant, betegnet  $\gamma$ , og for hver gang man medtager en højere potens af koblingskonstanten stiger beregningernes omfang ganske betragteligt. Teorien har haft mange succeser, for eksempel kan nævnes en forudsigelse af elektronens magnetiske moment, et resultat der er blevet eftervist eksperimentelt med stor præcision. Derudover kan teorien forklare små afvigelser mellem målte atomspektre og de resultater der forudsiges i simple modeller, ligesom comptoneffekten kan forklares i QED. Nedenfor vil jeg prøve at skitsere den allermest basale teori og dernæst formulere nogle af de problemer, der arbejdes på i I.R. QED. Endelig har jeg medtaget et eksempel for at illustrere, at man let kan komme ud i et betydeligt beregningsarbejde når man arbejder med I.R. QED. Eksemplet er ret langt og teknisk og kan evt. overspringes.

## Definitioner

En af de vigtige matematiske forudsætninger for at studere denne gren af matematisk fysik er mål- og integralteori. Specielt er det vigtigt at kende Hilbert rummet  $L^2$ . I det følgende skelnes ikke mellem en funktion og dens ækvivalensklasse. En anden vigtig ingrediens er ubegrænsede operatorer på Hilbert rum samt deres spektralteori (indholdet af Mat4AN hvert andet år). En ubegrænset operator er en lineær afbildning defineret på en tæt delmængde af det betragtede Hilbert rum, som antager sine værdier i Hilbert rummet. Ubegrænsede operatorer er mere besværlige at håndtere end sædvanlige begrænsede operatorer, men i denne artikel vil jeg ikke gå i detaljer med dette. Specielt vil jeg ikke gå i detaljer med begreber som domæner, selvadjungerethed, spektrum mv.

## Frie elektroner

Først betragtes en fri urelativistisk elektron. I kvantefysikken er elektronens tilstand beskrevet ved en normeret bølgefunktion,  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , hvor bølgefunktionens kvadrat,  $|\psi(x)|^2$ , angiver sandsynlighedstætheden for at finde elektronen i positionen  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Da elektronen er fri, dvs. ikke er påvirket af nogen ydre kræfter, består dens energi udelukkende af den kinetiske energi. Klassisk er den kinetiske energi for elektronen givet som  $K = \frac{1}{2}mv^2$ , hvor  $m$  er elektronmassen og  $v$  er dens hastighed. Indføres impulsen,  $p = mv$ , fås udtrykket  $K = \frac{p^2}{2m}$ .

I kvantemeknikken gælder, at der til enhver fysisk observabel er knyttet en selvadjungeret operator, hvis egenværdier er de tilladte værdier for den observable fysiske størrelse. Det bemærkes specielt at man ikke kan have en vilkårlig energi i de fysiske systemer. Energien *skal* være en egenværdi til energioperatoren, som ofte kaldes Hamiltonoperatoren og betegnes  $H$ . Det viser sig at disse egenværdier altid er reelle (da operatorerne er selvadjungerede), hvilket fra en fysikers synspunkt er helt rimeligt, da man ikke kan have at en partikel f.eks. har en kompleks kinetisk energi. Det ubehagelige er, og denne pointe hører man aldrig om i fysikkurser, at de tilhørende operatorer næsten altid er ubegrænsede. For impulsen er den tilhørende operator  $p = \frac{\hbar}{i}\nabla$ , defineret på Hilbert rummet  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . I eksemplet med den kinetiske energi for elektronen er den tilhørende operator altså givet som  $K = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ . Her er  $m$  igen elektronmassen,  $\hbar$  er Plancks konstant og  $\Delta$  er Laplaceoperatoren, dvs.  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ . Hamiltonoperatoren bliver i denne situation  $H = K = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ .

Af bekvemmelighedsgrunde sættes alle konstanterne foran Laplaceoperatoren ofte lig med 1, så det vil jeg også gøre her. Det bemærkes iøvrigt at operatoren  $K$  (og  $H$ ) ikke er defineret på hele Hilbert rummet  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , men kun på en tæt delmængde, f.eks. på mængden  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  af uendeligt ofte differentiable funktioner med kompakt støtte. Operatoren er ubegrænset, og *er* faktisk også selvadjungeret

når den bliver defineret på en passende mængde, indeholdende  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , nemlig på  $\mathcal{H}^2$ , Sobolev rummet af orden 2 (se [5] s.69).

Den proces hvori man til de fysiske størrelser knytter operatorer på et Hilbert rum kaldes kvantisering af den fysiske model. Det kan nævnes, at der som optakt til sommerskolen ved Sandbjerg blev arrangeret et kursus ved Matematisk Institut, hvor man kunne lære forskellige kvantiseringemetoder. Opgaven består da i at vælge den kvantisering, som giver de resultater, der stemmer overens med fysiske eksperimenter.

Hvis elektronen placeres i et ydre kraftfelt med potentialet  $V(x)$ , dvs. kraften er givet som  $F = -\nabla V$ , så er elektronens totale energi klassisk givet som  $E = K + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ . Kvantemekanisk er de tilladte energier for elektronen, som før, givet ved egenverdierne til Hamiltonoperatoren  $H = -\Delta + V(x)$ . Her virker  $V(x)$  på bølgefunktionen som en multiplikation med  $V(x)$ . I eksemplet vil vi betragte det tilfælde, hvor  $V(x)$  er det harmoniske potential i en dimension.

Vi betragter nu  $N$  elektroner som alle befinder sig i potentialet  $V(x)$ . Det kunne f.eks. være  $N$  elektroner omkring en atomkerne. Det relevante Hilbert rum til at beskrive et sådant elektronsystem er da det antisymmetriske tensorprodukt  $\mathcal{H}_A = \bigotimes_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ . Hvad jeg mener med dette forklares nedenfor.

Generelt kan tensorproduktet af to Hilbertrum beskrives på følgende måde:

Lad  $\mathcal{H}_1$  og  $\mathcal{H}_2$  være Hilbert rum. Tensorproduktet  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  er da givet som (den abstrakte afslutning af) mængden af endelige linearkombinationer af par på formen  $\psi_1 \otimes \psi_2$ , hvor  $\psi_i \in \mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Her er  $\psi_1 \otimes \psi_2$  en betegnelse for den konjugerede bilinearform som virker på  $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$  ved at  $(\psi_1 \otimes \psi_2)(\phi_1, \phi_2) = \langle \psi_1, \phi_1 \rangle \langle \psi_2, \phi_2 \rangle$ . De skarpe parenteser angiver de indre produkter på  $\mathcal{H}_1$  hhv.  $\mathcal{H}_2$ .

Man laver et indre produkt på tensorproduktet ved at kræve at  $\langle \psi_1 \otimes \psi_2, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = \langle \psi_1, \phi_1 \rangle \langle \psi_2, \phi_2 \rangle$  og denne definition udvides da til alle endelige linearkombinationer ved at kræve sesquilinearitet. Det er under den norm som dette indre produkt inducerer, at man laver en abstrakt afslutning.

Med denne definition gælder altså, at et typisk element i  $\mathcal{H}_A$  er en linearkombination af " $N$ -tupler"  $\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_N$ , med  $\phi_i \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  for alle  $i = 1, \dots, n$ , og hvor det indre produkt mellem to tilstande,  $\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_N$  og  $\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_N$  er givet som  $\langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_N, \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_N \rangle = \langle \phi_1, \psi_1 \rangle \dots \langle \phi_N, \psi_N \rangle$ .

Det bemærkes desuden at den cykliske gruppe af orden 2 optræder i definitionen af  $\mathcal{H}_A$ . Dette skyldes, at elektronen også har en indre frihedsgrad, spinnets, som enten kan være op (1) eller ned (-1). Elektronens spin har en (minimal) indflydelse på dens energi. I en detaljeret model bliver man nødt til at tage højde for dette, men det vil jeg se bort fra nedenfor.

Grunden til at vi kalder  $\mathcal{H}_A$  for det antisymmetriske tensorprodukt skyldes følgende ekstra krav:

Lad  $\sigma$  tilhøre permutationsgruppen af  $N$  elementer,  $S_N$ , og lad  $\epsilon(\sigma)$  være for-

tegnet af  $\sigma$ . Vi definerer da en lineær operator på  $\bigotimes_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ , som også betegnes  $\sigma$ , ved at kræve at

$\sigma(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_N) = \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(N)}$ . Denne operator udvides ved linearitet til hele tensorproduktet. Dernæst sættes  $A_N = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \sigma$ , og det der kræves er at alle elementerne i det antisymmetriske tensorprodukt skal være invariante ved  $A_N$ .

Rummet  $\mathcal{H}_A$  kan på naturlig måde identificeres med (dvs. er unitært ækvivalent med) det underrum af  $L^2((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)^N)$ , der består af de funktioner der er antisymmetriske (dvs. skifter fortegn) under ombytning af to sæt sted-spin variable som f.eks. ombytning af  $(x_1, x_2, x_3, m_1)$  og  $(x_7, x_8, x_9, m_3)$ . Denne antisymmetriske egenskab ved bølgefunktionerne, som også kaldes Pauli princippet, skal altid gælde for elektroner. Mere generelt kaldes alle partikler der opfylder Pauli princippet for *fermioner*. Hvis funktionerne i stedet er symmetriske under ombytning af to sæt af sted-spin-variable kaldes partiklerne for *bosoner*. At det ikke er relevant at betragte andre funktioner end de symmetriske og antisymmetriske sikrer Spin-Statistik-teoremet, der siger at alle partikler enten er bosoner eller fermioner.

Hamiltonoperatoren for systemet af  $N$  elektroner, på Hilbert rummet  $\mathcal{H}_A =_A \bigotimes_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ , er givet som

$$H_1 = (-\Delta + V(x)) \otimes \overbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}^{N-1 \text{ led}} + 1 \otimes (-\Delta + V(x)) \otimes 1 \dots \otimes 1 + 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes (-\Delta + V(x)).$$

Her vil første led i  $H_1$  virke på et element  $\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \in \mathcal{H}_A$  ved at  $((-\Delta + V(x)) \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1)(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) = (-\Delta + V(x))\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_n$ , dvs. vi har en virkning på hver plads.

Det kan nævnes at hvis man generelt har  $N$  fysiske systemer (her  $N$  elektroner) med hver sit tilhørende Hilbertrum og ønsker at lave en samlet beskrivelse af de  $N$  systemer, så gøres dette i tensorproduktet af de  $N$  Hilbertrum.

## Fotoner

Det næste man studerer er frie fotoner. En foton er en boson uden masse og elektrisk ladning. Fotonen har spin 1, dog har den ingen 0-komponent i bevægelsesretningen. Først defineres følgende rum:

**Definition 2.** For ethvert  $n \in \mathbb{N}$  defineres

$$\mathcal{F}^{(n)} = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^{3n}) \mid \psi \text{ er symmetrisk under ombytning af to sæt af stedvariable}\}.$$

Endvidere sættes  $\mathcal{F}^{(0)} = \mathbb{C}\Omega$ , hvor  $\Omega$  kaldes vacuumvektoren.

Vi definerer da det symmetriske Fock rum (og nej, det er ikke med  $u$ ) som den direkte sum

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}.$$

Et typisk element i  $\mathcal{F}$  består altså af en følge af funktioner  $(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots)$ , hvor  $\psi_n$  tilhører  $\mathcal{F}^{(n)}$ .

$\mathcal{F}$  er også et Hilbertrum. Haves to elementer  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots)$  og  $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots)$  i  $\mathcal{F}$ , hvor kun endeligt mange komponenter er forskellige fra 0-funktionen defineres det indre produkt  $\langle \psi, \phi \rangle$  som  $\langle \psi, \phi \rangle = \langle \psi_0, \phi_0 \rangle_{\mathbb{C}} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n, \phi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}$ . Derefter laver man en abstrakt fuldstændiggørelse af rummet m.h.t. dette indre produkt. En tilstand hvor der er  $k$  frie fotoner beskrives i denne model ved en normeret vektor i  $\mathcal{F}$ , hvor den  $k$ 'te komponent er en normeret funktion i  $L^2(\mathbb{R}^{3k})$ , som er symmetrisk under ombytning af to sæt af stedvariable, og hvor alle øvrige komponenter er 0.

**Definition 3.** For  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  defineres den Fouriertransformerede funktion,  $\hat{f}$ , ved formelen  $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ik \cdot x} f(x) dx$

Fra Mat2AN ved vi, at når Fouriertransformationen defineres på denne måde kan den udvides til en isometrisk isomorfi på hele  $L^2$ .

**Definition 4.** Hamiltonoperatoren for frie fotoner er givet ved  $H_2 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_2^{(n)}$ , hvor  $H_2^{(n)}$  virker på  $\mathcal{F}^{(n)}$  på følgende måde:

$$H_2^{(0)}\Omega = 0 \text{ og } H_2^{(n)}\hat{\psi}(k_1, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^n |k_i| \hat{\psi}(k_1, \dots, k_n).$$

Vi ser, at med denne definition er  $H_2$  altså defineret i det "Fouriertransformerede fotonrum", også kaldet *impulsrummet*. Hvis jeg derfor (under kraftig misbrug af notationen) skriver  $H_2^{(n)}\psi$ , for en funktion  $\psi \in \mathcal{F}^{(n)}$ , er dette blot en anden betegnelse for den inverst Fouriertransformerede af funktionen ( $H_2^n \hat{\psi}$ ).

## Elektroner og fotoner

Det naturlige skridt er nu at betragte den situation, hvor der er  $N$  elektroner og et vilkårligt antal fotoner til stede i det betragtede fysiske system. Det relevante Hilbert rum i denne sammenhæng er da tensorproduktet mellem det symmetriske Fock rum ( $\mathcal{F}$ ) og det antisymmetriske tensorprodukt  $\mathcal{H}_A$ . Med andre ord beskrives en tilstand i det fysiske system ved en normeret vektor i Hilbertrummet  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{F}$ .

Det numeriske kvadrat af det indre produkt mellem to tilstande i  $\mathcal{H}$  angiver sandsynligheden for overgang fra den ene tilstand til den anden. Er to tilstande således vinkelrette, er der ingen sandsynlighed for overgang mellem de to tilstande.

Hvis man antager, at der ikke er nogen vekselvirkning mellem elektroner og fotoner, svarende til at elektroner og fotoner er uendeligt langt fra hinanden, er Hamiltonoperatoren for det samlede system givet som  $H_0 = H_1 \otimes 1_{\mathcal{F}} + 1_{\mathcal{H}_A} \otimes H_2$  (hvor symbolet  $\otimes$  som i slutningen af afsnittet om frie elektroner ovenfor angiver at vi har en virkning på hver plads). Mængden af egenverdierne for denne operator vil da blot være  $\{\lambda_1 + \lambda_2 \mid \lambda_i \text{ er egenverdi for } H_i\}$ , specielt ses det, at den

laveste energi, kaldet grundtilstandsenergien, for det samlede system er summen af de to grundtilstandsenergier fra de separerede systemer. Dette er også præcist hvad man på forhånd ville forvente, når partiklerne ikke vekselvirker.

I praksis vil partiklerne dog vekselvirke, hvilket skyldes, at fotonerne kommer fra et elektromagnetisk felt som vekselvirker med elektronerne via fotonerne. Man kan opskrive et eksakt udtryk for den samlede energi i systemet, men det man ofte gør i praksis er at approksimere (og det er her man rækkeudvikler i koblingskonstanten  $\gamma$ ) den fulde Hamiltonoperator med en Hamiltonoperator på formen  $H_0 + H_I$ , hvor  $H_I$  kaldes vekselvirkningsleddet (I for interaction).

Vi er nu nået til at kunne formulere en række af de spørgsmål som man søger at besvare i I.R. QED, og som derfor også blev behandlet på sommerskolen. Vi definerer først tallet  $E_0 = \inf\{\langle\psi, H\psi\rangle \mid \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1\}$ , som er et mål for den nedre grænse for systemets energi.

Hvis operatoren  $H$  har en følge af egenværdier som konvergerer mod  $-\infty$ , så vil  $E_0 = -\infty$ . Der vil således ikke være nogen nedre grænse for systemets energi, systemet vil kollapse. Det første man søger at bevise er derfor at systemet er stabilt, dvs. at tallet  $E_0$  er større end  $-\infty$ . Dernæst ønsker man at vise at der rent faktisk findes en (entydig) tilstand,  $\psi \in \mathcal{H}$ , som har dette tal som egenværdi. Energien  $E_0$  kaldes i så fald for grundtilstandsenergien.

Går man lidt videre, søger man at vise at tallet  $E_0$  er proportionalt med antallet af elektroner,  $N$ . Et umiddelbart rimeligt resultat, idet man f.eks. ellers ville kunne forestille sig at desto større et atom er, desto større bliver bindingsenergien (dvs. den energi der skal til at ionisere atomet) pr. elektron. Dette er i strid med de fysiske eksperimenter.

En lang række resultater i denne retning er allerede opnået. Det nyeste resultat jeg har hørt om er et resultat fra [1], som under ret generelle betingelser for potentialet  $V$  og for fysisk relevante værdier af koblingskonstanten,  $\gamma$ , viser eksistens og entydighed af en grundtilstand for den fulde Hamiltonoperator. Dog skal det understreges, at der stadig ikke er noget bevis for stabilitet i den fulde model for generelle (fysisk relevante) potentialer og vilkårlig koblingskonstant.

Af andre emner der er blevet undersøgt, og stadig undersøges, kan nævnes følgende (se [2]):

1. Hvad sker der med egenværdierne/energiniveauerne når man medtager vekselvirkningen i forhold til når man ikke gør? Man kan f.eks. vise at der dannes tilstande som efter kort tid henfalder til grundtilstanden for det vekselvirkende system (såfremt denne findes).
2. Spredningsteori. Forudsigelser af hvad der sker 'lang tid' efter et spredningseksperiment. Dette er yderst relevant at studere, da næsten alle fysiske eksperimenter i atom-, kerne- og partikelfysik er spredningseksperimenter. Spredningseksperimenter er altså en måde at teste teorien på.
3. Det viser sig at man i udregninger løber ind i visse problemer med størrelser

der antager værdien  $\infty$ . Disse uendeligheder søger man at fjerne fra de observable fysiske størrelser. Dette kaldes renormalisering.

4. Endelig er det også vigtigt, vel nærmest fundamentalt, at angive de fysiske modeller matematisk korrekt, f.eks. at angive på hvilket domæne de betragtede operatorer er (essentielt) selvadjungerede.

Det vil blive for omfattende (=det fylder et helt speciale eller mere) at komme nærmere ind på ovenstående problemstillinger her. Formålet med denne artikel er blot at give en fornemmelse af hvilke emner man kan beskæftige sig med i matematisk fysik. For at illustrere teorien er medtaget eksemplet nedenfor.

## Et eksempel

Til at illustrere teorien har jeg valgt et eksempel, som alle der har haft fysik 1 kender, nemlig den harmoniske oscillator. Vi betragter en elektron i én dimension, som befinder sig i et harmonisk potential, dvs.  $V(x) = x^2$  (igen har vi sat alle de fysiske konstanter til 1). Vi ser bort fra spin i denne model og vores Hilbertrum i denne situation er derfor  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}$ .

Hvis vi endvidere antager at elektronen befinder sig i et elektromagnetisk felt, beskrevet ved vektorpotentialet  $A(x)$ , så er elektronens kinetiske energi givet ved operatoren  $K = (p + \sqrt{\gamma}A(x))^2$ , hvor  $\gamma$  er koblingskonstanten. Ser vi bort fra  $A^2$ -leddet, ser vi, at Hamiltonoperatoren for det samlede system kan skrives  $H = H_0 + \sqrt{\gamma}(pA(x) + A(x)p)$ . Her er, som ovenfor,  $H_0 = H_1 \otimes 1_{\mathcal{F}} + 1_{L^2(\mathbb{R})} \otimes H_2$ , hvor  $H_1 = -\Delta + x^2$  og  $H_2$  er Hamiltonoperatoren for de frie fotoner.

Den harmoniske oscillator er en af de få fysiske operatorer, hvor man kender alle egenværdierne. Mængden af egenværdier er  $\{n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ , specielt ser vi at grundtilstandsenergien har værdien  $\frac{1}{2}$ . De tilhørende egenfunktioner er givet som  $P_n(x) = 2^{-n/2}(n!)^{-1/2}\pi^{-1/4}e^{-x^2/2}H_n(x)$ , hvor  $H_n$  er Hermite-polynomiet af grad  $n$  (jvf. [4] side 54 ff.). Hermitepolynomierne kan slås op i en tabel over specielle funktioner og man finder derved at  $P_0(x) = \pi^{-1/4}e^{-x^2/2}$  og at  $P_1(x) = \sqrt{2}\pi^{-1/4}xe^{-x^2/2}$ .

Inden vi går videre med eksemplet bemærker vi at der gælder følgende resultat:

**Lemma 5.** *Der gælder at  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ , hvor funktionerne i  $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$  skal være symmetriske under enhver permutation af de  $n$  sidste variable.*

Det sidste lighedstegn i lemmaet skal forstås sådan, at der findes en naturlig identifikation af de to rum, dvs. de er unitært ækvivalente. Den unitære afbildning består løst sagt i, at man ganger funktionen fra  $L^2(\mathbb{R})$  ind på hvert led i et element fra  $\mathcal{F}$ .

Et element i  $\mathcal{H}$  består altså af en følge  $(\phi_0(x), \phi_1(x, x_1), \phi_2(x, x_1, x_2), \dots)$ , hvor  $\phi_n$  beskriver en tilstand med  $n$  fotoner og een elektron. De  $n$  sidste variable i  $\phi_n$  angiver fotonernes positioner og den første variabel,  $x$ , angiver elektronens

position. Det indre produkt er givet på samme måde som beskrevet lige efter definition 1.

Vi laver nu den meget grove antagelse, at alle de tilladte tilstande udspringer af kun fire tilstande,  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Tilstanden  $\psi_1$  repræsenterer en tilstand, hvor vi har 1 elektron i grundtilstanden og ingen fotoner. Med andre ord er  $\psi_1 = (P_0(x), 0, 0, \dots)$ . Hvis vi havde valgt at skrive  $\psi_1$  som et element i  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}$  ville vi have at  $\psi_1 = P_0(x) \otimes (\Omega, 0, 0, \dots)$ , hvor  $\Omega$  er vacuumvektoren. I den anden tilstand har vi en elektron i den første eksiterede tilstand (svarende til egenværdien med  $n = 1$ ) og ingen fotoner, dvs.  $\psi_2 = (P_1(x), 0, 0, \dots)$ . Hvis vi havde skrevet  $\psi_2$  som et element i  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}$  ville vi have haft at  $\psi_2 = P_1(x) \otimes (\Omega, 0, 0, \dots)$ .

Den tredje tilstand består af en elektron i grundtilstanden samt en foton med bølgefunktionen  $\phi(y) = \pi^{-1/4} e^{-y^2/2}$ . Denne funktion er valgt præcis således, at  $\phi$ 's Fouriertransformerede netop er  $\phi$  selv, dvs.  $\hat{\phi}(k) = \phi(k)$ .

Den tredje tilladte tilstand er dermed givet som  $\psi_3 = (0, P_0(x)\phi(y), 0, 0, \dots)$ , svarende til at

$\psi_3 = P_0(x) \otimes (0, \phi(y), 0, \dots)$  i  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}$ . Endelig er  $\psi_4 = (0, P_1(x)\phi(y), 0, 0, \dots)$ , svarende til at  $\psi_4 = P_1(x) \otimes (0, \phi(y), 0, \dots)$  i  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}$ , dvs.  $\psi_4$  er en tilstand hvor vi har en elektron i den første eksiterede tilstand samt en foton med bølgefunktion  $\phi$ .

Man kan let checke at disse fire tilstande er vinkelrette på hinanden (og dermed lineært uafhængige), svarende til at sandsynligheden for at systemet går fra den ene tilstand til en af de tre andre er lig med 0. Endvidere checkes også hurtigt at tilstandene *er* normerede.

Hvis man var i den situation, at der ikke var nogen vekselvirkning mellem fotoner og elektroner, så ville grundtilstanden for systemet jvf. forrige afsnit, være den situation, hvor man havde én elektron i grundtilstanden og ingen fotoner. Grundtilstandsenergien ville altså være lig  $\frac{1}{2}$  (=summen af de tilhørende egenverdier for  $P_0(x)$  og  $\Omega$ ).

Pointen er, at hvis man har en vekselvirkning mellem fotoner og elektroner kan man ved at danne en linearkombination af de 4 tilladte tilstande opnå en egentilstand med energi (egenværdi) lavere end  $\frac{1}{2}$ .

Som beskrevet ovenfor er vekselvirkningen i vores eksempel givet som  $H_I = \sqrt{\gamma}(A(x)p + pA(x))$ , hvor  $p = -i\frac{\partial}{\partial x}$  er impulsoperatoren og  $A(x)$  kaldes vektorpotentialoperatoren. Klassisk ville virkningen af  $A(x)$  blot være en multiplikation på bølgefunktionen med funktionen  $A(x)$  (som findes ud fra Maxwell's love for elektromagnetismen), men efter kvantisering har  $A(x)$  følgende form:

$A(x) = a^*(\hat{\lambda}(k)e^{-ikx}) + a(\hat{\lambda}(k)e^{ikx})$ . Her kaldes  $a^*$  for en skabelsesoperator (creation operator) og  $a$  kaldes en annihilationsoperator. Som navnene antyder er disse defineret ved at de skaber hhv. fjerner en foton (se nedenfor). I udtrykket for  $A(x)$  står der både en  $x$  og en  $k$  variabel. Dette betyder at der skabes (vha.  $a^*$ ) hhv. annihileres (vha.  $a$ ) en foton i elektronens position  $x$ , med impuls  $k$ .



Med denne definition virker  $A(x)$  derfor, ligesom  $H_2$ , i impulsrummet (dvs. vi skal Fouriertransformere funktionerne mht. de variable der beskriver fotonen og dernæst virke med  $A(x)$ ). I udtrykket for  $A(x)$  indegår også en funktion  $\widehat{\lambda}$ . Denne funktion er normalt givet som  $\frac{1}{\sqrt{|k|}}$ , men for at lette regningerne for mig selv i det følgende, har jeg valgt at sætte  $\widehat{\lambda}(k) = \widehat{\phi}(k) = \phi(k) = \pi^{-1/4} e^{-k^2/2}$  (idet  $\phi$  som nævnt ovenfor er sin lig med egen Fouriertransformerede).

Vi mangler nu kun at angive hvad skabelses-/annihilationsoperatorernes virkning er:

**Definition 6.** Hvis  $\psi$  tilhører  $\mathcal{F}^n$  og  $\phi$  tilhører  $L^2(\mathbb{R})$  defineres  $a^*(\phi(x))$  ved at  $a^*(\phi(x))\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \phi(x_i)\psi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$   $a(\phi)$  defineres som den adjungerede operator til  $a^*$ , dvs.  $a(\phi) = (a^*(\phi))^*$ .

Årsagen til at vi har  $n+1$  led i definitionen skyldes kravet om symmetri under ombytning af de variable. Faktoren  $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$  er en normeringskonstant.

Formålet var at vise, at man kunne danne en linearkombination af de 4 tilladte tilstande som er en egenfunktion for  $H$  med egenværdi mindre end 1. Vi skal med andre ord undersøge om matricen  $\langle \psi_i, H\psi_j \rangle$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , har en egenværdi som er mindre end  $\frac{1}{2}$ . Hertil skal altså udregnes 16 matrixelementer, men da matricen er hermitesk (da  $H$  kan vises at være selvadjungeret på en passende mængde) simplificeres arbejdet til at udregne de 4 diagonalelementer samt de 6 elementer under diagonalen. Jeg vil ikke udregne alle 10 matrixelementer her, men give et par eksempler.

Lad os først udregne diagonalelementerne  $\langle \psi_i, H\psi_i \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Da vekselvirkningsleddets virkning på en vilkårlig tilstand er at skabe hhv. annihilere/fjerne fotoner, så vil  $H_I\psi_i$  være en tilstand med et fotonantal som er forskelligt fra antallet af fotoner i tilstanden  $\psi_i$ . Derfor ville det ud fra et fysisk argument være rimeligt, at de to tilstande,  $H_I\psi_i$  og  $\psi_i$  var vinkelrette på hinanden, dvs. at der gælder at  $\langle \psi_i, H_I\psi_i \rangle = 0$  for  $i = 1, 2, 3, 4$ . Man kan også vise dette direkte ved at bruge definitionerne ovenfor. Vekselvirkningsleddet spiller altså ingen rolle for diagonalelementerne, som derfor vil være givet som  $\langle \psi_i, H_0\psi_i \rangle$ . F.eks. fås derfor for  $i = 3$  at

$$\langle \psi_3, H_0\psi_3 \rangle = \langle P_0(x) \otimes (0, \phi(y), 0, \dots), \{(-\Delta + x^2) \otimes 1_{\mathcal{F}} + 1_{L^2(\mathbb{R})} \otimes H_2\} P_0(x) \otimes (0, \phi(y), 0, \dots) \rangle \quad (1)$$

$$= \langle P_0(x), (-\Delta + x^2)P_0(x) \rangle \langle \phi(y), \phi(y) \rangle + \langle P_0(x), P_0(x) \rangle \langle \phi(k), |k|\phi(k) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2} \quad (2)$$

Her brugte jeg undervejs definitionen af det indre produkt på et tensorprodukt kombineret med at  $P_0$  er egenværdi for  $H_1$  samt at  $H_2$  virker på  $(0, \phi, 0, \dots)$  ved

at gange med en faktor  $|k|$  i det Fouriertransformerede rum (impulsrummet). Endelig brugte jeg også at  $P_0$  og  $\phi$  er normerede. Bemærk at for foton delen udregnes det indre produkt i det impulsrummet, men dette er også tilladt, da vi netop har defineret Fouriertransformationen til at bevare det indre produkt.

Dernæst skal de 6 elementer under diagonalen udregnes. Påstanden er at  $\langle \psi_i, H_0 \psi_j \rangle = 0$  når  $i \neq j$ . Vi har nemlig, at der f.eks. gælder:

$$\langle \psi_1, H_0 \psi_3 \rangle = \langle P_0(x) \otimes (\Omega, 0, \dots), (H_1 \otimes 1_{\mathcal{F}} + 1_{L^2(\mathbb{R})} \otimes H_2) P_0(x) \otimes (0, \phi(y), 0, \dots) \rangle \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \langle P_0(x) \otimes (\Omega, 0, \dots), P_0(x) \otimes (0, \phi(y), 0, \dots) \rangle + \langle P_0(x) \otimes (\Omega, 0, \dots), P_0(x) \otimes H_2(0, \phi(y), 0, \dots) \rangle \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \langle P_0(x), P_0(x) \rangle \langle (\Omega, 0, \dots), (0, \phi(y), 0, \dots) \rangle + \langle P_0(x), P_0(x) \rangle \langle (\Omega, 0, \dots), H_2(0, \phi(y), 0, \dots) \rangle = 0 \quad (5)$$

da  $\langle (\Omega, 0, \dots), (0, \phi(y), 0, \dots) \rangle = \langle (\Omega, 0, \dots), H_2(0, \phi(y), 0, \dots) \rangle = 0$  ifølge konstruktionen af  $H_2$  samt det indre produkt på  $\mathcal{F}$ . Her brugte vi undervejs at funktionen  $P_0$  var egenfunktion til  $H_1$  med egenværdien  $\frac{1}{2}$ , samt definition af det indre produkt på et tensorprodukt fra afsnittet om frie elektroner.

Hvis man f.eks. ønsker at vise at  $\langle \psi_4, H_0 \psi_3 \rangle = 0$  skal man ydermere udnytte at  $P_0$  og  $P_1$  er ortogonale.

Lad os som eksempel udregne  $\langle \psi_i, H \psi_j \rangle$  i det tilfælde hvor  $i = 4$  og  $j = 1$ . Her vil jeg udnytte identifikationen fra lemma 4. Vi husker  $\psi_1$  bestod af en tilstand med en elektron og ingen fotoner, specielt er der ingen fotonvariable der skal Fouriertransformeres for at udregne virkningen af  $A(x)$ . Da tilstanden  $\psi_1$  ikke indeholder nogen fotoner vil annihilationsoperatorens virkning på denne tilstand være lig 0. Vi kan derfor opskrive  $\widehat{H}_I$  (hvor  $\widehat{\phantom{x}}$  betyder at de fotonvariable er Fouriertransformerede) som

$$H_I \widehat{\psi}_1 = -i\sqrt{\gamma} \left( \bar{\gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x} a^* (\widehat{\lambda}(k) e^{-ikx}) + a^* (\widehat{\lambda}(k) e^{-ikx}) \frac{\partial}{\partial x} \right) (P_0(x), 0, \dots) \right) \quad (6)$$

$$= -i\sqrt{\gamma} \left( 0, \frac{\partial}{\partial x} (\widehat{\lambda}(k) e^{-ikx} P_0(x)) + \widehat{\lambda}(k) e^{-ikx} P_0'(x), 0, \dots \right) \quad (7)$$

$$= -i\sqrt{\gamma} \left( 0, \widehat{\lambda}(k) (-ik) e^{-ikx} P_0(x) + 2\widehat{\lambda}(k) e^{-ikx} P_0'(x), 0, \dots \right) \quad (8)$$

Da Fouriertransformationen bevarer det indre produkt gælder der at  $\langle \psi_4, H_I \psi_1 \rangle = \langle \widehat{\psi_4}, \widehat{H_I \psi_1} \rangle$ . Udnyttes nu at funktionen  $\phi$  er sin egen Fouriertransformerede så ser vi at  $\widehat{\psi_4} = (0, P_1(x)\phi(k), 0, \dots)$ , og derfor vil

$$\langle \psi_4, H_I \psi_1 \rangle = \int P_1(x)\phi(k)(-i\sqrt{\gamma})(\widehat{\lambda}(k)(-ik)e^{-ikx}P_0(x) + 2\widehat{\lambda}(k)e^{-ikx}P_0'(x))dkdx \quad (9)$$

hvor vi bemærker at integrationsrækkefølgen er ligegyldig ifølge Fubinis sætning. Normalt vil et sådant integral være umuligt at beregne uden at anvende f.eks. Maple, men pga. de specielle valg af funktioner vi har gjort ovenfor, kan vi udregne den eksakte værdi af dette integral.

Indsættes udtrykket for  $\widehat{\lambda}$  og  $\phi(k)$  giver første led i (9)

$$-\sqrt{\gamma}\pi^{-1/4} \int \pi^{-1/4}ke^{-k^2}e^{-ikx}dkP_0(x)P_1(x)dx \quad (10)$$

Integralet  $\int \pi^{-1/4}ke^{-k^2}e^{-ikx}dk$  findes ved følgende udregning:

$$\int \pi^{-1/4}ke^{-k^2}e^{-ikx}dk = \sqrt{2\pi}i \frac{d}{dx}(\pi^{-1/4}e^{-k^2})(x) \quad (11)$$

$$= \pi^{1/4}i \frac{d}{dx}e^{-x^2/4} = -i \frac{\pi^{1/4}}{2}xe^{-x^2/4} \quad (12)$$

hvor vi udnytter at  $\phi(y)$  er sin egen Fouriertransformerede til, ved en simpel substitution, at udregne Fouriertransformationen i (11). Endvidere udnyttede vi også at det i denne situation er tilladt at ombytte integration og differentiation. Dermed er første led i (9) givet som

$$\sqrt{\gamma}\pi^{-1/4}i \frac{\pi^{1/4}}{2} \int xe^{-x^2/4}P_0(x)P_1(x)dx = \sqrt{\gamma}i \frac{1}{2} \int xe^{-x^2/4}\pi^{-1/2}\sqrt{2}xe^{-x^2}dx \quad (13)$$

$$= \sqrt{\gamma}i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x^2e^{-\frac{5}{4}x^2}dx = \sqrt{\gamma}i \frac{4}{5\sqrt{10}} \quad (14)$$

idet  $\int x^2e^{-\frac{5}{4}x^2}dx = \frac{8\sqrt{\pi}}{10\sqrt{5}}$ . Dette ses f.eks. ved at lave partiel integration, samt en substitution, på udtrykket  $\int e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ .

Andet led i (9) giver ved helt tilsvarende udregninger  $\sqrt{\gamma}i \frac{16}{5\sqrt{10}}$ , så alt i alt har vi at

$$\langle \psi_4, H_I \psi_1 \rangle = \gamma i \frac{4}{\sqrt{10}} \quad (15)$$

Ved analoge udregninger findes de øvrige matricielementer og den samlede  $4 \times 4$  matrix er da givet som

$$(\langle \psi_i, H \psi_j \rangle)_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -i\sqrt{\gamma}\frac{4}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{3}{2} & i\sqrt{2\gamma} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{2\gamma} & \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2} & 0 \\ i\sqrt{\gamma}\frac{4}{\sqrt{10}} & 0 & 0 & \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} \end{pmatrix}$$

Den fysiske værdi for koblingskonstanten er  $\gamma = \frac{1}{137}$ . Indsættes denne værdi kan egenværdierne for matricen bestemmes, f.eks ved at bruge Maple, og det viser sig, at der faktisk er en egenværdi der er mindre end  $\frac{1}{2}$ , nemlig  $E = 0,489495803$ . Den tilhørende normerede egenvektor er  $\psi = -0,995309\psi_1 + i0,096743\psi_4$ . Det er altså muligt ud fra disse fire tilstande at danne en ny tilstand med lavere energi end  $\frac{1}{2}$ . Men selv om eksemplet var relativt simpelt så måtte vi alligevel igennem en hel del udregninger for at finde resultatet.

## Afrunding

Eksemplet ovenfor er ikke særlig realistisk. I virkeligheden er der uendeligt mange tilladte tilstande, der kan kombineres. Det vil derfor være rimeligt at forvente, at der findes en tilstand med endnu lavere energi end den vi fandt ovenfor, når man tillader alle tilstande. Dette er rent faktisk også tilfældet. Muligvis kan det ske at man kan konstruere tilstande med vilkårlig stor negative egenværdi.

At vise at der rent faktisk *er* en nedre grænse for de mulige egenværdier (stabilitet) for andre valg af vekselvirkning, samt at vise eksistens (og entydighed) af en evt. grundtilstand er i almindelighed ikke let. Og som nævnt ovenfor er det endnu ikke bevist i fuld generalitet.

## Litteraturliste

- [1] M. Griesemer, E. Lieb and M. Loss: *Ground states in nonrelativistic quantum electrodynamics*, Preprint 2000.
- [2] V. Bach, Spectral Analysis of Nonrelativistic Quantum Electrodynamics , Noter til Sommerskole i Sønderborg, August 2000.
- [3] M. Reed & B. Simon *Functional Analysis* Vol.1 Academic Press, Inc. 1980.
- [4] E. Merzbacher: *Quantum Mechanics*, second edition, John Wiley & Sons 1970.
- [5] E.B. Davies *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press 1995.