FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

16. årgang, nr. 2, dec. 2002

Indhold

Velkommen

Ingen matematiker kan undgå at bemærke at det er nær jul; matematikkantinen bugner med diskontinuerte guirlander, jule-Möbius-bånd, spilteoretiske julehjerter og andet meget traditionelt julepynt.

- Med et helt semesters ny viden kan vi endelig slappe af med gode gamle FAMØS i hænderne; tabet af vore liv ville nu være et større spild end for blot et halvt år siden. Før vi dog officielt kan agte vore liv højere end tidligere, mangler naturligvis blot en påvisning af vor viden engang i Januar, til eksamen.

Men frygt ikke, thi januar er som bekendt næsten et år fra december og for tiden skriver vi netop december, så der skulle være god tid til rigtigt at nærlæse alle artiklerne i dette dejligt flappende blad. - Du kan endda lige akkurat nå at løse vor matematiker-kryds & tværs og sende den ind som en julegave til FAMØS - det ville varme vore hjerter i en sådan grad, at den behageligste løsning udløser en præmie.

Måske synes du at dit liv bevæger sig lige lukt i helvede for tiden, men det gør det ikke! - Eksaminerne er for langt væk til at de kan skues, og juleræset kan du lige så godt stå af med det samme, FAMØS er svaret! - Ta' et par blade, læg dem under juletræet, omslaget er allerede i julefarver, så du behøver end ikke at pakke dem ind! - Familien bliver ellevilde, især efter de til højtiden har afprøvet anagramhøjtlæsning over et muntert julelys. - Du vil endvidere blive en legende rundt om juletræet, hvis du ligeledes fremfører det tryllenummer Mikkel Øbro løfter sløret for om ikke mange sider.

Hvis du ikke finder din hjerne stor nok i år, kan vort blad naturligvis også supplere hertil; og således også i år redder FAMØS juletindingerne fra at sprænges. Nyd det - så længe de holder!

En tryllekunst

Mikkel Øbro

I det følgende præsenteres en ganske overbevisende tryllekunst, som nok kan tryllebinde familien over søndagskaffen eller vennerne over fredagsøllerne. Udførelsen af tryllekunsten forudsætter at man får hjælp af en kvik assistent, sædvanligvis en vimsende, letpåklædt blodine i lyserødt tylskørt.

> Et almindeligt sæt spillekort fremdrages. Publikum bedes udvælge fem tilfældige kort, se på dem og give dem til assistenten. Hun kigger på dem og lægger fire af dem på bordet – en efter en – foran tryllekunstneren. Og på forunderlig vis kan han "gætte" hvad det femte og sidste kort er.

Hvordan kan det nu lade sig gøre?

Lad os se assistenten i kortene - så at sige - og afsløre hemmeligheden bag tryllekunsten. Det gøres bedst ved at gennemgå et eksempel. Lad os sige at følgende fem kort er udtaget.

$$\clubsuit 9 \quad \spadesuit 3 \quad \diamondsuit 10 \quad \clubsuit 2 \quad \heartsuit\text{Dame}$$

Udtager man 5 kort blandt de 52 spillekort, vil der altid være to i samme kulør. I dette tilfælde $\clubsuit 9$ og $\clubsuit 2$. Vi vil gerne betragte klør-kortene som elementer i $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, så $\clubsuit n = [n]$ for $n = 2, \ldots, 10$. Derfor sætter vi

$$\clubsuit\text{Es} = [1] \quad \clubsuit\text{Knægt} = [11] \quad \clubsuit\text{Dame} = [12] \quad \clubsuit\text{Konge} = [13] = [0].$$

For ethvert par af elementer i $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ vil man altid kunne få det ene ved at lægge en restklasse mellem $[1]$ og $[6]$ til det andet. I vores tilfælde har vi givet $\clubsuit 9 = [9]$ og $\clubsuit 2 = [2]$, og $[9] + [6] = [15] = [2]$.

Assistenten vælger at lade $\clubsuit 2$ være det femte og sidste kort, dvs. det som tryllekunstneren skal gætte, og som det første kort lægger hun $\clubsuit 9$ frem på bordet.

Med de næste tre kort ønsker hun at signalere et tal mellem 1 og 6. I vores tilfælde ønsker hun at sende beskeden "6", for så ved tryllekunstneren at det sidste kort er $\clubsuit 2$, fordi $\clubsuit 9 + [6] = \clubsuit 2$. De tre kort assistenten vil lægge frem på bordet kan lægges i 3!=6 forskellige rækkefølger, og det går nu ud på at have valgt en nummerering af disse mulige rækkefølger.

På forhånd har tryllekunstneren og assistenten valgt en totalordning på de 52 spillekort. Det betyder, at når man står med tre kort i hånden, så kan man kalde det ene for *det største,* et andet for *det mindste* og det sidste for *det midterste.*

Har man valgt en totalordning, kan man lade hver af de seks forskellige rækkefølger, hvormed tre kort kan lægges, svare til et tal mellem 1 og 6.

De to optrædende har valgt følgende nummerering.

$$\begin{aligned}
1 &\sim \text{mindste}\,,\ \text{midterste}\,,\ \text{største}\\
2 &\sim \text{mindste}\,,\ \text{største}\,,\ \text{midterste}\\
3 &\sim \text{midterste}\,,\ \text{mindste}\,,\ \text{største}\\
4 &\sim \text{midterste}\,,\ \text{største}\,,\ \text{mindste}\\
5 &\sim \text{største}\,,\ \text{mindste}\,,\ \text{midterste}\\
6 &\sim \text{største}\,,\ \text{midterste}\,,\ \text{mindste}
\end{aligned}$$

Hvilken totalordning man benytter er ligegyldig, når blot tryllekunstner og assistent bruger den samme. Man kan f.eks. benytte den leksikografiske ordning på

$$\{\text{Es}, 2, \ldots, 10, \text{Knægt}, \text{Dame}, \text{Konge}\} \times \{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}.$$

Hvor $\{\text{Es}, 2, \ldots, 10, \text{Knægt}, \text{Dame}, \text{Konge}\}$ udstyres med ordningen

$$\text{Es} < 2 < \cdots < \text{Konge}$$

og $\{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ ordnes ved

$$\diamondsuit < \heartsuit < \clubsuit < \spadesuit.$$

På denne måde bliver f.eks.

$$\cdots < \clubsuit 2 < \spadesuit 2 < \diamondsuit 3 < \heartsuit 3 < \clubsuit 3 < \spadesuit 3 < \diamondsuit 4 < \heartsuit 4 < \cdots$$

I vores tilfælde har tryllekunstner og assistent på forhånd aftalt at benytte sig af nævnte leksikografiske ordning. Dermed er $\spadesuit 3 < \diamondsuit 10 < \heartsuit$Dame. Assistenten vil gerne signalere at tryllekunstneren skal lægge 6 til det første kort $\clubsuit 9$. Derfor lægger hun de tre kort i rækkefølgen $\heartsuit$Dame, $\diamondsuit 10$ og $\spadesuit 3$, dvs. i rækkefølgen *største, midterste, mindste.*

Og hokus pokus! Til publikums store forbløffelse kan tryllekunstneren gætte at det sidste kort er $\clubsuit 2$.

Det kan være en god ide at øve sig lidt, inden man kaster sig ud i en offentlig optræden. Her er et par opgaver. Svarene står til sidst i artiklen.

1. Kortene $\spadesuit 2$, $\diamondsuit$Knægt, $\diamondsuit 9$, $\clubsuit 7$ og $\heartsuit$Konge er trukket. Hvilke fire kort skal assistenten lægge frem på bordet og i hvilken rækkefølge?

2. Kortene ♣Dame, ♡2, ♠10, ♣6 er lagt på bordet i nævnte rækkefølge. Hvad er det sidste kort?
3. Kortene ♡10, ♠Es, ♠3, ♢Es og ♠8 er trukket. Assistenten vælger at ♠8 skal være det kort, som tryllekunstneren skal gætte. I hvilken rækkefølge skal kortene lægges?
4. De samme kort som i forrige opgave. Denne gang med ♠3 som det sidste kort.

Med lidt øvelse kan man faktisk blive ganske ferm. Bemærk i øvrigt at det i denne tryllekunst er assistenten, der skal være den kvikkeste.

Kan tryllekunsten forbedres?

De fleste mennesker i denne verden vil være tilfredse, nu hvor de kender hemmeligheden bag tryllekunsten og kan udføre den på forlangende. Men som matematiker er man ikke glad og tilfreds endnu. For man spørger sig selv, om tryllekunsten mon ikke kan forbedres. Kan man nøjes med at trække fire kort, lægge de tre frem og stadig være i stand til at gætte det sidste? Eller er det muligt at lave tryllekunsten ved at trække fem kort ud af et sæt på f.eks. 56, og ikke blot 52 som der er i et normalt sæt spillekort? I så fald skal assistenten og tryllekunstneren aftale et nyt system at lægge de udtrukne kort efter. Men hvornår er det teoretisk muligt at lave et system, så tryllekunsten kan udføres? Mere præcist:

> Der trækkes k kort fra et sæt med m kort, og der lægges $k-1$ kort ned på bordet i en rækkefølge. Hvad er den maksimale værdi af m, så det er muligt at lave et system, hvormed assistenten kan fortælle tryllekunstneren hvad det sidste kort er?

Lad os sige at M er en mængde med m elementer eller spillekort om man vil. Har man udtrukket k elementer fra M har man samtidig valgt et element α i $\mathcal{P}_k(M)$, som er mængden af delmængder af M med k elementer. Det valgte element α betegnes $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Fra α skal man vælge $k-1$ elementer, som skal fremvises i en valgt rækkefølge. Det svarer til at vælge et element β i M^{k-1}, der opfylder $\beta = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(k-1)})$ for et eller andet σ i $S(k)$, som er gruppen af permutationer af k elementer.

At lave en afbildning $f : \mathcal{P}_k(M) \to M^{k-1}$, hvor

$$f(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(k-1)})$$

for et $\sigma \in S(k)$, er det samme som at udvælge $k-1$ elementer af enhver delmængde af M med k elementer, og lægge disse i en rækkefølge.

Hvis tryllekunstneren med garanti skal gætte rigtigt hver gang, så skal afbildningen f være injektiv.

Man kan hurtigt sætte en øvre grænse for m når k er givet. Skal f være injektiv, så skal der være flere elementer i den mulige billedmængde end i $\mathcal{P}_k(M)$. Den mulige billedmængde N for f i M^{k-1} består af $(k-1)$-tupler, hvor ingen af koordinaterne er ens. Derfor er

$$|N| = m \cdot (m-1) \cdots (m-k+2) = \frac{m!}{(m-k+1)!}.$$

Antallet af elementer i $\mathcal{P}_k(M)$ er

$$|\mathcal{P}_k(M)| = \binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!}.$$

En nødvendig betingelse for injektivitet af f bliver derfor

$$|\mathcal{P}_k(M)| \leq |N|,$$

hvoraf man får

$$m \leq k! + k - 1. \tag{1}$$

I tabellen nedenfor står listet den netop fundne øvre grænse for m givet k.

k	1	2	3	4	5	$\cdots$
$m \leq$	1	3	8	27	124	$\cdots$

Hvis betingelsen (1) er tilstrækkelig for eksistensen af den injektive afbildning f, så er det f.eks. muligt at udføre en tryllekunst, hvor der udtrækkes 5 kort ud af 124 og der lægges 4 frem på bordet. Det vil være en væsentlig forbedring af den tryllekunst, der blev beskrevet i starten af artiklen.

Om betingelsen (1) *også er tilstrækkelig er det ikke lykkedes skribenten at indse.* For $k = 1$ og $k = 2$ er det ligetil at finde en injektiv afbildning f for $m = k! + k - 1$. Med en smule arbejde er det også lykkedes at konstruere en injektiv f for $k = 3$ og $m = 8$. Men for $k = 4$ og $m = 27$ bliver det for uoverskueligt til at kunne udføre på papir. Og hvad med det generelle tilfælde $m = k! + k - 1$?

En passende afslutning på denne er artikel er derfor følgende opgave til læseren:

> **Opgave.** Find den største værdi af $m = |M|$, så der for givet k findes en injektiv afbildning $f : \mathcal{P}_k(M) \to M^{k-1}$, hvor
>
> $$f(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(k-1)})$$
>
> for et $\sigma \in S(k)$.

Og et passende sted at offentliggøre opgavebesvarelsen vil være i FAMØS.

Svar til opgaverne

1. $\diamondsuit$9 $\spadesuit$2 $\heartsuit$Konge $\clubsuit$7.
2. $\clubsuit$Es.
3. $\spadesuit$3 $\heartsuit$10 $\diamondsuit$Es $\spadesuit$Es.
4. $\spadesuit$Es $\diamondsuit$Es $\heartsuit$10 $\spadesuit$8.

Studenterkollokvierne

Sara Arklint

Efter jul er det ikke længere Mette Gerster og Lars Myrup Jensen der står for Studenterkollokvierne, da de hellere vil hellige sig deres specialer. To unge studerende, Marie Lund Christophersen og overtegnede, har meldt sig til at videreføre traditionerne – og skabe nye.

Da vi stadig ikke kender så meget til IMF's befolkning og endnu ikke har så stort et indblik i matematikkens mangfoldighed, vil vi nok ikke være i stand til selv at komme på interessante kollokviumsemner og -talere i samme grad som Mette og Lars gjorde det. Hvis der er et emne du gerne vil høre om eller en person du gerne vil høre på, må du derfor meget gerne sende os en mail om det, enten på `m02mlc@math.ku.dk` eller `m01sea@math.ku.dk`.

Selvom vi er to om at arrangere kollokvierne, kan vi sagtens være flere endnu. Så hvis du har lyst til at hjælpe med, må du også meget gerne sende en mail; der er ikke det store arbejde i det, men er vi flere, kan det blive sjovere.

Side 9-sætningen: En sætning om partitioner

Jørn Børling Olsson

En *partition* λ af det naturlige tal n defineres som en sekvens

$$\lambda = (1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, \cdots, k^{m_k(\lambda)}),$$

hvor *multipliciteterne* $m_i(\lambda)$ er ikke-negative hele tal, $m_k(\lambda) > 0$ og $\sum_{i=1}^{k} i m_i(\lambda) = n$. Vi skriver så $\lambda \vdash n$, og siger at *delen* i forekommer med *multipliciteten* $m_i(\lambda)$ i λ.

Givet en partition $\lambda \vdash n$ som ovenfor defineres

$$a(\lambda) = \prod_i i^{m_i(\lambda)}$$

$$b(\lambda) = \prod_i m_i(\lambda)!$$

Så $a(\lambda)$ er produktet af alle λ's dele og $b(\lambda)$ er produktet af "fakulteterne" af multipliciteterne, der forekommer i λ.

Her er en tabel for $n = 5$:

λ :	(1^5)	$(1^3, 2)$	$(1^2, 3)$	$(1, 2^2)$	$(1, 4)$	$(2, 3)$	(5)
$a(\lambda)$:	1	2	3	4	4	6	5
$b(\lambda)$:	120	6	2	2	1	1	1

Det ses, at produkterne $A(5)$ (hhv. $B(5)$) af alle $a(\lambda)$'erne (hhv. $b(\lambda)$'erne) i tabellen er ens, nemlig 2880. Vores første sætning er, at dette er et generelt fænomen.

Sætning 1: *Lad for* $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) = \prod_{\lambda \vdash n} a(\lambda), \quad B(n) = \prod_{\lambda \vdash n} b(\lambda).$$

Så er $A(n) = B(n)$.

Dette resultat er blevet bemærket flere gange af forskellige matematikere og der findes også nogle beviser af forskellig natur i den matematiske litteratur. Hvis man taste de første værdier af $A(n)$ ind i Sloanes "On-Line Encyclopedia of Integer Sequences", så får man følgende svar:

This is from the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.
ID Number: A007870
Sequence: 1,2,6,96,2880,9953280,100329062400,10651768002183168000, ...
Name: Determinant of character table of symmetric group S_n.
References: F. W. Schmidt and R. Simion, On a partition identity,
J. Combin. Theory, A 36 (1984), 249-252.
Formula: Product of all parts of all partitions of n.

I Schmidt og Simions arbejde finder man to beviser for Sætning 1. I forbindelse med et forskningsarbejde fik jeg for nylig brug for en generalisering af Sætning 1, som jeg vil præsentere her.

Hvis t er et reelt tal betegner $\lfloor t \rfloor$ det største hele tal, der er mindre end eller lig t. Lad os for vilkårlige naturlige tal ℓ og n definere

$$r(\ell, n) = \sum_{i \geq 1} \lfloor \frac{n}{\ell^i} \rfloor,$$

og for en vilkårlig partition $\lambda = (i^{m_i(\lambda)})$ definere

$$r(\ell, \lambda) = \sum_{i \geq 1} r(\ell, m_i(\lambda)).$$

Vi bemærker, at hvis p er et *primtal*, så er $p^{r(p,n)}$ den højeste potens af p, der går op i $n!$ (Det skyldes, at i alt $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ tal mellem 1 og n er delelige med p, $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ tal er delelige med p^2, osv.)

Vi kalder λ (ℓ-)$regulr$, hvis $m_i(\lambda) = 0$, når $\ell | i$. Vores generalisering af Sætning 1 involverer for givne naturlige tal n og ℓ følgende:

$$A_\ell(n) = \prod_{\lambda \vdash n \ regulr} a(\lambda),$$

$$B_\ell(n) = \prod_{\lambda \vdash n \ regulr} b(\lambda),$$

$$r_\ell(n) = \sum_{\lambda \vdash n \ regulr} r(\ell, \lambda) \, .$$

Vi har så

Sætning 2: *Der gælder følgende formel:*

$$B_\ell(n) = A_\ell(n) \ell^{r_\ell(n)}.$$

Lad os bemærke, at hvis ℓ vælges større end n, så er alle partitioner af n regulære og $r_\ell(n) = 0$. Derfor er Sætning 2 en generalisering af Sætning 1. Når man beregner konkrete eksempler på Sætning 2's udsagn, så er det slet ikke oplagt, hvorfor kvotienten mellem $B_\ell(n)$ og $A_\ell(n)$ bliver *en potens af* ℓ, i de tilfælde hvor ℓ ikke er et primtal. Man kan finde en relativ simpel formel for $r_\ell(n)$ udtrykt ved antallene af regulære partitioner af $n-\ell, n-2\ell, \ldots$

Bevis for Sætning 2: Betragt mængden $\mathcal{T}$ af tripler

$$\mathcal{T} = \{(\mu, i, j) \mid \mu \vdash n \; regulr, \; i, j \geq 1, \; m_i(\mu) \geq j\}.$$

Først vises at

$$A_\ell(n) = \prod_{(\mu,i,j)\in\mathcal{T}} i, \quad B_\ell(n) = \prod_{(\mu,i,j)\in\mathcal{T}} j.$$

Det følger fra den simple kendsgerning, at der for en fast regulær partition $\mu \vdash n$ og et fast i med $m_i(\mu) \geq 0$ gælder, at

$$(\mu, i, 1), \; (\mu, i, 2), \cdots, (\mu, i, m_i(\mu))$$

netop er listen af de elementer i $\mathcal{T}$ som begynder med μ og i. Disse $m_i(\mu)$ elementer giver et bidrag $i^{m_i(\mu)}$ til $A_\ell(n)$ (produktet af listens andenkoordinater) og et bidrag $m_i(\mu)!$ til $B_\ell(n)$ (produktet af listens trediekoordinater).

Vi definerer en involutorisk bijektion ι på $\mathcal{T}$ som følger. Når $(\mu, i, j) \in \mathcal{T}$, så vil ℓ ikke gå op i i, fordi μ er regulær. Endvidere indeholder μ *mindst* j dele i. Lad os skrive $j = \ell^v j'$, hvor v er et ikke-negativt heltal og $\ell \nmid j'$. (Vi kalder så ℓ^v for $\ell-$*delen* og j' for $\ell'-$*delen* af j.) Herfter dannes partitionen $\mu_{(i,j)}$ ud fra μ ved at erstatte j dele lig med i i μ med $\ell^v i$ dele lig med j'. Vi definerer nu $\iota(\mu, i, j)$ som $(\mu_{(i,j)}, j', \ell^v i)$. Dette er igen et element i $\mathcal{T}$. Det er meget let at se, at ι^2 er den identitiske afbildning, så ι *er* involutorisk.

Bijektionen ι viser det andet lighedstegn i denne ligning:

$$A_\ell(n) = \prod_{(\mu,i,j)\in\mathcal{T}} i = \prod_{(\mu,i,j)\in\mathcal{T}} j',$$

hvor j' som før er $\ell'-$delen af j. Vi konkluderer, at kvotienten mellem $B_\ell(n)$ og $A_\ell(n)$ netop må være produktet af alle ℓ-dele af alle trediekoordinater af elementerne i $\mathcal{T}$. Men for en given regulær partition μ er produktet af ℓ-delene af trediekoordinaterne af alle $(\mu, i, j) \in \mathcal{T}$ netop $\ell^{r(\ell,\mu)}$.

Matematikseminaret

Katja og Malene

Vi søger nye arrangører til vores årlige seminar på matematikstudiet!

Matematikseminar er et seminar arrangeret af studerende på matematikstudiet. Seminaret henvender sig til både hoved- og bifagsstuderende i matematik på 3. år og op efter. Seminaret er oprindelig planlagt for disse studerende, da man først på 3. begynder at have valgfrie punkter.

Seminaret foregår som regel i en hytte, ikke så langt fra København, lige inden semesterstart i september. På seminaret bliver der informeret om alt fra bachelorprojekter, fagprojekter og specialer til udlandsrejser og jobmuligheder. Seminaret skulle derudover gerne give et overblik over, hvad Matematisk Institut kan tilbyde af kurser.

De fleste af forelæserne på 3. års kurserne og en del af forelæserne på overbygningskurserne vil holde et oplæg på seminaret, hvor de vil fortælle om deres kursus. Dette giver en god mulighed for at høre hvad de forskellige kurser går ud på, samt møde forelæserne inden semesterstart. Der vil ligeledes være mulighed for at møde kandidater, som har taget det store spring ud i erhvervslivet, samt andre studerende der deler ud af deres erfaringer vedr. projekter og udlandsophold.

Seminaret har ry for hyggeligt samvær, hvor man kan møde kommende studiekammerater, og ikke mindst den store fest sidste aften. Som seminararrangør skal du være med til at planlægge, forberede og afvikle selve seminaret, dvs. skaffe foredragsholdere, sælge billetter, sørge for hytte, lave madplan, arrangere fest m.m.

Som tidligere seminararrangører kan vi garantere, at det er sjovt og ikke så tidskrævende. Det kræver lidt planlægning i slutningen af semestret lige inden, da det er her, man skal tage kontakt til foredragsholderne samt sælge billetter til sine medstuderende. Derudover kræver det lidt arbejde i august måned, når de sidste detaljer skal falde på plads.

Vi har flere års erfaringer som vi selvfølgelig gerne giver videre, f.eks. madplaner, kontakter til foredragsholdere osv. Vi har i årenes løb holdt adskillige seminarmøder, nogle mere hektiske end andre, men det har nu altid været en hyggelig måde at møde andre studerende på. Seminaret har altid været en hyggelige tur, som nok mest af alt går ud på at få nogle hyggelige dage med sine medstuderende.

Har du fået lyst til at arrangere matematikseminaret, kan du sende en mail til `m99trk@math.ku.dk`.

Opgaver

Sara Arklint

I hvert nummer udlover FAMØS en præmie til den der besvarer flest af de af FAMØS stillede opgaver. Vi må for god ordens skyld nu gøre det klart at redaktionsmedlemmer og disses familiemedlemmer ikke kan vinde præmierne.

Opgavebesvarelser

Vi har modtaget en besvarelse på en opgave. Opgaven gik ud på at bestemme $T, O, R, E, S, K \in \{0, \ldots, 9\}$ så $TO \cdot TRE = SEKS$ var opfyldt. Peter Arklint har sendt os 70 løsninger som han har fundet ved hjælp af SAS og følgende stump kode:

```
Data opgave;
Format t o r e s k 1.0;
Do t=0 to 9
 Do o=0 to 9
  Do r=0 to 9
   Do e = 0 to 9
    Do s = 0 to 9
     Do k= 0 to 9
      If (t*10+o)*(t*100+r*10+e)=s*1000+e*100+k*10+s
       Then output;
      End;
     End;
    End;
   End;
  End;
 End;
End;
Run;Proc Print;run;quit;
```

Vi er meget glade for Peters besvarelse af denne den letteste af de stillede opgaver; han har, ved næsten intet arbejde, vundet en rulle af Mølle-Skovlys økologiske marcipan (den marcipan der fik højest karakter i Tænk+Tests marcipantest sidste jul).

Da Peter ikke længere kan vinde præmier (Why?), modtager vi nok ikke så mange besvarelser fra ham længere, så det ville være rart at modtage fra andre også.

Hvis du føler at FAMØS' opgaver er for lette, er du meget velkommen til at sende os en mail, og meget gerne en med opgaveforslag i. Alle er sådan set meget velkomne til at sende opgaver af alle sværhedsgrader ind, vi vil med glæde bringe dem.

Da vi ikke har fået besvarelser på de andre opgaver, og der heller ikke har været andre tegn på interesse for dem, bringer vi ikke besvarelser af dem; vi kender jo ellers alle de rigtige svar. Skulle du ønske at få et af disse svar åbenbaret, kan du kontakte FAMØS.

Nye opgaver

Hvorfor kan Peter ikke længere vinde præmier i FAMØS?
Den anden opgave kan du finde sidst i artiklen 'En tryllekunst'.

Fremtidens evaluering

Mathias Madsen og Simon Eirikson

Onsdag d. 27. november afholdt fællesmatematisk fagråd et debatmøde under titlen “Fremtidens evaluering”. Temaet var evalueringen af de studerende på IMF, og anledningen var bl.a., at vi som studerende føler, at økonomien er begyndt at blive den vigtigste faktor for hvordan evalueringerne bliver udformet, og at vi har svært ved at se idéen og systemet bag de forskellige forsøg og alternative evalueringsformer, der bliver afprøvet. Vi ville derfor forsøge at etablere en kommunikation med instituttet, og spørge VIP’erne hvor vi er på vej hen, hvordan de forestiller sig fremtidens eksamens-/evalueringsformer, og hvilke erfaringer, de har gjort sig under tifligere forsøg.

Mødet var det meste af tiden en generel og principiel debat, hvor de forskellige tanker og holdninger kom fint til udtryk. Selvom den efterfølgende debat ikke ligefrem endte i enighed, udviste deltagerne langt hen af vejen en konstruktiv og åben holdning. Der var over tredive deltagere, hvoraf syv var VIP’ere og resten var studerende.

De indbudte talere var fire VIP’ere og en studerende. Jan Philip Solovej og Niels Grønbæk fortalte om deres egne erfaringer med anderledes evalueringsformer Mat 1GB og 2AN. Kjeld Bagger Laursen, som er centerleder på Center for Naturfagenes Didaktik, stod for den didaktiske vinkel på debatten. Jesper Lützen, der arbejder med implementeringen af den nye studiestruktur på IMF, holdt oplæg om perspektiverne for evaluering indenfor den nye studiestrukturs rammer.

Første taler var Jan Philip Solovej, og han samlede op på erfaringerne med de skriftlige afleveringer på Mat 1GB foråret 2002. På det kursus havde de studerende ugentligt afleveret tre til fem opgaver, hvoraf kun én blev rettet og blev tildelt en karakter. Der blev ialt stillet 10 ugeopgaver, og i slutningen af semesteret fik hver studerende udregnet gennemsnittet af sine 7 højeste opgavekarakterer. Efter mundtlig og skriftlig eksamen blev den samlede karakter udregnet som 20% af dette karaktergennemgennemsnit + 40% af karakteren for den mundtlige præstation + 40% af karakteren for den skriftlige.

Hen mod kursets afslutning (før eksamen) blev der gennemført en skriftlig evaluering af undervisningsforløbet. Her erklærede et stort flertal af de studerende, at de godt kunne leve med det benyttede system, men at de naturligvis hellere ville have rettet alle de afleverede opgaver.

Eksamensresultaterne var gode; Beståelsesprocenten var mærkbart højere end på Mat 1GB 2001, og en større andel af de studerende meldte sig til eksamen.

Jesper Lützen sidder i et udvalg, der beskæftiger sig med, hvordan matematikstudiet skal forme sig, når den nye studiestruktur bliver indført. Dette arbejde inkluderer også at gentænke undervisnings- og evalueringsformerne på matematik, og han opridsede i sit oplæg sin oplevelse af fortidens evalueringsformer og sine visioner for fremtidens.

Jesper Lützen berørte i sit oplæg nogle af de grundlæggende konflikter, der har præget debatten indtil nu; De studerende ved IMF har traditionelt kæmpet for frihed i læringen og retfærdighed i bedømmelsen, mens undervisere og ledelse lægger mere vægt på, at eksamenerne får de studerende til tilegne sig de relevante kompetencer og tester hvorvidt de har gjort det.

Niels Grønbæks oplæg handlede om tankerne bag og hans erfaringer med de to forsøg, han har kørt på 2AN. Det ene gik ud på, at de studerende parvis udvekslede opgaver og skulle rette hinandens skriftlige arbejde. Som gulerod fik de studerende, der deltog, lov til at blive eksamineret i et mindre pensum. Idéen var, at det skulle gøre de studerende bevidste om den kommunikative værdi i deres skriftlige arbejde og udsætte dem for en selvstændig arbejdssituation. De studerende følte sig dårligt rustet til den nye form, og forsøget medførte en storm af protester.

I det andet forsøg, som kører netop nu på 2AN, skal de studerende producere seks såkaldte temaopgaver om hver sit emne, der tilsammen berører det meste af kursets pensum. Til den mundtlige eksamen er der seks spørgsmål, der er identiske med overskrifterne på de seks temaopgaver, og de studerende eskamineres i deres egen tekst. Forsøget er blevet mødt med stor usikkerhed fra flere studerende, og nogle mener, at arbejdspresset er for stort.

En af pointerne i Niels Grønbæks oplæg var, at eksamen er et utrolig stærkt værktøj til at få de studerende til aktivt at tilegne sig viden, fordi flittigheden er nærmest grænseløs, når det handler om emner, der bliver testet. Han mente derfor, at det er vigtigt, at studenterevalueringen er konstrueret, så den bidrager til læring af brugbare kompetencer snarere end indholdstom eksamensteknik.

Dermed foregreb han Kjeld Bagger Laursens foredrag, som især kredsede om en kreativ, uortodoks og på nogle ekstremt provokerende vision han havde om hvordan et lineær algebra-kursus på matematikstudiets første semester kunne se ud i en ikke så fjern fremtid. Dette forslag inkluderede bl.a. skemalagte læse-/diskussionstimer, opprioritering af gruppearbejde og opgaveløsning og nedprioritering af forelæsningens rolle som kernen i et kursus. Som evalueringsform forestillede han sig løbende opgaveregning og en lille skriftlig eksamen i opgaveregning og tekstforståelse.

“Man må udtale explicit, hvad man ønsker de studerende skal lære og honorere dem, når de lærer det,” sagde Kjeld Bagger og formulerede dermed grundtanken bag sit eksotiske “Mat 1GA”.

Herefter holdt de studerendes repræsentant i studienævnet, Esben Flachs, et oplæg om sin holdning til obligatorisk arbejde på matematikstudiet. Oplægget stod i en skærende kontrast til Kjeld Baggers forestilling om evaluering som undervisernes værktøj til at holde de studerende fast i et fornuftigt studiemønster. Bl.a. udtalte Esben, at et kendetegn ved universitetsundervisning i modsætning til skole-undervisning netop burde være, at de studerende selv har ansvaret for deres studier og muligheden for at læse på den måde, de selv følte var mest givende.

Hermed var bolden givet op til et tema, som kom til at præge debatmødet, nemlig spørgsmålet om de studerendes frihed til selv at vælge studieteknik. Fælles for de forslag, som VIP'erne præsenterede, var nemlig, at de forsøgte at tænke evalueringen mere ind i undervisningsforløbet end tilfældet er med den traditionelle summative knald-eller-fald-apokalyptiske sluteksamen. Flere studerende stejlede over denne tankegang, fordi de følte deres frihed i studiet ville blive krænket.

Denne holdning blev der sat store spørgsmålstegn ved fra VIP'ernes side. Niels Grønbæk hævdede, at debatten om frihed i studiet mest bliver rejst af de ressourcestærke studerende og at han er nervøs for, at der er et stort tavst flertal med andre, uartikulerede behov. Kjeld Bagger Laursen mente ligefrem, at idéen om "det frie studium" var en måde at kaste ansvaret af sig fra de studerendes side.

I den efterfølgende debat blev et par kæpheste luftet, og den debatten om obligatoriske opgaver eller ej blev vendt adskillige gange.

Søren Eilers refererede til et tidligere system på Mat 1, hvor de studerende havde mulighed for at aflevere ikke-obligatoriske opgaver. Kun ca. 25% af hver øvelseshold benyttede sig af denne mulighed, og det var typisk netop de personer som kunne deres stof og derfor ikke havde behov for at aflevere opgaver. "Vi tænkte: 'Hvorfor benytter de sig ikke af denne enestående mulighed?'," sagde Søren Eilers. Studieleder Jens Hugger udtalte om et andet kursus: "Hvis de studerende ikke regner opgaver, består de ikke. Hvis opgaverne ikke er obligatoriske, regner de dem ikke. Derfor gjorde vi opgaverne obligatoriske."

Esben havde svært ved at få øje på de studerendes ansvar for egen læring: "Vi har obligatoriske opgaver helt op til 3GT. Hvornår træder studiefriheden ind?"

Debatten ledte ikke til nogen endegyldig konklusion, sandsynligvis fordi underviserne og de studerende i realiteten ikke var enige om, hvad de diskuterede. Der kom imidlertid mange argumenter og personlige oplevelser på bordet, og eksmpelmaterialet var jo så at sige selv tilstede.

Debatmødet svingede mellem de visionære, pædagogiske idéer og de konkrete, politiske diskussioner. Selv om mødet ikke får nogle umiddelbare konsekvenser for studiet, har det forhåbentlig sat gang i tanker på bagge sider af bordet, og det kan blive starten på en fremtidig debat præget af samtale og kreativitet snarere end skyttegravskrig og snæversynethed.

Sierpinski problemet

Tarje Bargheer

Jorden vrimler med mennesker som forsøger at konstruere og bevise nye matematiske sætninger. For at opnå denne, for mange, store drøm vil en standardmetode være at tage hænderne ned i noget god og saftig matematisk muld; mens man nøje føler efter hvad der måtte springe frem af sammenhænge heri. Så snart man syner en sammenhæng begynde at spire frem af muldet, skal man skynde sig at formulere en påstand. Det eneste der mangler for at man selv kan tilføre matematikken det ønskede liv, er den store forkromede idé der beviser hele påstanden.

Sådan er det bare ikke altid! - Nogen gange kan man selvfølgelig ikke få ideen, andre gange finder man modeksempler til nok så plausible påstande, men helt andre gange er det simpelthen pure matematisk dovenskab, der gør at sandheden ikke kommer frem:

I 1960 beviste polakken Waclaw Sierpinski at der findes uendeligt mange følger af formen $(x_n)_{n=1}^{\infty} = k \cdot 2^n + 1, k$ fast, hvor alle x_n er sammensatte tal (altså ikke primtal). Et k der gør følgen primtalsfri kalder vi, med sædvanlig matematisk selvhøjtidelighed, for et Sierpinski tal.

Sætningen virker for så vidt ganske lille og uskyldig, havde det ikke været for John Selfridge der to år senere beviste at et eksempel på en sådan primtalsfri følge er $x_n = 78557 \cdot 2^n + 1$, og derudover havde han den frækhed at påstå at $k = 78557$ er det mindste Sierpinski tal.

For at bevise at denne påstand er sand kræves ingen gode ideer, blot en usandsynligt stor mængde papirer og blyanter; man skal nemlig bevæge sig op igennem samtlige følger med $k < 78557$, indtil man støder på et primtal (man kan dog undlade de lige tal, da et lige tal er 2 i en eller anden potens gange et ulige tal, og har man elimineret alle de følger med ulige k-værdi, kan man således opnå alle lige tal ved at gange med 2 tilstrækkeligt mange gange(fx. $6 \cdot 2^n + 1 = 3 \cdot 2^{n+1} + 1$, og $n = 1$ giver 13)). Selvom der, for den troende, kun er endeligt mange tal at tjecke igennem, er der ikke nogen matematiker der har orket at sætte sig ned for at løbe alle følgerne igennem og primteste de enorme tal der lige så stille opstår når n bevæger sig opad. - Matematisk Institut ville nok også hurtigt blive lukket af en vred regering, hvis man satte alle professorer og studerende til at arbejde på dette problem indtil det blev bevist!

Heldigvis er der håb for at den kære påstand kan komme ud af usikkerhedens dunkle tåger - Selvom man har vægtet det menneskelige liv højere end viden om sætningens sandhedsværdi, har man (endnu) ikke samme store medfølelse for vore logisk begavede idioter. - Computere har knoklet på at løse problemet i de fyrre år som påstanden nu har stået ubevist hen!

Og computerne har arbejdet godt for sig, tilbage er nu kun at finde primtal i femten følger, før computere får føjet endnu et bevis, til deres liste; to af følgerne er blevet elimineret inden for den seneste uge, det har nemlig vist sig d. 27/11 - 2002 at tallet $46157 \cdot 2^{698207} + 1$ er et primtal, og d. 3/12 - 2002 at $65567 \cdot 2^{1013803} + 1$ ligeledes er et primtal; bemærk at disse tal er så store at deres decimalfremstilling ville fylde omkring hundrede normalsider; altså hvad der, hvis vi kan finde et tilstrækkeligt postmodernistisk forlag, bliver til en mindre roman! - Et tal af den kaliber kræver en usandsynligt stor regnekraft for at finde ud af om det er et primtal. - Derfor er det, i dette tilfælde, heldigt at verden netop har mange computere!

Måske har du også en computer derhejemme, og så har du muligheden for at sætte den til at deltage i jagten på sandheden. - På `www.seventeenorbust.com`, kan man downloade et program (til, næsten, det styresystem du måtte ønske) der henter et muligt primtal fra en server i Amerika og herefter bruger den tid hvor din computer alligevel ville have CPU-tid ledigt til at arbejde på at finde ud af om tallet virkeligt er et primtal eller ej! Hjemmecomputere verden over står ofte tændt i længere perioder og bruger enormt meget af denne tid på at føre meningsløse dialoger (selv når man kører andre programmer) med sig selv til ingen anden nytte end at computeren til sidst bliver bange for sin egen sjæl.

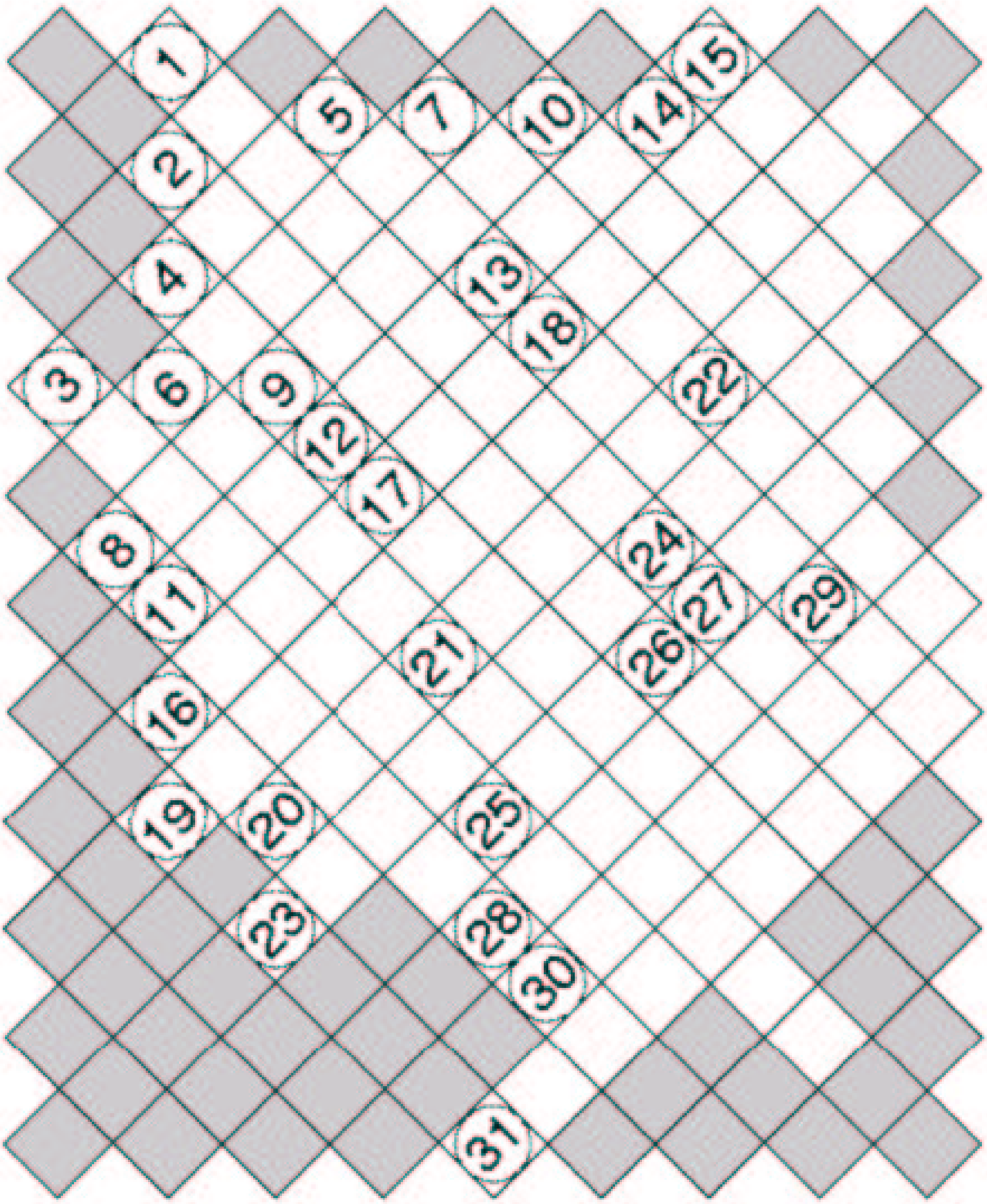
`www.seventeenorbust.com` har delt tal ud til hele verden i nu otte måneder, men har dog kun fundet de to nævnte primtal indtil videre (de begynder dog, som man kan se på datoerne at dukke frem)! - Der ligger højst sandsynligt femten primtal mere derude, som bare venter på at måske din computer vækker dem til live!

Grunden til at så mange mennesker har hentet programmet er naturligvis håbet om at netop de er så heldige at finde et primtal (det tager for en almidelig hjemmecomputer en dag at teste om et tal er et primtal, så man kommer til at føle det lidt som om man har vundet i Lotto, hvis man finder et primtal), uden selv at have rørt en finger (da computeren kun udnytter, hvad der ellers havde været spildtid, har man heller ikke lidt under en langsommere computer)!- Som en særlig social gestus, kan man søge i flok, med mennesker man føler sig særligt knyttet til. Af særlig relevans for læsere af FAMØS er nok holdet `CampusHafnia`, der samler folk fra Københavns Universitet.

Denne, i mine øjne, meget sympatiske praksis med at lade hjemmecomputere arbejde på gigantiske datamængder, og således bidrage til forskningen, er ved at blive mere og mere populær. Af andre projekter som `www.seventeenorbust.com` kan nævnes et projekt der undersøger om jorden skulle modtage tegn på intelligent liv fra andre steder end vores egen planet, forsøg på at finde en kur mod AIDS, samt at forudsige klimaet om 50 år! - Således er det

beskrevne problem altså kun et eksempel (med en vis relevans for matematikere) på hvad man kan sætte sin computer til at arbejde på af mere eller mindre absurde ting. For et bredere udsyn over hvordan du kan bruge den seje datakværn, der nok også står i dit hjem, til noget meningsfyldt, kan du besøge
`www.aspenleaf.com/distributed`.

> OBS! Kort inden deadline havde `seventeenorbust.com` fundet at $44131 \cdot 2^{995972} + 1$ også er et primtal, og har således følger nu kun 14 følger. - Er en ny triologi, op ad tidens trend, på trapperne?


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31

Ord$\times$Ord

FAMØS' redaktion

Lodret

1 : Komplekst differentiabel

2: Et ikke forkert udsagn er, ifølge Topsøe, ...

3: Ikke konvekse

4: A så $\forall x \in X : x \notin A$

5: Neutralt element i $\mathbb{K}$ mht. $\cdot$

6: $\varphi\left(\frac{\sum \alpha_\nu x_\nu}{\sum \alpha_\nu}\right) \leq \frac{\sum \alpha_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum \alpha_\nu}$

7: Fornavnet på Sonja Kovalevskis storesøster

10: Tysk matematiker, 1845-1918, der viste at $\mathbb{N} \not\sim [0,1]$

11: Afbildningen $f : \{t | t \text{ er et stykke træ}\} \to \{j | j \text{ er en hjemmelavet julegave}\}$

14: Første danske professor i datalogi

15: Fornavnet på dansk optisk fysiker, 1644-1710

17: Det land Cantors far kom fra

18: Et Matematikkolokvium for nylig havde disse tal som emne

21: Mangfoldighedernes fader

22: Gammeldags regnebænk

25: $a \in G$ så $\lim_{z \to a}(z-a)^n f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ for et $n \in \mathbb{N}$

26: Det kan beregnes i polynomiel tid, det kan ...

27: Sædvanlig differentialligning

29: Første element i $\mathbb{N}$

Vandret

4: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(\pi n)^2}$

6: Betragte det indre af Caféen?s toiletter

8:Ortogonal på til højre

9: ι

11: Indexvariablens værdi

12: Billedet, $f(D_m)$

13: Engelsk forkortelse for numeriske beregninger

16: $\lim_{n \to \infty}$ (British Airways)

17: En af Jupiters måner

18: 10^{-9}

19: "Nærmest barnligt..."

20: Politisk tilbagemelding på universitetsreformen

21: α

22: Mangfoldighed af myrere

23: Tæt på ∞

24: γ^*

25: $a + ib \mapsto b$

27: Modsat basisk

28: Kontinuert surjektiv kurve $[0,1] \to [0,1]^2$

30: Den åbne kurvesammenhængende mængde

31: Delmængden af universet

Numerisk Analyse og lidt om Matematisk Modellering

Eva Willerslev

Forestil dig, at du står med et matematisk problem, som du ikke kan løse analytisk eller som er meget svært at løse. Det kan dreje sig om en *matematisk model*, som beskriver en eller anden kompleks sammenhæng fra den virkelige verden. Du har altså været stillet overfor et eller andet praktisk problem, som kræver en matematisk løsning. Du har brugt al din kreativitet til at afgrænse problemet og fastsætte variabler, uafhængige såvel som afhængige, og parametre, hvis talværdi du måske kan få oplyst eller beregne. Du har tænkt dig frem til variablenes indbyrdes relationer og opstillet de relevante ligninger. Nu står du så med en gigantisk model, som du ikke har nogen jordisk chance for at løse analytisk. Måske har modellen slet ikke en generel løsning. Det betyder, at du må bruge numeriske metoder, dvs. søge en god tilnærmelse til en løsning vha. numeriske (talmæssige) beregninger. Hvis det iøvrigt er en fornuftig og matematisk sund model, du arbejder med, vil du være istand til at bestemme en numerisk løsning, som giver dig svaret på det oprindelige, praktiske problem. Det er simpelthen dette, der er formålet med *numerisk analyse*.

Numeriske Algoritmer

Kernen i den *numeriske analyse* er selve udviklingen og den nøjere undersøgelse af de metoder, kaldet numeriske algoritmer, der kan bruges til at approksimere løsninger til ellers håbløse matematiske problemer. Det er også metoder, der kan bruges til at studere, hvordan særligt komplekse systemer opfører sig, når man f.eks. går ind og ændrer i parameterværdierne. Her vil jeg sige lidt om nogle af de mest brugte metoder.

Vi er vant til fra den rene matematik, at en funktion er kendt og veldefineret på hele sit domæne. Sådan er det ikke nødvendigvis i anvendt matematik. Her kan det forekomme, at en funktions værdier kun er kendt i nogle enkelte punkter. Det kan handle om nogle datapunkter stammende fra målinger eller observationer i felten. Eventuelt kan man være så heldig, at disse datapunkter sammen med ens viden iøvrigt om funktionssammenhængen er tilstrækkeligt til at bestemme alle de ukendte parametre og dermed opstille et numerisk udtryk for funktionen. Hvis funktionen for eksempel vides at skulle beskrive en logistisk vækst, da vil man søge det logistiske udtryk for den, som bringer den tættest muligt på flest mulige datapunkter. Her vil man ofte søge at at minimere summen af kvadraterne på fejlene ved en metode kaldet *least squares error*. Ved man imidlertid ikke, hvilken type vækst eller udvikling funktionen beskriver, må man benytte en metode kaldet *interpolation* eller *datafitning* til at approksimere den. Det handler om at bestemme en funktion, som ikke blot går igennem de givne punkter, men som også følger den trend, som punkterne udstikker. Det mest almindelige er at interpolere med polynomier eller splines, som er glatte, stykkevis polynomiumsfunktioner. Når man søger funktionsværdier *udenfor* det domæne, som datapunkterne afgrænser, kaldes det *extrapolation*. Her er man ovre i prognoserne og naturligvis på mere usikker grund.

Størrelser, som ikke kan beregnes analytisk, må erstattes med numeriske approksimationer. Eksempelvis vil et bestemt integrale, som ikke har nogen analytisk løsning kunne tilnærmes ved hjælp af såkaldt *numerisk integration*, som i princippet er en endelig summation af funktionsværdier. Den afledede i et punkt kan tilnærmes med en differenskvotient, og det kan sammen med interpolation bruges til at bestemme hvad der svarer til den afledede af en funktion i et begrænset interval. Dette kaldes *numerisk differentiation*. Der er udviklet mange forskellige sådanne differentiations- og integrationsmetoder. De indgår som hovedbestanddele i de større algoritmer, der bruges på differentialligninger og randværdiproblemer. Visse typer af differentialligninger løses dog bedst ved den såkaldte *endelige differens metode*, hvor differentialligningen erstattes med en eller flere differensligninger. Hvilken metode og hvilken intervalindeling, man vælger, beror dels på det aktuelle problem og dels på hvor stor en fejl i løsningen, man er villig til at tolerere, og hvor meget tid eller computerregnekraft, man vil bruge. Jeg vender tilbage til denne problematik i afsnittet om den numeriske fejlanalyse.

Lineære ligningssystemer løses på den almindelige algebraiske facon med f.eks. *Gauss-elimination*. Men hvad er nu det særligt numeriske ved det? Jo, lad os sige at ligningssystemet faktisk er en matematisk model af et eller andet fysisk system. Så vil der, blandt andet på grund af måleusikkerheden, uundgåeligt være nogle ganske små fejl i de indgående parametre. Af denne grund har systemet ikke nogen egentlig analytisk løsning. Det vil Gauss-eliminationen vise. Havde der nu været tale om et rent matematisk problem, så ville man sige, at det var forkert stillet, fordi det ikke kan løses. Her vil man imidlertid være tilfreds med en næsten-løsning, fordi man gerne vil tillade den lille fejl i modellen at medføre en lille fejl i løsningen.

Systemer af ikke-lineære ligninger kan ofte løses effektivt ved *iteration*. Det handler om, at man ved gentagen indsættelse i samme ligningssystem opnår stadigt bedre og bedre approksimationer til løsningen. Endelig skal omtales *numerisk optimering*, der ofte involverer løsninger af såvel lineære som ikke-lineære systemer ved iteration.

Computeren

Når ens matematiske model er bragt på en form, hvor den kan løses med numeriske metoder, og man har opskrevet en passende algoritme som forhåbentlig løser problemet, så er næste skridt at implementere hele molevitten i et matematikprogram. Fordelen ved dette er selvfølgelig dels, at man kan udnytte computerens regnekraft til at eksperimentere med algoritmen, uden at skulle bruge en mennskealder på de ofte uhyggelig mange funktionsevalueringer. Og dels er det jo en stor fordel, at kunne gemme og genbruge algoritmen på et senere tidspunkt, for det kan godt være et større arbejde at skrive den op.

De mest brugte matematikprogrammer her på instituttet er vist nok *mathematica*, *maple* og *matlab*. Jeg tør selv stå inde for, at det godt kan lade sig gøre at lære at bruge *matlab*, uden at man på forhånd er en ørn til computere. Og det er sjovt nok meget forfriskende og anderledes at opleve matematikken indefra denne computerverden. På HCØ finder du *matlab* på serveren af navn *shannon*. Gå ind på den og skriv *matlab* i promten, så kommer det frem. Der er en udmærket hjælpefil, som hjælper en med at komme i gang og hvor man finder svar på alle spørgsmål. Men hvis man virkelig vil lære at bruge *matlab* eller et af de andre programmer, er det allerbedste selvfølgelig at følge et kursus eller læse en bog, som bruger dette program aktivt. Ønsker man *matlab* hjemme, kan studenterversionen erhverves direkte fra producenten *mathworks* for ca. 1000 kroner.

Fejlanalyse

Flere fejlkilder kan influere på den numeriske løsning af en given matematisk model. Lad os sige, at modellen er korrekt opstillet. Måske tager den ikke højde for alle faktorer og udgør dermed et forsimplet billede af den virkelige (fysiske, biologiske, sociale, økonomiske,...) situation, men den er så god den kan være uden at blive helt uoverskuelig. For at vurdere de parametre, der indgår i modellen, vil man være afhængig af et vist datamateriale, altså nogle konkrete målinger eller observationer. Disse kan meget nemt være behæftede med fejl, f.eks. på grund af måleusikkerheden. Dette er den første fejlkilde, som også omfatter indtastningsfejl og andre menneskelige fejl ved målingerne. Hvilket får en til at tænke på, at modelløren, matematikeren, nemt kan komme til at regne galt et sted eller bruge en uegnet metode. Dette er den anden fejlkilde. Begge kan selvsagt være helt ødelæggende for den endelige løsning, og man kan kun anstrenge sig for at opdage disse fejl i tide og undgå eller minimere dem.

Den tredie kilde til fejl i beregningerne skyldes simpelthen *afrunding*. De fleste tal har jo uendelige decimalrepræsentationer, som må rundes af. Lommeregnerne og matematikprogrammer regner med 15-16 decimaler, hvad man umiddelbart skulle tro gav en fin præcision for de fleste formål. Men multiplikation med meget små tal kan gå hen og ødelægge præcisionen, så ikke engang de første decimaler er pålidelige. Det må man passe på med.

Endelig er der *trunkeringsfejlene*, som udgør den fjerde og ofte den største fejlkilde. Det er de fejl, der uundgåeligt er forbundet med regning med tilnærmede værdier eller mao. de fejl, der ligger implicit i selve de numeriske metoder. Navnet kommer af det engelske "truncate", som betyder afskære eller lemlæste, idet man jo egentlig lemlæster de uendeligdimensionale, analytiske metoder og gør dem til endeligdimensionale, numeriske metoder.

Man stræber selvfølgelig altid efter, at algoritmen skal være både pålidelig, præcis og effektiv. Pålideligheden er en ting. Det handler om, at algoritmen skal *konvergere* imod løsningen. Den må simpelthen ikke løbe løbsk i en gal retning. Den må for eksempel ikke nærme sig et lokalt ekstremum, hvis det er det globale, man er ude efter. Det er selvsagt meget vigtigt at analysere en algoritmes konvergensegenskaber. Man vil f.eks. gerne vide, hvor hurtigt algoritmen konvergerer i forhold til den valgte skridtlængde eller antallet af funktionsevalueringer.

Ambitionen om præcision mht. de tilnærmede værdier og ambitionen om effektivitet mht. anvendt regnekraft er desværre modsat rettede. Der er tale om en balancegang, idet stor præcision ofte koster dyrt mht. antal funtionsevalueringer, dvs. algoritmen arbejder langsomt og er altså mindre effektiv. Forvirrende nok vil alt for mange funktionsevalueringer virke negativt på præcisionen. Der sker nemlig det, at den totale fejl, som er summen af trunkerings- og afrundingsfejlene, for et stigende antal beregninger først vil aftage og siden stige igen. Et sted på vejen er den totale fejl altså mindst mulig. Derfor er det også af største betydning for den numeriske analytiker at kunne estimere såvel afrundingsfejlene som trunkeringsfejlene i de enkelte algoritmer. For eksempel ønsker man at vide, om en lille fejl på begyndelsesbetingelsen i en differentialligning også kun giver en lille fejl på den tilnærmede løsning. Er dette tilfældet kaldes problemet for *well-conditioned*. Et problem kaldes for *well-posed*, dersom man har mulighed for at gøre fejlen i løsningen så lille, man ønsker.

Opdag anvendt matematik
Det er en oplagt mulighed at lære noget om *numerisk analyse*, og herigennem noget om matematisk modellering, samtidig med at man lærer at bruge computeren til mere end bare tekstbehandling. Jeg vil virkelig opfordre mine medstuderende til at tage chancen mens den er der. Hvis du først opdager computeren og den anvendte matematik, når du er ved at være færdig, kan det være for sent, for så skal tiden og resten af punkterne pludselig bruges på specialet.

Det skal understreges, at selv om *numerisk analyse* i grunden er en *approksimationsteori*, så er den solidt funderet i den eksakte matematiske analyse, hvorfra den henter sine redskaber, bevisteknikker osv. Men den er typisk en gren, man ærger sig over at have opdaget for sent. Fordi den giver den ekstra dimension at kunne bruge den rene matematik til at løse problemer indenfor alle mulige andre felter. Man risikerer til og med at få et større udsyn.

Her til sidst vil jeg blot ganske kort omtale nogle andre grene af matematikken, som er beslægtede med *numerisk analyse*. Det drejer sig dels om *operationsanalyse*, der beskæftiger sig med strukturering og optimering af organisatoriske problemer. Det er selvsagt et emne af stor praktisk betydning og en meget spændende måde at bruge matematikken på. Dels drejer det sig om *differentialligninger*, som det også er kollosalt nyttigt at lære om, fordi de simpelthen bruges overalt i den anvendte matematik. Det er jo i bund og grund anvendelserne, som er selve meningen med matematikken.

Litteratur
F.R.Giordano, M.D.Weir og W.P.Fox, *A First Course in Mathematical Modeling*, 3.ed., Brooks/Cole-Thomson Learning, USA, 2003.
G.Lindfield og J.Penny, *Numerical Analysis using Matlab*, 2.ed., Prentice Hall, USA, 2000.

Der er skrevet bunker af bøger om matematisk modellering og numerisk analyse, men her er i hvert tilfælde to, jeg godt kan anbefale. Den første giver en lærerig rundtur i matematikkens mange og højst forskelligartede anvendelser. Du kan godt regne med at blive overrasket et par gange under læsningen. Den anden giver en letfattelig introduktion til *numerisk analyse* og simpel, matematisk programmering. Du må ikke lade dig skræmme af, at matematikken ikke er så svær i disse to bøger. Glæd dig i stedet for over at kunne forstå tingene til bunds for en gangs skyld.

Sagaen er vor jammer!!!

Mrs. dat-kranium og Darwin: Stenet hash-imam

Indledning

Nærværende artikel er et resultat af en håndfuld personers totale fravær af fornuft og manglende evne til at afholde sig fra at dedikere 30 til 50 % af al forelæsningstid til produktion af anagrammer. Enhver jordforbindelse er utilsigtet og tilfældig. Forfatterne tager ikke ansvar for evt. legemlig eller psykisk skade pådraget under læsningen.

definitioner og notation

Lad to endelige sproglige udtryk A og B være givet. Uagtet konsekvenserne af vores handlinger indfører vi følgende definition:

$$A \sim B \qquad \iff \qquad \exists\left(\sigma:\ A\cap\text{alfabetet}^{(\mathbb{N})} \mapsto B\cap\text{alfabetet}^{(\mathbb{N})}\right),\ \text{så } \sigma \text{ er bijektiv}.$$

Denne tilsyneladende fredelige ækvivalensrelation skal vise sig at føre til nogle overraskende resultater.

Generel lektorteori

Selv når vi restringerer vores undersøgelse til det videnskabelige personale på IMF, springer myriader af ækvivalenser i øjnene. Vi nævner i flæng:

$$\begin{align}
\text{Flemming Topsøe} &\sim \text{Menig poet-smølf} \tag{1}\\
\text{Gunnar Forst} &\sim \text{Ung, tror fans} \tag{2}\\
\text{Christian Berg} &\sim \text{Hent ribs, cigar} \tag{3}\\
&\sim \text{Grib is-te-ranch[1]} \nonumber\\
\text{Kjeld Bagger Laursen} &\sim \text{Guld-egenskab: Er jarl} \tag{4}\\
&\sim \text{Brugsklar jadeengel [2]} \nonumber\\
&\sim \text{Sej ulk, algebradreng.} \nonumber
\end{align}$$

Følgende lemma vil afsløre en sandhed om Niels Grønbæks undervisning. Bemærk den indirekte bevisteknik, hvori vi benytter os af først en mere madvareorienteret beskrivelse af Niels Grønbæk, derefter en overvejende matematisk og til sidst undervisningsmæssig.

Lemma 1. *Niels Grønbæk ∼ Skøn belæring.*

Bevis:

$$
\begin{aligned}
\text{Niels Grønbæk} &\sim \text{Bønne, gær, slik}\\
&\sim \text{Løg nær biksen}\\
&\sim \text{Læs ingen brøk}^3\\
&\sim \text{Binær løgn, ske!}^4\\
&\sim \text{Løbsk geni nær}\\
&\sim \text{Skøn belæring.}
\end{aligned}
$$

□

Matematiske anvendelser

Besidder ens mødrene ophav ingen matematiske færdigheder, samtidig med at hun nærer et brændende ønske om at vide mere om vektorrumsbaser af ortogonale enhedsvektorer kan man jo blot henvise til

Sætning 2. *(Annagramteoriens fundamentalsætning)*

Gram-Schmidt orthonormalisering ∼ "Grim retro-masochist-handling, mor".

Ellers fortæl om

$$
\begin{aligned}
\text{Cantors mængde} &\sim \text{Arg dæmons cent}\\
&\sim \text{Score tang-mænd}\\
&\sim \texttt{Rand-gæsten.com}\\
&\sim \text{"Dang, censor, mæt".}
\end{aligned}
$$

Sidstnævnte sætning kan man jo evt. også fremsige, hvis man i frokostpausen mellem eksaminationerne vitterlig ikke kan spise mere.

[1]Såfremt man lige har en sådan læskedriks-gård ved hånden
[2]Instant engel: Unwrap og du kan bruge ham sporenstregs
[3]matematisk opfordring 1
[4]matematisk opfordring 2

Traditionel mobning af et par faggrupper

Hvad skal man med en ækvivalensrelation, der ikke kan bruges til at mobbe dataloger med?

Med afsæt i sværhedsgraden af kurserne 1E og 1F (se afsnittet om det naturvidenskabelige fakultets ækvivalensklasse) på datalogis bacheloruddannelse indses nu, at

$$\text{Datalogistudierne} \sim \text{graduation ildeset},$$

hvormed vi også er klar til at etablere følgende ækvivalens (kendt som DIKU-egenskaben):

Sætning 3. *(DIKU-egenskaben)*
DIKU's øverste maskinstuer $\sim$ *Skuer nørdemassivitet, suk.*

Bevis: Ses let ved inspektion.

□

Nu vi er ved mobningen af faggrupper $\neq$ matematik, kan vi også indføje et mindre anvendeligt resultat (Damskur-formodningen), der først blev bevist i nyere tid og udtaler sig om karakteren af jurister:

$$\text{Dem der ikke hopper, de er jurister} \sim \text{Duksede terpere, empiriker-hjord}.$$

- og empirikere, dem kan vi jo ikke lide.

Anvendelser

Også arkitektonisk/æstetisk byder emnet på spændende resultater, og enkle udregninger vil give, at

$$\text{Naturvidenskabeligt Fakultet} \sim \text{Senil tun-arkitekt .. Gab, fladt vue!}$$

Er man endvidere ikke så begejstret for miljøet, strukturen og så videre kan man jo evt. benytte korollaret

$$\text{Naturvidenskabeligt Fakultet} \sim \text{Feudalt, uvenskabeligt TNT-Irak}.$$

Da vi nu alligevel er ved at bevæge os ind på det politiske, kan vi ligeså godt først som sidst løfte sløret for Helge Sander-ækvivalensen

$$\text{Universitetsreformen} \sim \text{Motiv er SU-interferens}.$$

Vi har vel alle lyst til afmægtigt at at anråbe statsministeren. Her er et godt grundlag for et sådant udråb.

$$\text{Anders Fogh Rasmussen} \sim \text{“Grusomheds-fan! Nar!” Ses!}$$

Noter og bemærkninger

Denne “artikel” er begået af Mrs. Dat-kranium ~ Smart druk-mani ~ Indsmurt karma ~ Martin Damskur og Darwin: stenet hash-imam ~ Mathias Winther Madsen.
Desuden medvirkede Savannen, hin enkle ~ Anne Vinkel Hansen og “Aha! min hinke-IBM er en anatomi!” ~ Mia Kit Arboe Heimann Heimann. Vi håber, at vi har fået slåt fast, at sagaen er vor jammer ~ “Mer nervegas, major M. !” ~ James’ gran-overarme ~ Anagrammer er sjove.
De medskyldige siger tak til Rasmus Lerchedal Petersen ~ Laps arresterede lunch-hems og Mathilde Louise Schousboe ~ Ubeslutsomhed hos CIA-olie, fordi vi måtte lave permutationer af jeres navne.

En politisk leder

Tilsyneladende dovne studerende, som er skyld i, at de ikke selv bliver værdifulde samfundsborgere i passende expressfart. Et udsagn taget fra debatten om hvad universitetet bør levere til samfundet. Som en del af universitetet er vort kære institut en del af debatten, selvom den generelt er fraværende på stedet.

Da en uoverskuelig opsummering af en ikkeeksisterende debat ikke rigtig tjener noget formål vil vi tillade os at konkludere ganske unuanceret hvad debatten har medført af ændringer for de studerende på matematikuddannelserne.

Opmærksomheden omkring dovne studerende har betydet at det er blevet obligatorisk at være aktiv i løbet af semestret, og det lyder jo godt, men den har også betydet at den studerende i løbet af semestret springer fra den ene obligatoriske opgave til den næste uden tid til reflektion over dybderne i det matematiske hav.

Der er noget galt, når det eneste svar et studie har på dovne studerende er indførelsen af obligatorisk arbejde. Selve ordet obligatorisk opgave siger det hele; det er ikke lækkert.

De obligatoriske forløb vi er ude efter er ikke de meningsfyldte projekter på Statistik eller gennemtænkte projekter, her kunne man nævne 3MH, hvor projektet overtager forelæsningernes plads i 3 uger. Det er heller ikke projekter, der har til formål at forbedre læring af stoffet, som det der kører på 2AN. Det er heller ikke opgaver på 1. semester, hvor der kan være meget andet, som skal på plads end faglig fordybelse.

MEN, vi har noget mod opgaver HVIS ENESTE FUNKTION er at være obligatorisk, her kunne man nævne 2AL, 3RE, 3GT eller tidligere tiders 2AN. Det er tåbeligt. I det absurde, kunne hvert eneste 2 pkt. kursus få lyst til at man skulle lave obligatoriske opgaver, fordi man lige netop helst skal bruge sin tid på det kursus. Hvornår skulle de studerende få tid til at lære noget, får man lyst til at spørge?

Man får ved nærmere eftertanke også lyst til at spørge, hvorfor diagnosen hver eneste gang de studerende ikke lever op til den forventede arbejdsindsats bliver dårlig arbejdsmoral. Man skulle måske overveje om det kunne hænge sammen med umotiverende øvelser eller at tekniske forelæsninger er en uinspirerende form for undervisning.

Vi mener at de studerende bør tages mere med på råd. At de har en officiel plads i studienævnet hjælper ingen ting, så længe undervisere får lov til at ændre undervisningen uden om studienævnet. Vel kan det være en klods om benet på forelæsere, som ønsker at være progressive at der sidder en flok reaktionære studerende, der ønsker velgennemtænkte forbedringer af studiet frem for at blive gjort til forsøgspersoner, der muligvis er heldige at deltage i et vellykket eksperiment.

Det er nu med den nye studiestruktur, at der er mulighed for at finde på andre svar end obligatoriske opgaver, når det drejer sig om tilsyneladende dovne studerende. Lad os håbe der bliver afsat tid til at finde dem.

FAMØS dec. 2002.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-,
Økonomi- og Statistikstuderende ved
Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove
Mathias Winther Madsen
Sara Esther Arklint
Stefan Lindhard Mabit
Simon Eiriksson
Steffen Juul Christensen
Tarje Bargheer

Tegner:
Martin Damhus aka Damskur
(tegneserie)
Mathias W. Madsen (forside)

Deadline for næste nummer:
Fredag den 21. februar 2002

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk
Oplag: 600 stk.
ISSN 1395-2145

Kalenderen

- Tirsdag d. 10. december fylder Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) fra Potsdam 198 determinerede år.
- Fredag d. 13. december fylder Søren Eilers(1967? -?) fra E-bygningen vores Fredag med et saligt foredrag om substitutionssystemer.
- Lørdag d. 21 december er der et kæmpe brag af en julefrokost for alle matematikere på Cafeen?.
- Søndag d. 22. december fortsætter festen hos Ludwig Hölder (1859 - 1937), fra Stuttgart, der fylder et ulige antal år: 143.
- Tirdag d. 24. december er det juleaften. Juhuu - Lad eksamensræset begynde!
- Onsdag d. 1. januar kommer efterfølgeren til dette år farende.
- Tirsdag d. 14. januar fylder unge Alfred Tarski (1902 - 1983) fra Warzawa 101 år, hvilket overhovedet ikke er paradoksalt.
- Torsdag d. 23. januar fylder David Hilbert (1862-1943) fra Kaliningrad 141 rummelige år.
- Lørdag d. 25. januar holder Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) fra Turin på Sardinien optimale 267 års-, og Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921) fra Hermsdorf (Polen) 160 års fødselsdag. - Det bliver en vild dag i matematikerhimlen!
- Søndag d. 9. februar fylder Lippót Féjer (1880 - 1959) fra Pécs (i Ungarn) 123 kernesunde år.
- Onsdag d. 12. februar bliver Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) fra Düren ligeledes 198 kernesunde somre lang.
- Fredag d. 21. februar er der deadline for indlæg til næste nummer FAMØS.
- Mandag d. 24. februar fylder vor allesammens Felix Bernstein (1878 - 1956) fra Halle fortjente 125 år. Og lige omkring denne store begivenhed cirkulerer endnu et nummer af FAMØS omkring i vandrehallen.

Har du et arrangement som du gerne vil have med i FAMØS' kalender, så send en mail til`famos@math.ku.dk` og kom med en beskrivelse, samt dato (mellem Marts og Maj), så presser vi det ind i FAMØS stramme tidsplan.