

FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

17. årgang, nr. 3 og 4, maj 2004



Leonhard Euler (1707-1783). Matematikkens mest produktive mand; flere hylder på biblioteket er dedikeret til hans samlede værker der er produceret i en lind strøm igennem hele hans levealder. Selv på sine gamle dage hvor Euler var helt blind, lod han sine børn tage diktat af hans matematiske udregninger og ideer. Hvad Euler har på hovedet her, aner vi ikke.

Indhold

Velkommen	3
– Undskyld vi har været lidt sløve.	
Mig & Menneskeheden	4
– Tegnet og fortalt af Karl Marx	
Næste semesters kurser	6
– Kom og hør om hvilke kurser der er næste semester	
Opgaver	7
– Opgaver og løsninger	
Side 9-sætningen	9
– Zeckendorfrepræsentation	
Artikelserie: Hvad forsker jeg i?	11
– Jesper Lützen fortæller om geometrisering i matematikhistorien	
Matematik handler ikke om tal!	17
En ny studiestruktur	19
– En introduktion til den ny studiestruktur	

Velkommen

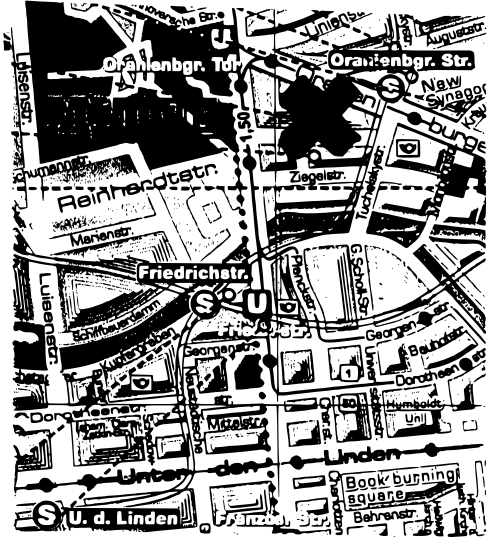
Tarje Bargheer

Ja så kom FAMØS endelig ud. - Vi har tilsyneladende på redaktionen forsøgt at anvende en ny anarkistisk arbejdsform der hedder "lav noget på FAMØS når det lige passer ind". Arbejdsformen har vist sig at være mindre effektiv med det resultat at der i dette semester kun udkommer denne udgave af FAMØS - Men den udkommer trods alt!

At der er folk der læser FAMØS, kan mærkes på at folk svarer på de indlæg der er i FAMØS, således er det herligt at også denne gang er der et indlæg, der kan betragtes som et svar på en tidligere artikel (dog skrevet af en tidligere redaktør). Det må i meget gerne blive ved med folk!

Tilbage står blot at ønske jer alle en glædelig sommer, og en smertefri overgang til en ny og spændende studiestruktur (læs mere inde i bladet!).

MIG & MENNESKEHEDEN



Tegnet og forfattet af Karl Marx

DA JEG TIDLIGERE I
ÅR VAR I BERLIN,
BOEDE JEG PÅ ET NY-
BYGET OG MENNESKE-
TOMT HOSTEL AF STÅL
OG BETON.

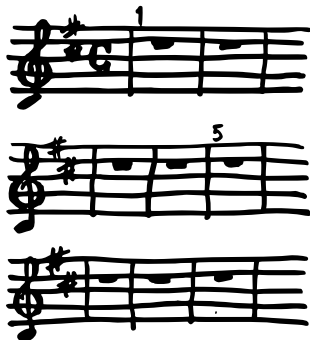


DEN FREMMEDE STORBY
OG DE TOMME KORRI-
DORER VAKTE EN SÆR
FØLELSE I MIG.

DA JEG CHECKEDE UD,
SKREV JEG FØLGENDE
BESKED I GÆSTEBOGEN:



"LAGDE DU MÆRKE TIL, HVORDAN TROMPETEN
IKKE GAV NOGEN LYD, DA JEG BLÆSTE I DEN?"



Næste semesters kurser

Tarje Bargheer

Et år endnu vedbliver semesterstrukturen (nogenlunde) for kurser over 1.år.

For kurserne på 3.års-niveau og højere, vil der blive afholdt informationsarrangement d. 17 maj kl. 14. Arrangementet vil foregå i vandrehallen, og underviserne på kurserne i næste semester vil stå parat til at lokke netop dig til at følge hans eller hendes kursus.

Dette arrangement sker i forlængelse af et informationsmøde, hvor områdeleder for matematik, Jesper Lützen holder et informationsmøde om hvad nuværende bachelor-studerende skal stille op når den ny studiestruktur bliver indført.

Der kommer opslag op om begge arrangementer.

Kursusudbuddet man kan komme og høre om ser således ud (dog med det forbehold at SIS på tidspunktet dette er skrevet ikke er udkommet):

- Matematik 3GT ved Jesper Michael Møller
- Matematik 3AL ved Christian U. Jensen
- Matematik 3RE ved Hans Plesner Jakobsen
- Matematik 3NA ved Jens Hugger
- Matematik 4GE ved Ryzsard Nest
- Matematik 4AN ved Henrik Schlichtkrull
- Matematik 4HA ved Hans-Bjørn Foxby
- Algebraens Historie 1750-1870 ved Jesper Lützen
- Introduktion til kryptografi ved Jørn Børling Olsson
- Klassisk algebra ved Jørn Børling Olsson
- Udvalgte emner i analyse ved Christian Heintz (Post-doc hos Jan Philip Solovej)
- Informationsteori ved Flemming Topsøe
- Algebraisk logik ved Mai Gehrke (gæsteprofessor repræsenteret på mødet ved Flemming Topsøe)
- Kombinatorik med frembringende funktioner ved Gunnar Forst
- Conveksitet ved Peter Harremöes
- K-teori for C^* -algebraer ved Niels Jakob Laustsen

Videre information om dette arrangement kan findes på www.math.ku.dk/nyekurser

Opgaver

Ulrik Torben Buchholtz

Vi fik desværre ingen løsninger til sidste nummers opgaver, selvom vi udlovede en præmie. Er det fordi opgaverne var for svære, nemme, kedelige, eller er der bare ingen, der læser FAMØS?

Vi prøver igen, og udlover altså en præmie til den bedste løsning af dette nummers opgave. Denne følger efter kortfattede besvarelser af de gamle.

En lappeløsning

Denne opgave er fra Arthur Engels *Problem Solving Strategies*, kapitel 5, opgave 43. I FAMØS blev den formuleret således:

Et stofstykke med areal 1 har fået påsyet 5 lapper, hver med areal større end eller lig $1/2$. Vis, at der findes to lapper med fælles areal større end eller lig $1/5$. Præcisér om nødvendigt opgaven.

Opgaven kan løses ved brug af princippet om inklusion og eksklusion (PIE). Nummerér lapperne $1, \dots, 5$. Lad $A(i_1, \dots, i_n)$ betegne det fælles areal af lapperne $i_1, \dots, i_n$. Indfør størrelserne

$$\begin{aligned} S_1 &= A(1) + A(2) + \dots + A(5) && \binom{5}{1} \text{ led,} \\ S_2 &= A(1, 2) + A(1, 3) + \dots + A(4, 5) && \binom{5}{2} \text{ led,} \\ S_3 &= A(1, 2, 3) + A(1, 2, 4) + \dots + A(3, 4, 5) && \binom{5}{3} \text{ led,} \\ S_4 &= A(1, 2, 3, 4) + A(1, 2, 3, 5) + \dots + A(2, 3, 4, 5) && \binom{5}{4} \text{ led,} \\ S_5 &= A(1, 2, 3, 4, 5) && \binom{5}{5} \text{ led.} \end{aligned}$$

PIE giver så, at det samlede areal dækket af lapper er lig $S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5$. Dette er altså højst 1, så

$$1 \geq S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5. \quad (*)$$

Bruger vi PIE på arealet overlappet af lapperne $2, \dots, 5$ med lap nummer 1 fås

$$\begin{aligned} A(1) &\geq A(1, 2) + A(1, 3) + \dots + A(1, 5) && \binom{4}{1} \text{ led} \\ &\quad - A(1, 2, 3) - A(1, 2, 4) - \dots - A(1, 4, 5) && \binom{4}{2} \text{ led} \\ &\quad + A(1, 2, 3, 4) + A(1, 2, 3, 5) + \dots + A(1, 3, 4, 5) && \binom{4}{3} \text{ led} \\ &\quad - A(1, 2, 3, 4, 5). && \binom{4}{4} \text{ led} \end{aligned}$$

Tager vi summen af denne og de tilsvarende uligheder for de andre lapper fås

$$S_1 \geq 2S_2 - 3S_3 + 4S_4 - 5S_5 \quad (**)$$

Tager vi nu 3 gange (*) og lægger (**) til fås

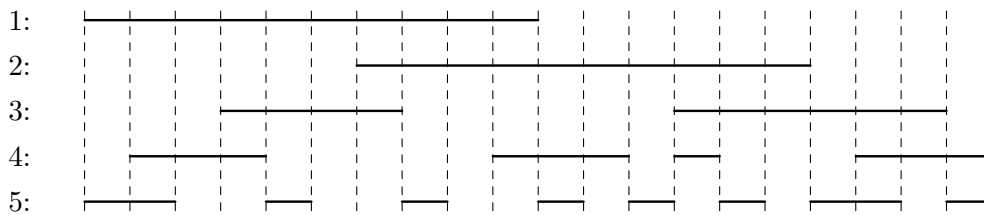
$$3 + S_1 \geq 3S_1 - S_2 + S_4 - 2S_5.$$

De enkelte lapper har areal mindst $\frac{1}{2}$, hvoraf $S_1 \geq \frac{5}{2}$. Ialt får vi uligheden

$$S_2 \geq 2 + S_4 - 2S_5.$$

Af definitionen på S_4 , ses at $S_4 \geq 5S_5$, specielt får vi $S_4 \geq 2S_5$, så $S_2 \geq 2$. Denne ulighed udtrykker netop det ønskede, da S_2 er summen af de 10 fælles overlap af 2 lapper. Når $S_2 \geq 2$, må mindst et af overlappene være større end $\frac{1}{5}$.

Nedenstående figur viser, at uligheden er bedst mulig. Den skal forestille lapperne løftet fra hinanden, set fra siden. Kan man finde en mere symmetrisk eller på anden måde pænere repræsentation af et sådant eksempel?



En følge, tak!

Denne opgave er fra den Russiske Olympiade 1995. Vi skrev:

Vis, at der for ethvert positivt heltal $a_1 > 1$ findes en voksende følge af positive heltal $a_1, a_2, a_3, \dots$, således at $a_1^2 + \dots + a_k^2$ er deleligt med $a_1 + \dots + a_k$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Bemærk, at vi kan starte, da $a_1 \mid a_1^2$. Antag, vi har fundet $a_1, \dots, a_n$, som opfylder betingelsen. Vi skal finde a_{n+1} , så $A_{n+1} = a_1 + \dots + a_{n+1}$ går op i $B_{n+1} = a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2$. Vi kan skrive $B_{n+1} = B_n + (a_{n+1} - A_n)(a_{n+1} + A_n) + A_n^2$. Sæt $a_{n+1} = B_n + A_n^2 - A_n$. Heraf fås $A_{n+1} = B_n + A_n^2$, hvoraf $B_{n+1} = (a_{n+1} - A_n + 1)A_{n+1}$. Da $A_n^2 > A_n$, får vi $a_{n+1} > B_n \geq a_n^2 > a_n$.

Den nye opgave

Lad $s_n = 2 + 3 + \dots + p_n$ være det n 'te afsnit i primtalsrækken. Vis, at der mellem s_n og s_{n+1} altid findes et kvadrattal.

Side 9-sætningen

Ulrik Torben Buchholtz

De fleste her på stedet er nok bekendt med de sædvanlige positionstalsystemer, i særdeleshed det binære, det decimale og det hexadecimale. (Sidstnævnte burde vel retteligt hedde det sexadecimale, men det er en anden sag.)

Nogle har måske hørt om andre talsystemer, fx det romerske (hvor 42 skrives XLII) og det faktorielle (her er et ettal efterfulgt af n nuller lig $(n+1)!$). Dette nummers Side 9-sætning er dedikeret til amatørmatematikeren Zeckendorf, Zeckendorfs sætning og fibonaccitalsystemet.

Fibonaccitallene

Vi erindrer om, at fibonaccitallene $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defineres rekursivt ved $F_1 = F_2 = 1$ og $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ for $n \geq 3$. Vi har altså:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Vi skal her benytte os af følgende banalitet:

Lemma 1. *For $k \geq 4$ gælder $F_{k-2} + F_{k-4} + \dots = F_{k-1} - 1$, hvor det sidste led i summen på venstresiden er F_2 eller F_3 , eftersom k er lige eller ulige.*

Bevis. Beviset går ved induktion efter k , idet basistilfældene $k = 4$ og $k = 5$ let efterses.

Antages formelen for et fast k fås

$$F_k + F_{k-2} + F_{k-4} + \dots = F_k + F_{k-1} - 1 = F_{k+1} - 1,$$

hvoraf det ses, at formelen stemmer for $k+2$. □

Zeckendorfs sætning

Zeckendorfs sætning blev offentliggjort i 1939. Følgende baserer sig på s. 295–296 i *Concrete Mathematics* af Graham, Knuth og Patashnik.

En zeckendorfrepræsentation af et naturligt tal n er en fremstilling på formen $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_r}$, hvor $k_1 \gg k_2 \gg \dots k_r \gg 0$. Her bruges notationen $a \gg b$ for $a \geq b + 2$. Fremstillingen skal altså bestå af fibonaccital, hvor der ikke

forekommer to på hinanden følgende. Vi ser, at vi har fremstillingen $42 = F_9 + F_6$. Kigger man efter, ses at der faktisk kun er denne ene zeckendorfrepræsentation af 42. Dette er ingen tilfældighed, idet vi præsenterer:

Side 9-sætningen. *Hvert $n \in \mathbb{N}$ har en entydig zeckendorfrepræsentation.*

Bevis. Eksistensen vises ved fuldstændig induktion efter n . For fibonaccitallene selv (herunder 1) er der naturligvis ingen problemer. Antag $F_k < n < F_{k+1}$ (fibonaccitallene er jo ubegrænsede). Da har vi $0 < n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$. Pr. induktionsantagelse har $n - F_k$ en zeckendorfrepræsentation, og i denne kan det største indgående fibonaccital højst være F_{k-2} . Altså fås en lovlig repræsentation af n ved at lægge F_k til denne.

Entydigheden vises også ved induktion, idet sagen er klar for $n = 1, 2$. Antag, at $n > 2$ har en zeckendorfrepræsentation med betegnelserne fra forrige side. Vi må have $k_1 \geq 4$, og vi vil vise, at F_{k_1} er det største fibonaccital højst lig n , idet det ønskede følger heraf ved induktion.

Da fibonaccifølgen er voksende, fås ved anvendelse af lemmaet, at

$$F_{k_2} + \cdots + F_{k_r} \leq F_{k_1-2} + F_{k_1-4} + \cdots = F_{k_1-1} - 1,$$

hvor summen forstås som i lemmaet. Dvs. vi har

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r} \leq F_{k_1} + F_{k_1-1} - 1 = F_{k_1+1} - 1.$$

Altså får vi $F_{k_1} \leq n < F_{k_1+1}$, som ønsket. $\square$

Vi ser af beviset, at vi kan finde repræsentationen *grådigt* ved succesivt at fratrække det størst mulige fibonaccital.

Vi kan nu indføre fibonaccitalsystemet ved med et ettaller og nuller at angive, om et givent fibonaccital er med i zeckendorfrepræsentationen eller ej. Således er $F_n = (10 \cdots 0)_F$ ($n - 2$ nuller) og $42 = (10010000)_F$. Dette talsystem minder om binært, men det er altså ikke tilladt at have to ettaller ved siden af hinanden.

Eduoard Zeckendorf

Eduoard Zeckendorf blev født i Liège i 1901. Han læste medicin på universitetet og blev officer i den belgiske hær i 1925. Siden blev han også tandlæge. I 1940 blev han taget krigsfange af tyskerne, og han gav lægehjælp til andre allierede krigsfanger indtil 1945. Efter krigen tjente han i Indien, og han udgav flere artikler om talteori i løbet af sit liv.¹

¹Se <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Zeckendorf.html> og <http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/zecken.html>.

Artikelserie: Hvad forsker jeg i?

Jesper Lützen

Det 19. århundredes Geometriske Billeder af Mekanikken.

Geometri har gennem tiden spillet forskellige roller i formuleringen af mekanikken. I Principia (1687) beskrev Newton sine nye ideer i et klassisk geometrisk sprog, medens Lagrange ca. hundrede år senere var stolt over at kunne formulere mekanikken i et rent analytisk sprog uden mindste brug af geometri. Endnu godt hundrede år senere fandt Einstein og Minkowski det bekvemt at beskrive den specielle relativitetsgeometri ved hjælp af en særegen geometrisk formalisme, som blev yderligere udbygget i den almene relativitetsteori. Ja selv klassisk mekanik blev i løbet af det 20. århundrede formuleret som en slags geometri, såkaldt symplektisk geometri. Den geometri, som blev benyttet i det 20. århundrede, var ikke syntetisk Euklidisk geometri, men differentialgeometri.

Einsteins anvendelse af tensorregning og differentialgeometri i forbindelse med den almene relativitetsteori fremhæves ofte som et eksempel på, hvordan et stykke ren matematik på mirakuløs vis fandt anvendelse i naturbeskrivelsen: the unreasonable effectiveness of mathematics, som Wigner så fyndigt formulerede det. Miraklet bliver dog mindre slående, når man bemærker, at differentialgeometrien blev udviklet i 1800-tallet med henblik på anvendelser; ja faktisk brugte allerede 1800-tallets matematikere og fysikere den til en geometrisk omformulering af mekanikken. Det er disse ideer, som denne artikel omhandler.

Matematikernes geometrisering

Betragt et konservativt mekanisk system bestående af n punktmasser, som påvirker hinanden med kræfter. Systemets beliggenhed (konfiguration) er da fuldstændigt bestemt ved angivelse af systemets $3n$ rektangulære koordinater $x_1, x_2, \dots, x_{3n}$ eller ved angivelse af andre reelle parametre (generaliserede koordinater). Hvis systemet er underlagt bindinger mellem punktmasserne kan systemet beskrives ved færre end $3n$ generaliserede koordinater $q_1, \dots, q_r$, hvor $r < 3n$. Systemets $3n$ eller r koordinater kan vi så vælge at opfatte som koordinater for et punkt i et $3n$ (eller r)-dimensionalt vektorrum, det såkaldte konfigurationsrum. På den måde kan systemets bevægelse beskrives som bevægelsen af *et* punkt i et høj-dimensionalt rum.

En sådan beskrivelse kan synes helt selvfølgelig for en moderne matematiker; men i 1800-tallet var den på ingen måde oplagt. Faktisk var der kun få enkeltstående og begrænsede tilløb til at betragte rum af dimension højere end 3, før Riemann i sit doktorforedrag generaliserede Gauss' ideer om indre differentialgeometri for flader til såkaldte Riemannske mangfoldigheder af vilkårlig dimension. Det er med Riemanns ord rum, hvor afstanden ds mellem to punkter, hvis koordinater afviger med de uendeligt små størrelser $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, kan udtrykkes som en positiv kvadratisk form (det såkaldte linieelement)

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j ,$$

hvor g_{ij} er funktioner af koordinaterne. Men næppe var Riemanns ideer blevet kendt før matematikeren Lipschitz i 1872 foreslog at bruge den inden for mekanikken.

Lipschitz tog udgangspunkt i mindstevirkningsprincippet, som i Jacobis formulering siger, at når et mekanisk system som det ovenfor beskrevne bevæger sig fra en konfiguration 0 til en anden 1 sker det langs den bane der minimerer aktionsintegralet:

$$A = \int_0^1 \sqrt{2(h - U) \sum_{\nu=1}^{3n} m_{\nu} (dx_{\nu})^2}.$$

Her er $m_{3k+1} = m_{3k+2} = m_3$ massen af den k 'te punktmasse, hvis koordinater er $(x_{3k+1}, x_{3k+2}, x_{3k+3})$, U er systemets potentielle energi, og h er den totale energi, som er bevaret. Hvis systemet karakteriseres ved andre generaliserede koordinater og den kinetiske energi kan udtrykkes som

$$T = \sum_{i,j=1}^r a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

så får aktionsintegralet følgende form:

$$A = \int_0^1 \sqrt{2m(h - U) \sum_{i,j=1}^r a_{ij} dq_i dq_j}.$$

Hvis vi nu indfører en Riemannsk metrik (et linieelement) i konfigurationsrummet defineret ved

$$ds_L^2 = 2m(h - U) \sum_{i,j=1}^r a_{ij} dq_i dq_j,$$

så siger mindstevirkningsprincippet, at punktet i konfigurationsrummet bevæger sig langs korteste veje (geodæter) i den Riemannske mangfoldighed. Derved bevæger punktet sig som om det var et frit punkt. der ikke er påvirket af kræfter.

Man kan sige at denne geometrisering af det mekaniske systems opførsel er opnået ved at inkorporere systemets kræfter, eller hvad der kommer ud på det samme dets potentielle energi, i geometrien. I den forstand foregriber ideerne Einsteins almene relativitetsteori, hvor gravitation netop integreres i rumtidens geometri. Der er dog intet der tyder på at Einstein skulle have kendt Lipschitz' ideer.

Den ovennævnte reduktion af bevægelsesproblemet for et system til det geometriske problem om bestemmelse af en geodæt er naturligvis intuitivt ganske apellerende. Den findes dog kun udtrykt indirekte hos Lipschitz og lidt mere direkte hos Darboux, i hans bog fra 1888 om fladeteori. Hvad de to matematikere derimod eksplicit understregede var, at Hamilton-Jacobi-formalismen fremtræder klarere, når den ses i dette geometriske lys.

I fortsættelse af sit arbejde om geometrisk optik havde Hamilton vist, at bevægelsen af et mekanisk system kan bestemmes ud fra en reel funktion af koordinaterne, den såkaldte principale funktion, som kan findes som løsning til to partielle differentialligninger. Jacobi viste at den fuldstændige løsning til *en* af disse ligninger, den såkaldte Hamilton-Jacobi ligning, kunne bruges på lignende måde til at bestemme bevægelsen. Den fysiske mening med denne rent analytiske formalisme var dog ret uigennemskuelig. Specielt fik den principale funktion, eller mere generelt den generelle løsning til Hamilton-Jacobiligningen ikke tillagt nogen fysisk betydning. Men i Lipschitz' og Darboux' geometriske formulering får den en intuitiv mening og dens relation til banerne for det mekaniske system bliver let at anskue. Det forholder sig nemlig således, at en bane for systemet er vinkelret på niveaufladerne for en løsning til Hamilton-Jacobiligningen. Ortogonalitet er her et begreb som Lipschitz eksplicit indførte i konfigurationsrummet.

Denne geometriske betydning af løsningerne til Hamilton-Jacobiligningen eller deres niveauflader havde faktisk været foregrebet af Liouville (1856) og Minding (1864).

Hertz' Mekaniske Principper

Også en fysiker, Heinrich Hertz, fandt på at fremstille mekanikken på geometrisk form. Hans bog om mekanik udkom i 1894, altså adskillige år efter at Lipschitz og Darboux havde publiceret deres arbejder; men han hævdede selv at han havde fået ideen uafhængigt af sine forgængere, og meget tyder på at han talte sandt. Hertz' geometrisering af mekanikken var både mere og mindre vidtgående end de tidligere matematikeres: Mere, fordi den var mere grundlæggende, og mindre, fordi den ikke indkluderede kræfterne (eller den potentielle energi) i geometrien. Lipschitz og Darboux var gået ud fra den sædvanlige fremstilling af mekanikken og havde så omformet den geometrisk. Hertz, derimod, ønskede at bygge mekanikken op helt fra bunden i en geometrisk form. Ja hans mål var endnu mere ambitiøst: Han ville give mekanikken et solidt konsistent fundament. Han mente nemlig at have observeret, at alle eksisterende fremstillinger af mekanikken var logisk set utilfredsstillende. Især mente han at kraftbegrebet førte til inkonsistenser. Andre matematikere og fysikere, som havde observeret dette,

havde ifølge Hertz prøvet at afhjælpe det ved at indføre ekstra forklaringer; men som Hertz klart påpegede: man kan ikke komme af med inkonsistenser i et system ved at tilføje noget til systemet. Man må derimod fjerne noget fra systemet. Hertz tog konsekvensen og fjernede kraftbegrebet (og dermed begrebet potentiel energi) fra mekanikkens grundlag.

Han havde særlige grunde til at mene at kraftbegrebet kunne undgås. Han var nemlig lige blevet verdensberømt ved eksperimentelt at frembringe elektromagnetiske bølger (radiobølger) og eksperimentelt vise at de opfører sig som lys. Dermed mente han at have bekræftet Maxwells feltteori og afvist Webers fjernvirkningsteori. Webers teori byggede på en antagelse om, at elektriske ladninger påvirker hinanden over lange afstande med en kraft som afhænger af afstanden og hastigheden af ladningerne. Maxwell, derimod, mente at virkningen udbredte sig gennem det elektromagnetiske felt, som han antog var en mekanisk tilstand i en overalt eksisterende æter. Hertz konkluderede derfor fra sine eksperimenter, at elektromagnetisme ikke skyldtes fjernvirkningskræfter, og han nærede et håb om at også gravitation ville kunne forklares felteoretisk.

I sin bog om mekanik undsagde Hertz ikke bare fjernvirkninger, men kræfter generelt som et basalt (altså ikke afledt) begreb. Han postulerede, at det vi normalt kalder kræfter i virkeligheden skyldes, at der findes skjulte masser (æteren), som påvirker de almindeligt synlige masser. Vekselvirkninger mellem masser, både almindelige og skjulte, sker ifølge Hertz ikke ved kræfter, men gennem stive forbindelser. Man kan tænke på to punkter som er forbundet med en vægtløs stang, eller to kugler som ruller på hinanden. Disse forbindelser kan beskrives ved homogene lineære førsteordens differentialligninger i koordinaterne (men ikke i tiden). Et mekanisk system består altså ifølge Hertz af nogle almindelige masser og nogle skjulte masser, som er forbundet indbyrdes ved stive forbindelser. Til at beskrive sådan et system indførte Hertz en Riemannsk metrik ds defineret ved

$$m ds^2 = \sum_{\mu=1}^{3n} m_{\mu} dx_{\mu}^2.$$

i rummet af konfigurationer. Her er m systemets totale masse. Udtrykt i generaliserede koordinater linieelementet udtrykkes ved en generel positiv differentialform

$$ds^2 = \sum_{\rho=1}^r \sum_{\sigma=1}^r a_{\rho\sigma} dq_{\rho} dq_{\sigma}.$$

I dette rum indførte Hertz så et vinkelbegreb og herudfra et krumningsbegreb for baner (kurver). Dette tillod ham at formulere sin eneste bevægelseslov, der lyder: Et isoleret mekanisk system bevæger sig med konstant fart langs en retteste bane, d.v.s en bane som har mindre krumning end andre baner der ikke bryder systemets stive forbindelser. I tilfælde af at de stive forbindelser kan skrives på integreret form $F_j(x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$ (Hertz taler så om et

holonomt system) betyder det, at systemet bevæger sig langs en geodæt på den delmangfoldighed som defineres af disse ligninger.

På denne måde opnåede Hertz at geometrisere mekanikkens fundament. Hans meget omhyggelige behandling var en inspirationskilde for Hilbert da han få år senere gav sig i kast med at aksiomatisere geometrien.

Men hvordan stemmer Hertz's mekanik så overens med den sædvanlige mekanik. Jo, han kunne vise, at hvis bindingerne mellem de almindelige masser og de skjulte masser var af en særlig simpel slags, hvis det skjulte system udførte såkaldt cykliske bevægelser og hvis de skjulte masser bevæger sig meget hurtigt men er meget små, så vil det almindelige system bevæge sig i overensstemmelse med de sædvanlige mekaniske principper, i hvert fald tilnærmelsesvist. Han kunne nemlig *definere* et kraftbegreb ved at betragte de Lagrange-multiplikatorer, som bindingerne til det skjulte system gav anledning til, og han kunne *definere* den potentielle energi af det synlige system som værende den kinetiske energi af det skjulte system. Ud fra disse definitioner kunne han så udlede de sædvanlige principper og love så som Newtons love, mindstevirkningsprincippet o.s.v.

Billeder

Matematikerne, som i 1800-tallet geometriserede mekanikken, mente nok ikke at de havde ændret ved teoriens fysiske indhold. De havde blot udtrykt de analytiske love på en intuitivt mere apellerende geometrisk måde. Hertz, derimod, havde desuden ændret ved det fysiske indhold. I stedet for en verden af masser der påvirker hinanden med kræfter havde han skabt en verden af masser, skjulte masser og stive forbindelser. Mente Hertz så at den fysiske virkelighed var skruet sådan sammen? Nej, det mente han ikke man kunne sige noget om. Han var som Kant af den opfattelse, at vi principielt aldrig kan få indsigt i verdens virkelige natur. Det bedste vi kan gøre er ifølge Hertz at danne os "billeder" af verden. De svarer til det vi i dag kalder modeller. De skal ifølge Hertz opfylde tre krav: For det første skal de være logisk tilladelige (d.v.s konsistente). Det var netop dette krav, som Hertz mente, de sædvanlige billeder af mekanikken ikke opfyldte. Dernæst skal de være i overensstemmelse med naturen i den forstand, at de konsekvenser, vi kan drage ud fra billederne, er billeder af det vi kan erkende om naturen. Med andre ord, billederne skal kunne beskrive naturen korrekt. Vi kunne med et moderne matematisk udtryk sige, at der skal være en homomorfi mellem naturen og billedet. Hertz understreger, at vi ikke kan vide om der er nogen anden lighed mellem naturen og de billeder, vi laver af den. Han gør det også klart, at der kan være mange helt forskellige billeder af naturen, som alle opfylder de ovenstående to krav. For at vælge mellem dem opstiller han et tredje krav, nemlig at man bør vælge det mest hensigtsmæssige billede. Det betyder først og fremmest, at det valgte billede skal være så tydeligt som muligt, d.v.s skal afbilde så mange sammenhænge i naturen som muligt. For eksempel vil et billede der tillader alle fjernkræfter være mindre tydeligt end et, der kun tillader konservative kræfter. Hvis der er flere lige tydelige billeder af naturen, bør man vælge det simpleste, d.v.s det der indeholder det mindste antal overflødige elementer eller

sammenhænge. Når man for eksempel kan lave et billede som kun bruger tid, rum og masse som basale begreber (som Hertz' mekanik), så er den simplere end et billede, som derudover kræver kræfter (som den sædvanlige Newtonske mekanik).

Hertz indførte ikke kravet om simpelhed for at få billedet til at "ligne" naturen så meget som muligt. Mange fysikere og filosoffer før Hertz havde, ofte ud fra religiøse overvejelser, ment at kunne argumentere for, at naturen selv måtte være simpel. Men Hertz frigør sig helt fra sådanne teologiske overvejelser. Han mente nok at vi kan kræve simpelhed af billederne, men han mente ikke, at man kan kræve, at naturen er simpel.

Med sin billedteori lagde Hertz afstand mellem naturen og vore teorier (modeller, billeder) af den. Dette billedbegreb fik stor indflydelse på senere filosoffer, især Wittgenstein, fysikere og matematikere, især Hilbert.

Uddybende litteratur.

Denne yderst kortfattede fremstilling af mekanikkens geometrisering og Hertz' mekanik yder ikke emnet fuld retfærdighed. Læsere der ønsker at vide mere om emnet henvises til følgende arbejder:

Jesper Lützen: "Interactions between Mechanics and Differential Geometry in the 19th Century", *Archive for History of Exact Sciences* **49** (1995), 1-72.

Jesper Lützen: *Mechanistic Images in Geometric Form: Heinrich Hertz's Principles of Mechanics* (ca 390 sider). Vil udkomme på Oxford University Press forhåbentligt i år.

Matematik handler ikke om tal!

Henrik Christian Grove

I FAMØS fra oktober 2003 (17. årgang nr. 1) skriver Jes Hansen i artiklen „Store tal i matematikken“:

Selv om matematik er tallenes videnskab er det ikke særlig tit at man møder andet end “små” tal.

Dette er en kort illustration af rigtigheden af dette udsagn.

Jeg har lavet en optælling af hvilke tal der forekommer i mit speciale (som alt inkl. er på 90 sider) „Dobbelt- og multigammafunktioner“ (kompleks funktions-teori).

Optællingen er foretaget maskinelt (med Perl som det primære værktøj). Derfor er alt hvad der ligner tal medtaget. Dette inkluderer TeX-nikaliteter, layout-definitioner, kommentarer i TeX-filerne, labels (hvoraf nogle indeholder flere tal) og års- og sidetal fra litteraturlisten. Det betyder også at tællere og nævnere i brøker er talt som to forskellige tal.

Alt inklusive er der 92 „forskellige“ tal der tilsammen forekommer 7243 gange. „Forskellige“ fordi 1 og 1,0 er talt som to forskellige tal.

58 af de 92 tal er mindre end 100 og 34 er større end (eller lig) 100, men de 29 af disse er „fejl“.

De fem „store“¹ tal („fejl“ undtaget) er:

tal	forekommer som
24883200	Værdien af $G(8)$ som kun udregnes for at vise hvor hurtigt G vokser
34560	Værdien af $G(7)$ som kun udregnes for at vise hvor hurtigt G vokser
2003	Årstal fra forside og forord
288	Værdien af $G(6)$ som kun udregnes for at vise hvor hurtigt G vokser, og i et restled i Stirlings formel
100	i sætningen „... er omkring 100 år gamle...“

(G er en funktion jeg studerede i specialet).

Det eneste af disse der kan siges at have en egentlig betydning er de 288 i restleddet i Stirlings formel (og eftersom jeg aldrig anvender det restled, er det endda tvivlsomt).

¹Som slet ikke er store sammenlignet med de tal Jes skrev om.

De hyppigste tal er:

tal	antal forekomster	frekvens
1	2835	39,1%
2	2442	33,7%
0	857	11,8%
4	307	4,2%
3	258	3,6%
12	99	1,4%

alle andre tal forekommer højst 40 gange. Disse seks tal udgør 93,9% af alle tal i specialet.

Der er 37 tal der kun forekommer én gang og 17 der kun forekommer to gange. Det er i alt 54 tal (eller mere end halvdelen af alle tal i specialet) der højst forekommer 2 gange.

Når man ser bort fra „fejl“ er det største tal der forekommer mere end én gang 288 med netop to forekomster (der som nævnt begge er af tvivlsom relevans). Det næststørste tal med end én forekomst er 120 med netop fire (som alle er relateret til layout). Der er ingen tal over 24 med mere end 10 forekomster.

Kom så ikke og påstå at matematik handler om tal – og slet ikke store tal.

En ny studiestruktur

Tarje Bargheer

En ny studiestruktur

Som mange nok ved er der på hele det Naturvidenskabelige Fakultet ved at blive indført en studiereform. Det kan være svært at holde rede på, hvad denne studiereform helt præcist går ud på. Jeg vil i det følgende komme med et forsøg på at gøre det lidt mere klart hvad der kommer til at foregå, samt hvad konsekvenserne af dette bliver for de nuværende studerende. Jeg vil dog holde mig til matematik, som er det fag jeg repræsenterer i studienævnet for de matematiske fag, og derfor har bedst styr på af de fire fag.

Når der før i tiden er blevet lavet nye studieordninger, har det været sådan at man har kunnet blive ved med at blive på den studieordning man oprindeligt blev indskrevet på; denne praksis vil ikke være gældende for denne meget omfattende ændring af studieordningen. Et år efter indførslen, altså september 2005, bliver alle bachelor-studerende overført til den nye studiestruktur, hvorfor det er vigtigt for alle der ikke bliver bachelorer inden at sætte sig ind i den nye studiestruktur. Derudover vil det for mange være relevant at finde ud af hvad de nye kurser handler om, hvis man fx vil søge instruktører.

På <http://www.math.ku.dk/sn/Studiestruktur/studiestruktur.html> kan man se det arbejdsdokument der (højest sandsynligt i sin nuværende form) kommer til at være studieordningen. I dette dokument står alle bestemmelser om den nye studiestruktur. Dokumentet er dog en lovtekst og på omtrent 50 sider, og vil sikkert virke temmeligt uoverskueligt at læse. Det meste af dette er dog bilag med relativt detaljerede beskrivelser af kurser. Hvis man læser dokumentet, så er den bedste introduktion nok at læse selve studieordningen, imens man referer til Bilag 3.

Overvejelserne bag

Det Naturvidenskabelige Fakultet (organet der står for at administrere de overordnede linier omkring naturvidenskab) dekretede for et par år siden at alle naturvidenskabelige studier skal have en ny studiestruktur, der følger nogle overordnede regler. Et gæt på ideerne bag reformen kunne være at holde frafaldet nede ved at fastholde de studerende i deres studie, og gøre det mere overskueligt hvad der skal læres for den enkelte studerende.

Dekretet fra fakultet (som igen har fået dekreter fra folketinget og konsistorium) kan ridses op som følger:

- I stedet for at året bliver delt op i to semestre, skal året deles op i 4 blokke; og imellem hver blok skal der være en vejledningsuge, primært dedikeret til at de studerende kan få studierelaterede spørgsmål besvaret af en studievejleder.
- Hovedfaget, altså faget man optages på, skal udgøre to år af bachelorstudiet. Hvad det sidste år skal bruges på, er op til den enkelte studerende at afgøre.
- I stedet for det nuværende, temmeligt rodete system for tildeling af lokaler og tidspunkter for undervisning, er der blevet oprettet en opdeling af ugen i tre disjunkte skemagrupper, en A-, B- og C-gruppe. Således følger der med et givent kursus også en angivelse af om kurset nu ligger i skemagruppe A, B eller C. - Dermed skal man, når man vælger sig ind på kurser, blot sørge for at man ikke vælger to kurser der ligger i samme skemagruppe. Generelt skal en studerende der følger en normeret studieplan ikke følge mere end to kurser pr. blok, i modsætning til det nuværende hvor en studerende typisk følger fire kurser af gangen, hvorfor han blot skal tage timer i to af de tre grupper.
- Alle studier skal have et obligatorisk videnskabsteorikursus, der tilskynder til refleksion over studiet.
- Bachelorprojekter skal være på 15 ECTS-point.
- Med en bachelorgrad skal det være muligt at komme ind på to forskellige kandidatstudier, og generelt skal der være mere åbenhed for at folk med en bachelorgrad fra et studium kan komme ind på et andet relevant kandidatstudium.

Den typiske indvending mod disse ændringer er naturligvis hvorvidt det er muligt for de studerende at få en ordentlig forståelse af et kursus på kun et kvart år. Det typiske svar til dette er at man skal forstå 2 kurser på et kvart år, modsat som nu 4 kurser på et halvt år; altså man får mulighed for mere fokuseret studeren, når man ikke skal stresse rundt mellem mange forskellige studier. Alt i alt er der dog ikke meget at gøre for at få ændret på reformen nu. - Tiden må vise om vi bliver stillet over for større problemer end vi får løst.

Fakultetets dekreter fordrer naturligvis en hel del ændringer for de kurser matematik udbyder. Kurser skal være et kvart år i stedet for et halvt år og alle være på $7\frac{1}{2}$ ECTS-point. Som følge af at hovedfaget står for mindst 2 år af de bachelorstuderendes liv, har der været åbnet op for at sikre de på KU dårligst repræsenterede grene af matematikken, og tilføje en forøget valgfrihed.

Studieplanen for kommende russer

For en studerende der optages på matematik-studiet fra nu af, vil den obligatoriske studieplan se således ud:

	Blok 1	Blok 2	Blok 3	Blok 4
1. år	MatIntro	LinAlg	Dis1 & Alg1	An1
	SaSt1	MatM	Geom1 el. SaSt2 ¹	Alg2
2. år	#	#	#	#
	#	#	#	#
3. år	*	*	SaSt2 el. Geom1	*
	*	VtMat	BacProj-Mat	

Hver eneste blok repræsenterer $7\frac{1}{2}$ ECTS-point, pånær den sidste indgang der repræsenterer 15. For kursusblokke hvor der er angivet en # er der fri valgfrihed imellem alle kurser på mindst bachelorniveau, hvis man vel at mærke kan få lov til at følge dem. Og i de kursusblokke hvor der er angivet en *, har man valgfrihed mellem de kurser der udbydes af IMF.

I blokke hvor der er angivet nogle bogstaver, er der et obligatorisk kursus. Bogstaverne repræsenterer den officielle forkortelse af kurset. Et forsøg på en mere detaljeret gennemgang, ud fra det nuværende kursusudbud, kunne se således ud:

- MatIntro (Skemagruppe A) - "Introduktion til Matematik": Dette kursus kan bedst betegnes som en del af analysedelen fra Mat1, dvs. følger, kontinuitet, funktioner af flere variable, differentiability og differentialligninger; blandet sammen med en smule af Data, altså noget Maple.
- SaSt1 (Skemagruppe C) - "Sandsynlighedsregning og Statistik 1", dette kursus kan nogenlunde betragtes som 2SS plus lidt mere.
- LinAlg (Skemagruppe A) - "Lineær Algebra": dette kursus kan betragtes som Lineær Algebra delen man lærer på Mat1, samt enkelte anvendelser af dette.
- MatM (Skemagruppe B) - "Matematikkens metode": Hvis man vil sammenligne dette kursus med et nuværende kursus, passer MatY nok bedst ind. Kurset er et forsøg på at lave et metodefag for matematikere, så de forstår de overordnede centrale aspekter af matematik (logik, supremum, mængder, kardinalitet, etc.), og får opøvet bevisteknik.
- Dis1 & Alg1 (Skemagruppe B) - "Introduktion til diskret matematik og algebra": Dette kursus passer meget godt overens med dele af MatXX og en tredjedel af pensum på 2AL.
- Geom1 (Skemagruppe A) - "Geometri 1": Dette kursus handler om differentialgeometri, og er således generelt sammenligneligt med store dele af 3GE.
- Alg2 (Skemagruppe B) - "Algebra 2": Dette kursus ligner den del af 2AL-pensum som ikke er indeholdt i Dis1 & Alg1, til forveksling.

¹hvis man ønsker en given profilering (se længere nede i teksten), kan man være bundet til at tage disse to kurser i en given rækkefølge, studieplanen angiver hvilke profileringer der er tale om

- An1 (Skemagruppe A) - "Analyse 1": Den del af analysen op til 2AN som ikke er blevet gennemgået, og en del af 2AN (metriske rum).
- VtMat (Skemagruppe A) - "Videnskabsteori for matematiske fag": Videnskabsteorikurset. Et lignende kursus kunne være NaturFilosofi, men de to kurser er meget forskellige. Generelt handler kurset som sagt om at få de studerende til at reflektere over deres fag, hvorfor mange filosofiske emner relateret til matematik berøres her.
- SaSt2 (Skemagruppe C) - "Sandsynlighedsregning og statistik 2", videregående kursus til SaSt1.
- BacProj-Mat - "Bachelorprojekt i matematik": Et 15 ECTS-points bachelorprojekt som afslutning.

Ud over disse kurser er der så en hel masse andre kurser, som alle kan ses i studieordningen. Alle emner der er et bachelorkursus om i dag, er der et kursus om på den nye studieordning, derudover kommer en række nye bachelorkuresr, så som Undervisningsmatematik og Logik og Aksiomatisk mængdelære. - Det samlede kursusudbud kan nøjere studeres i studieordningen

At der er forøget valgfrihed, betyder dog ikke at de studerende er ladet helt på herrens mark i deres valg af kurser. Til at guide de studerende igennem deres studievalg er der formuleret et antal profileringer. En profilering er en samling ikke-obligatoriske kurser, der menes at have relevans for typiske interessefelter. Således er der oprettet en gymnasieretning, en fysikretning, en datalogiretning, en erhvervsretning, en filosofiretning og et antal teoriretninger. Navnene er forhåbentligvis selvindlysende; gymnasieprofileringen er for folk med interesse for at undervise i matematik, teoriprofileringen er for folk med interesse for teoretiske aspekter af matematik, etc.

Hvad betyder dette så for dig?

Som sagt har dette konsekvenser for et hav af nuværende bachelorstuderende også. Studieordningen indføres fra 1. september 2004 for alle de nye russer, og derudover vil alle på den nuværende studieordning (såvel som alle tidligere studieordninger) automatisk blive overflyttet til den nye pr. 1. september 2005.

Altså; hvis du er på bachelorstudieorningen, og ikke forventer at blive færdig som bachelor inden 1. september 2005, vil du blive overflyttet til den nye studieordning.

At studienævnet på den måde overflytter alle studerende fra en hvis skærelinie, skal ses i lyset af de radikale ændringer af kursusudbuddet der kommer. De kurser som står i den nuværende studieordning, vil det ikke være muligt at følge, når de ikke længere udbyddes fra det akademiske år der starter 2005.

Men at man bliver overflyttet til den nye studieordning, er dog ikke nødvendigvis en katastrofe. For tiden arbejdes der på livet løs i studienævnet for at lave generelle regler for overførslen af bachelorstuderende til den nye studieordning;

dvs. regler for hvilke af de nuværende kurser der overlapper med de kommende kurser, hvor stort overlappet er, og hvilke krav om obligatoriske kurser der vil blive stillet til studerende der ikke har bestået alle deres obligatoriske nuværende kurser. Overførselsreglerne forsøges gjort meget lempelige; hvis man har taget både Mat 1 og Mat 2, vil man ikke blive stillet over for nogen krav om at tage obligatoriske kurser.

De specifikke overførselsregler vil snart blive slået op på nogle informations-tavler, og der vil blive afholdt informationsmøder om dem.

For nogle studerende vil der dog højst sandsynligt komme nogle ekstra krav; fx vil man nok blive nødt til at tage både SaSt1 og SaSt2, hvis man ikke har bestået 2SS.

For nogle vil det måske være en fordel at blive overført til den nye studieplan, allerede fra dens indførsel hvis der er obligatoriske kurser på deres studieplan de helst vil slippe uden om. En nøjere gennemlæsning af overførselsreglerne vil bringe erkendelse opm dette.

At overføre alle bachelorstuderende bliver en stor opgave, og mange vil nok falde uden for de overordnede regler der bliver sat op. - Derfor kan det være en god ide allerede nu at begynde at forholde sig til dette. Hvis man ikke føler at de overførselsregler der slås op passer overens med ens egen forventninger om en studieplan, vil der inden for rimelighedens grænser være mulighed for at dispensere sig uden om reglerne ved at sende en ansøgning til studienævnet.

FAMØS marts 2003.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-,
Økonomi- og Statistikstuderende ved
Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Mathias Winther Madsen
Steffen Juul Christensen
Tarje Bargheer
Kristoffer Søndergård Martinsen
Ulrik Torben Buchholtz

Tegner:

Mathias W. Madsen

Deadline for næste nummer:
Fredag den 8. oktober 2004

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til famos@math.ku.dk – meget gerne
skrevet i $\text{\LaTeX}$.

FAMØS er et internt fagblad.

Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
<http://www.math.ku.dk/famos/>

Tryk: HCØ Tryk
Oplag: 500 stk.
ISSN 1395-2145