Præmieopgaver

Sara Arklint

Vi er stolte over at kunne introducere en ny form for FAMØS-opgaver: *puzzles*. Det er vores nye skribent Taus Brock-Nannestad der har lavet dette nummers puzzles, og han fortæller at i hvert fald den ene af dem er lidt svær. Taus har afprøvet sine puzzles på de øvrige redaktionsmedlemmer, og vi finder dem på ingen måde for lette.

Men først en besvarelse af en opgave fra sidste nummer:

Opgavebesvarelse

Esben Bistrup Halvorsen har besvaret følgende opgave:

> Lad $s_n = 2 + 3 + \cdots + p_n$ være det n'te afsnit i primtalsrækken.
> Vis, at der mellem s_n og s_{n+1} altid findes et kvadrattal.

Og Esben var den første, den største, den bedste og den hurtigste med en rigtig besvarelse. Han var også den eneste.

Som præmie har Esben modtaget et stykke trælegetøj i form af en kube beregnet til at skille ad og samle igen. Vi er overbevist om at Esben er meget glad for præmien, og vi er sikre på at han gerne viser den frem.

Her er Esbens besvarelse af opgaven:

> Antag, at påstanden ikke holder, dvs. der findes n så
>
> $$k^2 \le s_n < s_{n+1} \le (k+1)^2,$$
>
> hvor k^2 er det største kvadrattal $\le s_n$. Det følger, at $p_{n+1} = s_{n+1} - s_n \le (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ og dermed $p_1, p_2, \ldots, p_n \le 2k-1$. Særtilfældene $n = 1, \ldots, 4$ behandles let, så vi kan antage $n \ge 5$ og dermed $9 < 11 = p_5 \le p_n \le 2k-1$. Således er $p_2, p_3, p_4, 9, p_5, \ldots, p_n$ *forskellige ulige* tal $\le 2k-1$, hvormed
>
> $$s_n = p_1 + \cdots + p_n < 9 + p_2 + \cdots + p_n \le \sum_{i=1}^{k} (2i-1) = k^2,$$
>
> hvilket er en modstrid.