En lille note om multiplikative radonmål

Stefan Holm

Vi lader X betegne et kompakt hausdorff-rum, hvorpå vi har et radon-sandsynlighedsmål[1] μ med den ekstra egenskab at $\int fg d\mu = \int f d\mu \int g d\mu$ for alle $f, g \in C(X)$ (vi siger at μ er multiplikativt). Hermed er kravet om at μ er et sandsynlighedsmål, ækvivalent med at $\mu(X) \neq 0$ — idet vi har $\mu(X) = \int 1^2 d\mu = (\int d\mu)^2 = (\mu(X))^2$.

Operatoralgebraikere vil med det samme genkende situationen og postulere at μ må være et dirac-mål, altså at μ er koncentreret i ét eneste punkt, da gelfandspektret af $C(X)$ netop er evalueringsafbildningerne.

For ikke-operatoralgebraikere følger hér et simpelt lille bevis, der kun kræver elementær topologi og målteori. Vi starter med at definere en særlig mængde

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\substack{U \text{ åben} \\ \mu(U)=0}} U$$

Denne mængde er oplagt åben som forening af åbne mængder.

Påstand 1. *Der gælder $\mu(\mathcal{O}) = 0$, hvormed $\mathcal{O}$ altså er en maksimal åben nulmængde.*

Bevis. Da μ er et radonmål, er det nok at vise at $\mu(K) = 0$ for alle kompakte $K \subseteq \mathcal{O}$. Men da $K \subseteq \mathcal{O}$, er den altså overdækket af alle de åbne nulmængder — denne overdækning kan, da K er kompakt, udtyndes til en endelig overdækning. Altså $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$, hvormed $\mu(K) \leq \mu(U_1) + \ldots \mu(U_n) = 0$. □

Påstand 2. *$X \setminus \mathcal{O} = \{x\}$ for et passende $x \in X$.*

Bevis. Vi antager at der findes to forskellige punkter, x og y, i $X \setminus \mathcal{O}$. Da X er hausdorff, kan vi finde åbne disjunkte mængder, U_x og U_y, så $x \in U_x$ og $y \in U_y$. Der må gælde $\mu(U_x) > 0$, for ellers ville $U_x \subseteq \mathcal{O}$, og på samme måde $\mu(U_y) > 0$. Da μ er et radonmål, kan målene af U_x og U_y approksimeres ved kompakte mængder, så vi kan finde kompakte $K_x \subset U_x$ og $K_y \subset U_y$, så $\mu(K_x) > 0$ og $\mu(K_y) > 0$. Denne lille øvelse har altså resulteret i to disjunkte, kompakte mængder med positive mål.

Kompakte hausdorff-rum er særligt normale, så vi kan finde en kontinuert afbildning $f : X \to [0, 1]$, så $f|_{K_x} = 0$ og $f|_{K_y} = 1$. Dette må naturligvis også

[1] Vi husker at radonmål er borel-mål der er endelige på kompakte mængder og opfylder $\mu(D) = \sup\{\mu(K) | K \subseteq D, K \text{ kompakt}\}$ for enhver målelig mængde D.

gælde for f^n, når $n \in \mathbb{N}$. Vi bemærker at vi dermed for alle $n \in \mathbb{N}$ har $0 < \mu(K_y) \leq \int f^n d\mu = (\int f d\mu)^n$, hvor sidste lighedstegn følger af at μ var antaget multiplikativt. Men vi har også $\int f d\mu \leq 1 - \mu(K_x) < 1$, så $(\int f d\mu)^n \to 0$, når $n \to \infty$, hvilket er en modstrid. $\square$

Tilsammen giver de to påstande nu at sandsynlighedsmassen er koncentreret i punktet x, altså at $\mu = \varepsilon_x$ som ønsket.