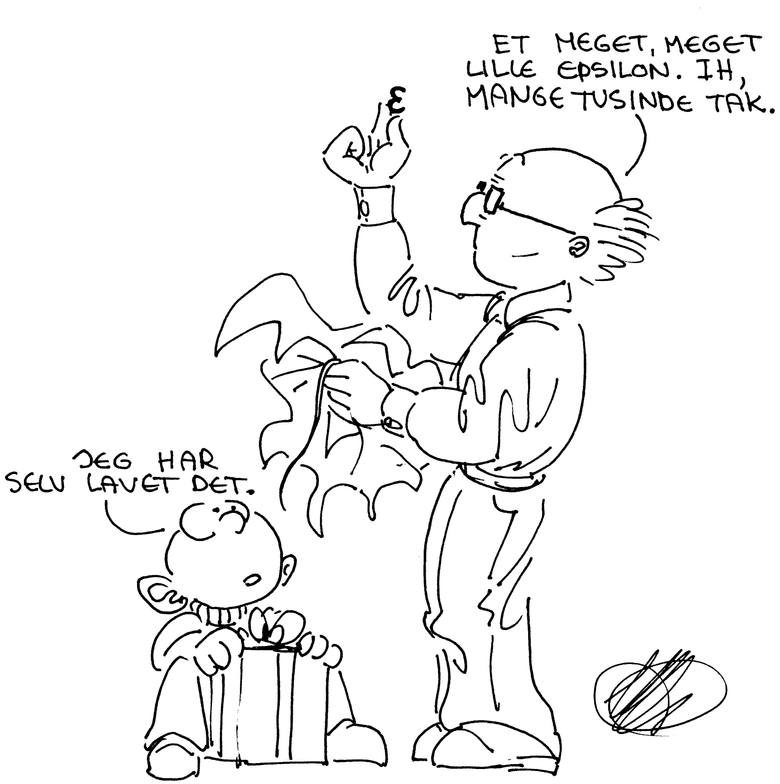
Glædelig jul! og god eksamenslæsning

fra FAMØS



FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
18. årgang, nr. 2, december 2004

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953), tysk matematiker og mængdeteoretiker. Forfattede første udkast til det aksiomsystem, der idag opfattes som matematikkens formelle grundlag. Opdagede desuden Russells paradoks et par år før Russell.

Indhold

FAMØS december 2004.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:
Sara Arklint (ansvh.)
Stefan Holm
Steffen Juul Christensen
Taus Brock-Nannestad
Ulrik Torben Buchholtz

Tegner:
Mathias W. Madsen
Ulf Worsøe (bagsiden)

Deadline for næste nummer:
Fredag den 4. marts 2005

Indlæg modtages gerne og bedes sendt til `famos@math.ku.dk` – meget gerne skrevet i LaTeX. FAMØS' dueslag på Matematisk Afdelings sekretariat kan til nøds også bruges.

FAMØS er et internt fagblad.

Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk
Oplag: 500 stk.
ISSN 1395-2145

metode, som den der er præsenteret i sætning 4.

Litteraturliste

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2. edition, Addison-Wesley Publishing Company Ltd., 1994.

[2] Christian Berg, *Generel topologi*, Matematisk afdeling, Københavns Universitet, 1997.

[3] Xingping Sun, *Strictly positive definite functions on the unit circle*, Mathematics of Computation (en AMS-publikation), lagt online den 11. maj, 2004.

[4] Hermann Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins*, Math. Ann. 77, s. 313-352, 1916.

Velkommen

I skrivende stund er det december. Det er mørkt ude. Og koldt. Varm *kakave* er den superhelt der måske vil bringe os sikkert og trygt ind i det nye år og forbi den forestående glædens fest: eksamen.

Famøs vil i nærværende nummer forsøge at være den varme kakaves *Robin*.

Siden nr. 3, 16. årgang har artikelserien betitlet "*Hvad forsker jeg i?*" – hvor en udvalgt VIP'er har lettet låget for hvad denne forsker, og har forsket, i – været en del af Famøs. Denne gang giver lektor Ryszard Nest sit bidrag til serien med en artikel om *Den ikke-kommutative verden*. I forlængelse brigner vi af samme forfatter en artikel der adverterer for *SNF-centret for ikke-kommutativ geometri*.

Undfanget i forrige nummer blev en artikelserie med emnet *Kvindelige matematikere*. Serien fortsætter i dette nummer med en artikel omhandlende den – selv sagt kvindelige – italienske matematiker Maria Gaetana Agnesi (1718 - 1799) der blandt andet er kendt for kurven *Witch of Agnesi*.

Kenneth Valbjørn Rasmussen, som bliver kandidat d. 10. december, har som sin formidlingsaktivitet beriget os med en artikel om *ligefordelte følger* i den k-dimensionale enhedskasse $[0,1]^k$.

Mr. Skipper fortæller om perfekte grafer og *den svage perfekte graf sætning*. Og Martin "Damskur" Damhus har begået en fin Kryds & Tværs.

Ud over dette giver vi besvarelser på opgaverne fra sidste gang, afslører vinderen og præmien, samt bringer nye opgaver.

Velkommen til Famøs nr. 2, 18. årgang.

Opgavebesvarelser

Taus Brock-Nannestad

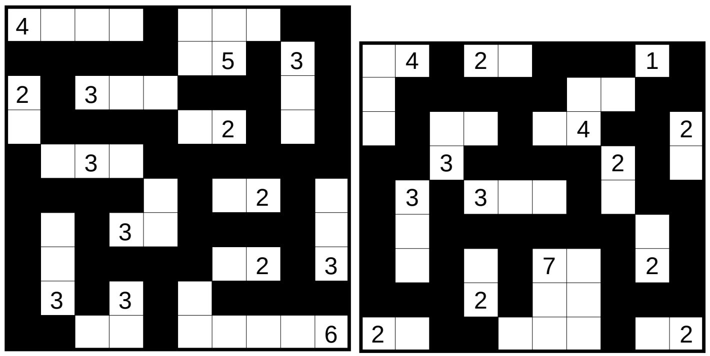
Løsning til sidste nummers puzzles

De to puzzles i sidste nummer af FAMØS blev løst og afleveret af Anders Borg Gaarde ('00) & Helle Bjerg Petersen ('03) & Niels Woo-Sang Kjærsgaard ('00), Caroline Jørgensen (aktuar 2002), Esben Bistrup Halvorsen ('97) og Rasmus Koefoed Jakobsen ('03).

Ved hjælp af en tilfældighedsgenerator i form af en norsk enkrone blev Esben udvalgt som vinder af den fantastiske præmie. Præmien vil fremover bestå af en Mystisk Flaske med et ikke forudangivet indhold. Denne gang er flasken blevet identificeret som værende en flaske Sambuca.

En egentlig gennemgang af *hvordan* man løser de to puzzles vil vi ikke beskæftige os med her. Vi vil blot angive de to løsninger. Først opsummerer vi kort de regler som løsningerne skal overholde:

1. Felter der indeholder et tal må ikke skraveres.
2. Tallene angiver antallet af sammenhængende uskraverede felter. Hvert uskraveret areal indeholder netop ét tal.
3. De skraverede felter udgør ét sammenhængende areal.
4. Der må ikke forekomme 2×2 kvadrater af skraverede felter.



Idet der igen henvises til (14) finder vi af sætning 3 at

$$\begin{aligned} T_2 &:= \lim_m \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m} (T_1 n - \sigma_n) \\ &= \int_{[0,1]^3} (\alpha\beta x + \alpha\{y - \beta x\} + \{z - \alpha\beta x - \alpha\{y - \beta x\}\})\, dz dy dx \\ &= \int_{[0,1]^2} \left(\alpha\beta x + \alpha\{y - \beta x\} + \frac{1}{2}\right) dy dx \\ &= \int_{[0,1]} \left(\alpha\beta x + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}(\alpha\beta + \alpha + 1) \end{aligned}$$

Vi er nu løbet tør for nemme måder at måle på, men der er en udvej der dog kræver en del regneri. Bruger vi igen sætning 3 fås

$$\begin{aligned} T_3 &:= \lim_m \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m} (T_1 n - \sigma_n)^2 \\ &= \frac{1}{3}(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + 1) + \frac{1}{2}(\alpha^2\beta + \alpha\beta + \alpha) \\ &= \frac{3}{4}T_2^2 - \frac{1}{8}\alpha T_2. \end{aligned}$$

Idet $T_2 \neq 0$ finder vi heraf

$$\alpha = \frac{6T_2^2 - 8T_3}{T_2}.$$

Idet $\alpha \neq 0$ har vi

$$\beta = \frac{2T_2 - \alpha - 1}{\alpha}.$$

Endelig, idet vi også har $\beta \neq 0$,

$$\gamma = \frac{T_1}{\alpha\beta}$$

hvormed sætningen er vist □

Sætningen kan også vises i det tilfælde hvor der kun er to tal. Det kan muligvis også lade sig gøre at vise ovenstående sætning i det tilfælde hvor der er fire tal! Det har ikke været muligt for mig, at generalisere metoden i sætningen ovenfor, til at gælde $n > 4$ tal. Det ser ikke umiddelbart ud til at der findes en "nem"

Man kan endda, naturligvis kun delvist, gennemprøve sætningen ved udregning på computer. Jeg har gjort dette i tilfældet $k = 3$ hvor jeg brugte mængden $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\}$, der er indeholdt i D_k (Tjek selv efter). Jeg fandt ud af, at man ved at udregne 10^n elementer af følgen givet ved (5) kunne genfinde tallene $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ og $\frac{1}{\sqrt{5}}$ med cirka n korrekte decimaler efter kommaet. Konvergensen af gennemsnittene på højresiden af (6) er altså temmelig langsom.

Som noget helt eksceptionalt bør det noteres at vi ikke behøver at kende værdien af k i sætning 4. Vi kan udvide σ til en afbildning

$$\hat{\sigma} : \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

hvor $\hat{\sigma}$ altså stadig er injektiv og hvor det også stadig er muligt at bestemme, ikke bare antallet af α_i'er, men også deres værdi. Hvordan det?

For at se dette lader vi $\alpha \in D_k$ være givet for et $k \in \mathbb{N}$, og vi sætter $y := \sigma(\alpha)$. Hvis $n > k$ er binomalkoefficienterne i udtrykket (6) alle 0 så $T_n(y) = 0$ idet vi som nævnt i beviset har $0 \leq y_j - y_{j-1} \leq k$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Af udtrykket (12) har vi på den anden side $T_n(y) \neq 0$ når $0 < n \leq k$ da α_i'erne opfylder $\alpha_i > 0$ for hvert i.

Vi kan altså finde k ved at udregne $T_n(y)$ for hvert $n \in \mathbb{N}$. Det mindste $n \in \mathbb{N}$ for hvilket vi har $T_n(y) = 0$, opfylder af ovenstående $n = k + 1$. Da vi dermed så kender k, følger resten af beviset for sætningen.

Lad os nu se på en (delvis) generalisation af problem 2:

Sætning 5. *Antag at $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Hvis $(\alpha\beta\gamma, \beta\gamma, \gamma) \in O_3$ så er det muligt ud fra følgen*

$$\sigma = (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma n\rfloor\rfloor\rfloor\big)_{n\in\mathbb{N}} \tag{13}$$

at bestemme værdierne af α, β og γ.

Bevis. Lad α, β og γ være givet med de nævnte egenskaber. Vi finder ved udregning at

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \alpha\beta\gamma n - \alpha\beta\{\gamma n\} - \alpha\{\{\beta\gamma n\} - \beta\{\gamma n\}\} \qquad (14) \\ &+ \{\{\alpha\beta\gamma n\} - \alpha\beta\{\gamma n\} - \alpha\{\{\beta\gamma n\} - \beta\{\gamma n\}\}\} \end{aligned}$$

for hvert $n \in \mathbb{N}$. På samme måde som i sætning 4 "måler" vi på følgen, og finder derved nok information til at kunne udlede de ønskede størrelser. Vi har umiddelbart af (14) at

$$T_1 := \lim_n \frac{\sigma_n}{n} = \alpha\beta\gamma,$$

Præmieopgave

Taus Brock-Nannestad

Formålet med denne type puzzle er, at skrive tallene $1, \ldots, 6$ i felterne således at følgende betingelser er opfyldt:

1. Et tal må ikke optræde to eller flere gange i den samme søjle eller række. (De der har fulgt MatXX vil genkende dette som værende definitionen på et latinsk kvadrat. Hvis man har haft gruppeteori kan man forestille sig en gruppetavle).
2. Tallene ude på sidelinierne angiver hvor mange tal man kan "se" i den pågældende række eller søjle når man kigger ind i kvadratet fra tallet på sidelinien. Bemærk at man i den højre søjle kigger mod venstre, og ligeledes i den nederste række kigger opad.

En god metafor er, at hvert tal inde i kvadratet repræsenterer højden på et højhus der står i det pågældende felt. Tallene uden for kvadratet angiver så hvor mange højhuse man kan se hvis man kigger ind mod byen.

Som et eksempel på hvad der menes med at kunne "se" tal kan vi betragte rækken "3 1 2 4 6 5".

Hvis vi står til venstre for denne række kan vi se tre forskellige tal: 3, 4 og 6. Tallene 1, 2 og 5 bliver overskygget af 3 og 6, og vi kan derfor ikke "se" dem.

Hvis vi derimod står til højre for rækken og kigger mod venstre kan vi kun se to tal: 5 og 6. Resten af tallene i rækken bliver overskygget af 6-tallet.

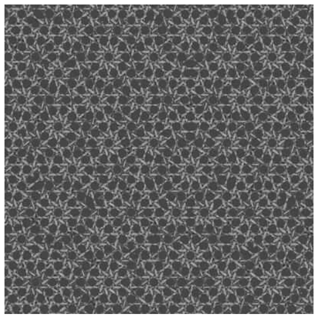
	3	3	2	1	2	3	
3							3
3							3
4							2
1							3
2							1
2							4
	3	1	2	2	3	2	

En ny forståelse af rum

Ryszard Nest

SNF[1]*-centret for ikke-kommutativ geometri er blevet dannet for at videreudvikle de nødvendige matematiske værktøjer til anvendelse af de nyeste koncepter i rumgeometri. Vort mål er at forbedre forståelsen af den fysiske virkelighed ved at fremkomme med midler til at forklare tilsyneladende selvmodsigelser i dens beskrivelse.*

Disse to billeder har faktisk noget til fælles - men hvad?

Svaret på dette spørgsmål gives gennem matematik. Matematik er meget mere end blot at lægge tal sammen eller finde punkter på en cirkel. Det er og har altid været et meget vigtigt værktøj, som alle videnskabsfolk bruger til at analysere strukturer, der ikke kan observeres direkte. Men i takt med at vor forståelse af verden omkring os vokser, vokser kravene til de værktøjer vi bruger - og dermed til matematikken.

Et af de nyeste værktøjer kaldes *ikke-kommutativ geometri*. For at forstå hvad det handler om, må vi betragte billederne herover igen. Hvis man omhyggeligt følger linjen på baderingen til venstre vil man se at den aldrig rører et punkt på overfladen mere end en gang. Med andre ord ser det kun ud som om linjen kommer tilbage til sit udgangspunkt. Ser man på mønstret ved siden af, ser det ved første øjekast ud som om det gentager sig selv. Først ved nærmere eftersyn kan man finde små forskelle. Igen ser det ud som om der er symmetri, men i virkeligheden er der ingen sådan.

[1]Statens Naturvidenskabelige Forskningsråd

Vi ønsker nu at skrive binomialkoefficenten på højresiden af (6) som et udtryk i Iverson-klammer på ovenstående form. Indfør til dette formål mængderne

$$B_n = \{A \subseteq \{1,\dots,k\} \mid A \text{ består af netop } n \text{ elementer}\} \qquad n = 1,\dots k.$$

B_n er altså mændgen af samtlige n-delmængder af $\{1,\dots,k\}$ og det ses at B_n har netop $\binom{k}{n}$ elementer. Vi skal nu overbevise os om at vi har

$$\binom{y_j - y_{j-1}}{n} = \sum_{A\in B_n}\prod_{i\in A}[\{\alpha_i j\} < \alpha_i], \quad j \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Til dette formål vælges et n med $0 < n \leq k$ og et $j \geq 0$. Jævnfør (8) og antagelsen $\alpha_i \in]0,1[$ for hvert $i = 1,\dots,k$ er det klart at vi har $0 \leq y_j - y_{j-1} \leq k$. Vi sætter nu $m := y_j - y_{j-1}$.

Det er nu klart at der må være netop m i'er i $\{1,\dots,k\}$, der opfylder

$$[\{\alpha_i j\} < \alpha_i] = 1. \tag{10}$$

Lad C betegne mængden af i'er der opfylder (10). Hvert af produkterne i summen på højresiden af (9) er enten 0 eller 1, og det er ikke svært at se at vi må have

$$A \subseteq C \Leftrightarrow \prod_{i\in A}[\{\alpha_i j\} < \alpha_i] = 1, \quad A \in B_n. \tag{11}$$

Antallet af $A \in B_n$ der opfylder (11) er netop $\binom{m}{n}$, hvilket altså bliver værdien af summen på højresiden af (9). Da m var sat lig $y_j - y_{j-1}$, følger gyldigheden af (9).

Ved brug af (9), antagelsen $\alpha \in D_k$, sætning 3 og (velkendte) sætninger om Riemann-integration finder vi nu at

$$\begin{aligned} T_n(y) &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\binom{y_j - y_{j-1}}{n} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{A\in B_n}\prod_{i\in A}[\{\alpha_i j\} < \alpha_i] \\ &= \int_0^1\cdots\int_0^1 \sum_{A\in B_n}\prod_{i\in A}[x_i < \alpha_i]\,dx_1\cdots dx_k \\ &= \sum_{A\in B_n}\prod_{i\in A}\alpha_i. \end{aligned} \tag{12}$$

for hvert n med $0 < n \leq k$.

Det overlades til læseren at verificere identiteten (7). Dette gøres f.eks. nemt ved induktion på k ud fra udregningen ovenfor idet vi husker at $T_0(y) = 1$. Det følger nu af algebraens fundamentalsætning, der udsiger at ethvert k'te grads polynomium har netop k rødder og udtrykket (7) at der findes netop et $\alpha \in D_k$ opfyldende $\sigma(\alpha) = y$. Hermed er sætningen vist. $\square$

To anvendelser af ligefordelte følger

I dette afsnit præsenteres delvise, generaliserede løsninger på problemerne 1 og 2. Først problem 1.

Sætning 4. *Definér afbildningen* $\sigma : D_k \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *ved*

$$\sigma : \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \mapsto (\lfloor \alpha_1 n \rfloor + \cdots + \lfloor \alpha_k n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}. \tag{5}$$

Vælger vi $y := (y_n)_{n \geq 0} \in \sigma(D_k)$, *så eksisterer*[2] *grænseværdierne*

$$T_n(y) := \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \binom{y_j - y_{j-1}}{n}, \quad n = 0, \ldots, k \tag{6}$$

og vi kan bestemme dèt $\alpha = \{\alpha, \ldots, \alpha_k\} \in D_k$ *der opfylder* $\sigma(\alpha) = y$ *idet*

$$\sum_{n=0}^{k} T_n(y) x^{k-n} = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \cdots (x + \alpha_k), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Tallene $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_k$ *er altså rødder i et polynomium der har størrelserne fra* (6) *som koefficienter.*

Før beviset er det på sin plads med et par kommentarer. Udtrykket i gennemsnittet (6) *er* en binomialkoefficient, hvilket nævnes da det måske ser lidt mystisk ud. I beviset bruges de såkaldte *Iverson-klammer* $[\cdot]$ som er defineret på mængden af afgørlige udsagn ved

$$[\text{sand}] = 1 \text{ og } [\text{falsk}] = 0.$$

For et givet $c \in [0, 1]$ kan vi definere den reelle funktion $x \mapsto [x < c]$. Denne ses at være Riemann-integrabel idet den er stykvis kontinuert og vi har klart

$$\int_0^1 [x < c] \, dx = c.$$

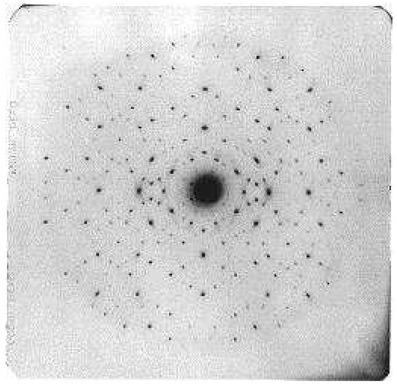
Bevis for sætning 4: Vælg et $y \in \sigma(D_k)$ og antag at $\alpha \in D_k$ opfylder $y = \sigma(\alpha)$. Det afgørende trick i beviset er at tolke binomialkoefficienterne i gennemsnittene på højresiden af (6) på en sådan måde at det bliver muligt at anvende sætning 3 på disse. Derved finder vi både at de eksisterer, og hvad de konvergerer imod.

Vi lægger først mærke til, at $T_0(y)$ nemt regnes ud til at være 1 idet vi, per definition, har $\binom{m}{0} = 1$ for alle $m \in \mathbb{N}_0$. Da $\alpha_i \in]0, 1[$ for hvert $i = 1, \ldots, k$ ser vi, at vi ved brug af Iverson-klammer har

$$\lfloor \alpha_i j \rfloor - \lfloor \alpha_i (j - 1) \rfloor = [\{\alpha_i j\} < \alpha_i], \quad i = 1, \ldots, k \text{ og } j \geq 0. \tag{8}$$

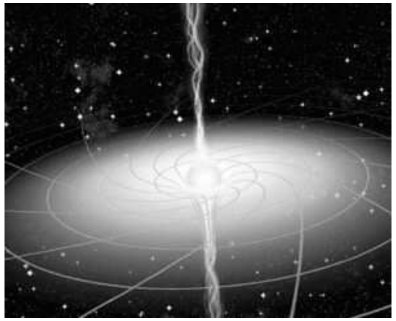
[2] Højresiden konvergerer i $\mathbb{R}$ for hvert $n = 0, \ldots, k$. Vi sætter her $y_0 = 0$.

Billederne herover er computergenererede og kunne derfor med nogen rimelighed opfattes som blot et leg uden noget formål. Men billedet ved siden af teksten her er et virkeligt såkaldt "diffraktionsmønster", som kan opnås ved at sende lys gennem et krystallinsk materiale som salt. Havde man vist det til en kemiker for 25 år siden, ville han ikke have troet, at det var ægte. På det tidspunkt havde man en forståelse af, at naturen kun producerer et begrænset antal af 100 % symmetriske mønstre. Men i takt med at kemikere udviklede nye og mere komplekse materialer, opdagedes "abnorme mønstre". Sådanne mønstre er igen næsten symmetriske, men dannet ud fra naturligt forekommende materialer såsom sofistikerede metallegeringer. Faktisk er det krystallignende billede herover en repræsentation af en menneskeskabt legering, der frembringer diffraktionsmønstret her.



Det er af stor betydning for videnskabsfolk at kunne forstå og forklare sådanne næsten-symmetrier således at man kan arbejde videre med dem. Det viser sig dog, at det kræver en ny måde at tænke på rum at tilfredsstillende forklare disse fænomener. Problemet er at på mikroskopisk niveau bliver vort traditionelle afstandsbegreb utilstrækkeligt. For eksempel er det i en vis forstand ikke muligt at på samme tid bestemme både længde og højde af en lille kasse.

En matematiker beskriver denne situation ved at sige, at rumkoordinaterne af længde og højde ikke kommuterer. Selv ideen om et punkt som en meget veldefineret prik på en overflade må forkastes. I stedet arbejdes med "fuzzy points", hvis to koordinater ikke kan angives samtidig. Som en konsekvens heraf kan selv meget simple rum, som videnskabsfolk traditionelt har behandlet som enkeltstående punkter, have flere forskellige geometriske strukturer.



Dette har en lang række uventede konsekvenser. For eksempel vil en ikke-kommutativ rumstruktur ændre forståelsen af tid. Tid har ellers altid været opfattet som uafhængig af rum, men "fuzzy"ikke-kommutative strukturer kræver, at tid opfattes som skabt af rum. Dette kan illustreres nærmere ud fra den sidste figur, der fremstiller et roterende sort hul - en af de mange som mand kan finde på nettet. Astronomerne fortæller os, at tæt ved et sådant uhyrligt objekt bevæger tiden sig anderledes end i det sædvanlige rum på grund af hullets enorme masse, - der findes ingen mulighed for at undgår at falde ind i "hullet". I den ikke-kommutative verden optræder samme effekt direkte som følge af den interne struktur af tids-rum, uden at koncentration af massen behøver at spille nogen rolle heri. Denne egenskab rækker langt i forhold til at forklare visse selvmodsigelser i moderne fysik.

Ikke-kommutativ geometri er en relativt nyudviklet disciplin, som for omtrent 20 år siden skabtes ud fra et ønske om at finslibe visse modeller for fænomener på atomart niveau, som de næsten-symmetriske diffraktionsmønstre herover. Da fysikere og kemikere begyndte at trænge dybere ind i naturen, syntes deres resultater at være mere og mere selvmodsigende, når de behandledes med de klassiske matematiske metoder. Men naturen modsiger jo ikke sig selv, så dette betyder, at disse gamle værktøjer er utilstrækkelige og at bedre metoder, så som ikke-kommutativ geometri, må udvikles.

Ikke-kommutativ geometri kræver en mere holistisk og universel tilgang til matematik. Matematikere fra forskellige og traditionelt adskilte fagområder må arbejde sammen for at kunne dække de forskellige aspekter knyttet til de ovenfor beskrevne tilsyneladende selvmodsigelser. Samtidigt nærmer matematik sig også moderne fysik og kompletteres med en mere eksperimentel tilgang.

SNF-centret i ikke-kommutativ geometri er blevet dannet af en gruppe forskere ved Københavns Universitets Matematiske Afdeling for at sikre aktiv dansk medvirken i udviklingen af dette unge og spændende forskningsfelt, og for at skabe et optimalt miljø for den næste generation af unge danske matematikere.

Mere information på `http://www.math.ku.dk/ncgcenter/`

At sådanne følger overhovedet findes er slet ikke umiddelbart klart. Xingping Sun har dog i [3] vist at der gælder

Sætning 1. *Lad* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ *og antag at* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ *og 1 er lineært uafhængige over* $\mathbb{Q}$. *Da er følgen*

$$\big(\{n\alpha\}\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\{n\alpha_1\}, \dots, \{n\alpha_k\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

ligefordelt i $[0,1]^k$.

Xingping Sun viser ovenstående sætning ved brug af det der kaldes *Weyls ligefordelingskriterium* (se [4]), men den kan også vises mere direkte, omend mere besværligt.

Vi er også nødt til at overbevise os om, at der overhovedet findes $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ opfyldende $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ og 1 er lineært uafhængige over $\mathbb{Q}$. Definér mængden

$$D_k := \Big\{\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq]0,1[\;\Big|\; \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ og 1 er lineært uafhængige over } \mathbb{Q}\Big\}$$

og mængden

$$O_k := \Big\{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R} \;\Big|\; \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ og 1 er lineært uafhængige over } \mathbb{Q}\Big\}.$$

Begge disse mængder er meget store. Idet jeg minder om at en mængde X kaldes *overtællelig* hvis der *ikke* findes en injektiv afbildning $f : X \to \mathbb{N}$ har vi

Sætning 2. *Mængderne* D_k *og* O_k *er begge overtællelige.*

Sætningen kan vises ved brug af en række af Cantors sætninger om *kardinalitet* (størrelse, mægtighed) af $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ - se f.eks. [2]. Dette er ikke svært og overlades til læseren.

Til brug i anvendelserne i det følgende præsenteres nu en anden version af sætning 2 ovenfor. Igen overlades beviset til læseren idet det noteres at dette er en standardanvendelse af definitionen af Riemann-integrabilitet.

Sætning 3. *Lad* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ *og antag at* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ *og 1 er lineært uafhængige over* $\mathbb{Q}$. *Antag endvidere at* $f : [0,1]^k \to \mathbb{R}$ *er Riemann-integrabel. Da er*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} f(\{n\alpha\}) = \int_{[0,1]^k} f(s)ds$$

Faktisk er sætningerne 1 og 3 ækvivalente hvilket dog ikke bruges i det følgende.

hvilket jo ikke siger meget. Det ses at der skal lidt mere arbejde og eventuelt nogle forudsætninger på værdierne af α og β for at løse problem 1. Et taleksempel er på sin plads: Vi har for eksempel

$$(\lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/3 \rfloor)_{n \geq 0} = (0, 0, 1, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 7, \ldots)$$

hvor vi altså har sat $\alpha := \frac{1}{2}$ og $\beta := \frac{1}{3}$ i udtrykket (2). Det er klart at følger på denne form er voksende heltalsfølger, og det ser ud til at vi smider forbløffende megen information om α og β væk under dannelsen af disse følger. Derfor er problem 1 interessant.

I samme stil kan vi opstille den næste inspirationskilde fundet i [1] s. 101:

Problem 2 *(stadig delvist uløst) Antag at $\alpha, \beta \in]0, \infty[$. Under hvilke omstændigheder er det ud fra følgen*

$$\big(\lfloor \alpha \lfloor n\beta \rfloor \rfloor\big)_{n \in \mathbb{N}} = \big(\lfloor \alpha \lfloor \beta \rfloor \rfloor, \lfloor \alpha \lfloor 2\beta \rfloor \rfloor, \lfloor \alpha \lfloor 3\beta \rfloor \rfloor, \ldots\big) \tag{3}$$

muligt at bestemme α og β.

På samme måde som i tilfældet problem 1 er det umiddelbart klart at følger på formen (3) er voksende heltalsfølger. Også i dette tilfælde ser det ud til at megen information om α og β går tabt i dannelsesprocessen.

Ligefordelte følger i $[0,1]^k$

Først skal et par begreber på plads. Vi kan betragte $\mathbb{R}$ som et vektorrum over $\mathbb{Q}$. Ethvert tal kan dermed ses som en vektor som vi kan gange med et rationalt tal, og ikke mindst kan vi lægge dem sammen på sædvanlig vis. Bruger vi standard-terminologien fra lineær algebra siges tallene $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ at være *lineært uafhængige* over $\mathbb{Q}$ hvis der for alle $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{Q}$ gælder

$$p_1\alpha_1 + \cdots + p_k\alpha_k = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, k\} : p_i = 0,$$

Følgende definition er taget fra [3] (dog lettere omformuleret).

Definition 1. *En følge $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $[0,1]^k$ siges at være ligefordelt hvis der for alle $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ med $0 \leq a_j < b_j \leq 1$, $j = 1, \ldots, k$, gælder at*[1]

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} 1_{[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_k,b_k]}(\sigma_n) = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k). \tag{4}$$

Intuitivt kan vi sige at "andelen" af punkter fra (σ_n) der er indeholdt i kassen $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ i grænsen netop er lig kassens k-dimensionale volumen for enhver k-dimensional kasse i $[0,1]^k$.

[1] 1_A betegner i det følgende indikatorfunktionen for A, altså funktionen der er 1 på A og 0 udenfor.

Side 9-sætningen: The probability that your vote will make a difference

Pawel Bartoszek

Have you ever wondered when voting on an election day, what the chances are that your vote actually makes a difference? Well, there's an answer, and it involves π!

Let's assume for the sake of simplicity that the number of voters participating in the election is an odd number $n = 2k + 1$. The voters can choose between two options, for example "YES" and "NO".

Let us assume further that they vote independently of one another and that they all vote for each of the options with an equal propability.

Your vote will then count exactly when the vote of the other $2k$ participants are split. The propability of that is

$$P_{\text{Umatter}} = \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{(2k)!}{k!k!2^{2k}}.$$

Now, for large k-s we can use Stirling's formula $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ to approximate the factorials:

$$P_{\text{Umatter}} \approx \frac{\sqrt{2\pi 2k}(2k)^{2k} e^{-2k}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} 2^{2k}} = \frac{2\sqrt{\pi k}(2k)^{2k} e^{-2k}}{2\pi k (2k)^{2k} e^{-2k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

That means that in elections with n participants the chances that your vote will be the deciding one are

$$P_{\text{Umatter}} \approx \sqrt{\frac{2}{(n-1)\pi}}$$

π sure shows up in the strangest places!

Maria Gaetana Agnesi

Sanne Hansen

I sidste nummer af FAMØS var der en artikel om Sofia Kovalevskaya. Det var historien om en kvinde, der måtte kæmpe hårdt for at få lov til at studere matematik. Hun fik ikke meget støtte fra familien og hun blev nødt til at indgå et arrangeret ægteskab for at få mulighed for at følge undervisningen ved et universitet. Men selv da mødte hun modstand, da universiteterne nødigt ville lade en kvinde studere matematik og endnu mindre få en grad. Men heldigvis opgav Sofia Kovalevskaya ikke så let og det lykkedes hende faktisk at opnå både en grad og en stilling ved et universitet, dog med store personlige omkostninger.

Helt anderledes er historien om Maria Gaetana Agnesi. Hun behøvede ikke at kæmpe mod familien for at få lov til at studere matematik, hun blev opfordret til det af sin far. Hun behøvede heller ikke at søge fortvivlet efter en stilling, hun fik en, men tog aldrig rigtig imod den. Maria Gaetana Agnesi var så heldig at blive født ind i en velhavende familie, der anså det for at være en helt almindelig ting, at kvinder kunne studere naturvidenskab og tale om det på lige fod med mænd. Hun var også så heldig, at hun blev født på en tid, hvor der, især i Italien, var begyndt at ske en ændring mod det at acceptere at kvinder kunne begå sig i den akademiske verden, og hvor mænd begyndte at beundre intellektuelle kvinder. Det var dog stadig så langt fra normalt at en kvinde kunne og gjorde sig bemærket indenfor matematikken, Maria Gaetana Agnesi var undtagelsen, der bekræftede reglen. For selvom der var ved at ske en ændring i holdningen, så var det normale stadigvæk at kvinder ikke skulle lære andet end hvad der skulle til for at føre en husholdning.

Barndom og ungdom

Maria Gaetana Agnesi blev født d. 16 maj 1718 i Italien. Hun var det ældste barn af Pietro Agnesi, der havde 21 børn og tre koner. Pietro Agnesi var en velhavende købmand fra Milano. Maria Gaetana Agnesi blev af faderen opmuntret til at studere forskellige videnskaber, han gav hende allerede som meget ung en masse forskellige og ganske fortrinlige tutorer, der kunne undervise hende i mangt og meget. Derfor havde hun ingen problemer med at få lov til at studere, hun blev tværtimod opmuntret til det. Hun udviste ret tidligt stort talent og kunne allerede som 11-årig tale syv sprog flydende, heriblandt latin, græsk og hebræisk. Som teenager var hun i stand til at diskutere emner, såsom mekanik, logik, zoologi og mineralogi på et meget højt niveau.

Ligefordelte følger i $[0,1]^k$ med anvendelser

Kenneth Valbjørn Rasmussen

I denne artikel præsenteres et fundamentalt resultat omhandlende *ligefordelte følger* i den k-dimensionale enhedskasse $[0,1]^k$ der normalt er kendt som en variant af *Weyls ligefordelingskriterium*. Endvidere præsenteres to problemer til hvis løsning dette resultat viser sig nyttigt. Så vidt det er mig bekendt har ingen af disse to problemer tidligere været løst. Inspirationen til det arbejde der fremlægges i det følgende stammer fra [1] - en bog der bestemt kan anbefales.

For at opildne lidt interesse vil jeg starte med at præsentere de to (stadig) uløste problemer, der inspirerede mig til det følgende.

Lad $x \in \mathbb{R}$. Vi betegner med $\lfloor x \rfloor$ *heltalsdelen* af x, altså det største hele tal mindre end eller lig med x. Betegn med $\{x\}$ den *brudne* del af x som vi kan definere ved ligningen

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Det er ikke svært at se at dette definerer $\{\cdot\}$ entydigt.

Som det er gjort i en margennote på s. 514 i [1], kan man opstille følgende problem (her omformuleret en smule):

Problem 1 *(stadig delvist uløst) Antag at $\alpha, \beta \in]0,1[$. Under hvilke omstændigheder er det ud fra følgen*

$$\big(\lfloor n\alpha \rfloor + \lfloor n\beta \rfloor\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor + \lfloor 3\beta \rfloor, \dots\big) \tag{2}$$

muligt at bestemme α og β.

At man lige præcis kræver at $\alpha, \beta \in]0,1[$ har selvfølgelig en forhistorie som dog springes over (overvej evt. selv eller se [1]). Lad os først se på hvad det egentlig er, der bliver spurgt om. Vælger vi $\alpha \in \mathbb{R}$ og blot betragter følgen

$$(\lfloor n\alpha \rfloor)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \dots\big),$$

er det ikke svært at finde α idet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\lfloor n\alpha \rfloor = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(n\alpha - \{n\alpha\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} n\alpha - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{n\alpha\} = \alpha$$

da $\{n\alpha\} \in [0,1[$. Samme metode virker ikke umiddelbart i tilfældet problem 1. Vi har

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\lfloor n\alpha \rfloor + \lfloor n\beta \rfloor) = \alpha + \beta$$

Lodret:

1: Mister
2: Præster
3: Bibelsk personage
4: Takker nej
5: Sportsudøvers
6: Søge støtte hos
7: Forherlig
8: Ø
10: Bestanddel
11: Redskabet
12: Fremstiller
13: Fransk artikel
14: ZFC-relateret begivenhed
17: Genstand, fx en kårde
19: Sportsudstyr
20: Lønsom
23: Overraskelsesudbrud (onomatopoietikon)
26: Typisk discipelantal
28: Stiftes bekendtskab med i gymnasiet
30: Kør
31: Blød op
33: Forkortelse
35: By
36: Hvæs
39: Opholdssted, kendt fra Oslohegnet
42: Romersk epos af Virgil
44: Japansk kunstudtryk for den (visuelt smukke) tekstuelle del af en illustreret skriftrulle
45: Ballade
46: Orddel (suffiks), danner substantiver der betegner en person, som er specialist indenfor et givent område
47: Dansk by
50: Italiensk maleudtryk for en teknik, hvori konturerne i overgang mellem lys og skygge udviskes
51: Ikke-eksotisk og af utallige russer ejet navn (lyder som en smækkende bildør)
53: Kompakt formulerede (strø)tanker
56: Eksotisk navn
58: Gud
62: Beklædningsdel, rappes om af Banjos Likørstue, hvis nogen ellers kan huske dem
63: Middel
65: Musikstykke
67: Erkendelsesudbrud (Strengt mildere end heureka!)
70: Dyr af guld som skamrides af høj mand fra Ceylon, eller spark
71: Ikke tilknyttet politi eller militær
72: $(1+i)(1-i)3! - x$, hvor x er antallet af ikke-trivielle undergrupper i $\mathbb{Z}_{16}$.
75: Smuk, frodig
77: Brøkdel
79: Fedtstof i vævet
82: Dyr
85: Skandinaviske
86: Afkræver
87: Figur i børnefjernsyn eller brandrester
88: Silicium
89: Eksisterer
91: Samfundets interesse
93: Transportmiddel
99: By
100: 3 ens
103: Observeres
105: Bemærk
106: Navn af anden oprindelse end dansk
107: Instrument, ejes af døden
109: Sat overmåde pris på
111: Periode
114: Nationalpattedyr og eksmatematiker
115: Løvtræer med knudret bark, hvis frugter i pøbelmunde benævnes agern
117: Vegetation
119: Slangede sig
121: Tidlig
122: Omtrent

I 1738 publicerede hun Propositiones Philosophicae, som var en række essays om filosofi og naturvidenskab. Herefter blev der i hendes hjem på hendes fars forslag arrangeret en række aftener, hvor der kom forskellige gæster, som Maria Gaetana Agnesi skulle debattere med om sine essays. Reelt set en form for disputatsforsvar. Om det var for at prale med sin datter at Pietro Agnesi lod disse aftener finde sted eller om det var for sin datters skyld er ikke til at vide med sikkerhed. Til gengæld er det ret sikkert at Maria Gaetana Agnesi ikke brød sig særligt meget om det. Ikke så meget fordi det var en form for udstilling af hende, men mere fordi hun mente at for hver person, der fandt en lille del af samtalen interessant ville langt størstedelen af resten af selskabet finde den umådelig kedelig, da det var et meget specifikt emne, der ville blive debatteret. Det bør nok bemærkes, at selvom det virker ret usmageligt at udstille sin datter på den måde, var det dengang relativt almindeligt i de bedre kredse. At Maria Gaetana Agnesi gik med til disse aftener, selvom hun egentlig var lidt imod dem, er blot et udtryk for at hun til hver en tid ville føje sin fader i hans ønsker.

Religionen

Maria Gaetana Agnesi kom fra en katolsk familie, og var selv meget religiøs. Hun overvejede at blive nonne, da hun var omkring de 20 år. Men da hun bad om sin faders tilladelse til at gå i kloster, lykkedes det ham at overtale hende til at lade være. Hun stillede dog den betingelse, at hun fik lov at gå i kirke, når hun ville, og at hun fik lov at leve simpelt. Herefter koncentrerede hun sig primært om sine studier af religiøse bøger og om at lære matematik. Det var også omkring dette tidspunkt at hun skrev en kommentar til de L'Hôpitals Traité analytique des section coniques, men den blev aldrig publiceret.

Maria Gaetana Agnesi fik fremover ikke længere undervisning af tutorer, hun var nået til et niveau, hvor kun få ville kunne lære hende noget nyt og de få der var havde professorater ved de forskellige universiteter og var derfor ikke interesseret i at undervise en italiensk købmandsdatter i hendes hjem. At hun kunne rejse ud for at modtage undervisning ved et universitet, lod ikke til at være en mulighed hverken hende eller hendes far overvejede. Så Maria Gaetana Agnesi var i høj grad overladt til sig selv, når det kom til at udvide sit kendskab til matematikken. Der var dog en munk ved navn Ramiro Rampinelli, der kom i Maria Gaetana Agnesi's hjem ved adskillige anledninger. Han havde tidligere være professor både i Rom og Bologna, og han hjalp Maria Gaetana Agnesi med bl.a. at studere Reyneau's Analyse démontrée. Så selvom hun ikke modtog nogen universitetsundervisning var hun ikke overladt helt til sig selv, hun fik råd og vejledning om matematikken fra Ramiro Rampinelli.

Bogen

Maria Gaetana Agnesi vigtigste bidrag til matematikken var hendes meget berømte bog *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (Fundamental analyse til brug for den italienske ungdom). En lærebog om blandt andet algebra og differential- og integralregning. Det var Maria Gaetana Agnesi's ønske at bogen skulle komme den italienske ungdom til gode, så de fik en lærebog fyldt med eksempler på deres modersmål. Der er sikkert flere grunde til at Maria Gaetana Agnesi valgte at skrive denne bog, men hun er nok i høj grad blevet opmuntret til det af Ramiro Rampinelli. Hun omtalte ham med stor anerkendelse i sit forord til bogen og gav ham en del af æren for at hun havde været i stand til at tilegne sig matematikken, der gjorde det muligt for hende at skrive en så pædagogisk velskrevet bog. Bogen i sig selv indeholdt ikke nogle nye teorier, men til gengæld en masse virkelig gode og gennemarbejdede eksempler. Det var Maria Gaetana Agnesi's formål, at den skulle være skrevet så det overordnede fremstod klart og simpelt uden dog at miste dybden, og det lykkedes for hende. Bogen var skrevet i et meget letlæseligt sprog, endda var den skrevet så godt at en komité i Det franske akademi fik den oversat til fransk i 1749, med den begrundelse at der ikke var nogen anden bog, der så hurtigt ville sætte læseren i stand til at trænge så dybt ned i de fundamentale begreber af analysen. Lærebogen blev også senere oversat til engelsk.

At det var muligt for en kvinde som Maria Gaetana Agnesi at få udgivet en bog, er i sig selv ret usædvanligt. Men det var nok heller ikke gået, hvis det ikke havde været for hendes far. Hun havde nemlig pga. hans penge mulighed for at arrangere en privat udgivelse af bogen. Før hun gik i gang med at få trykt bogen, ville hun dog gerne høre andre matematikeres mening om sin bog, og hun blev af Ramiro Rampinelli foreslået at skrive til Riccati, der havde været en af hans egne lærere. Det gjorde hun, og Riccati svarede hurtigt tilbage på hendes brev og lovede, sammen med sine to sønner, at læse hendes udkast til bogen igennem. Da Maria Gaetana Agnesi modtog kommentarer til den første del af bogen lod hun den, efter de nødvendige forbedringer, gå i trykken og det første bind af hendes store værk Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana blev udgivet i 1748. Samtidig hermed korresponderede hun stadig med Riccati om anden del af bogen og den blev udgivet det efterfølgende år. Bogen blev meget rost for den orden, klarhed og præcision der i høj grad prægede den.

Stillingen

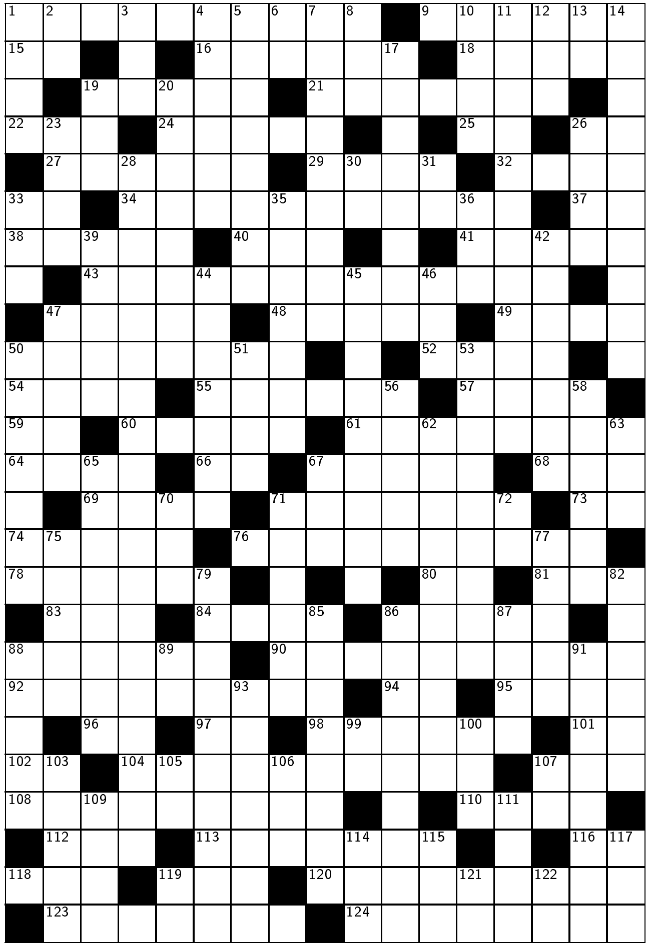
Selv Pave Benedict XIV skrev til Maria Gaetana Agnesi og roste hende for arbejdet med bogen. Det var også ham, der kort efter udpegede hende til et professorat ved Universitetet i Bologna. Maria Gaetana Agnesi modtog dog aldrig positionen. Hun hverken afslog eller accepterede stillingen og hendes navn stod i universitetets optegnelser i 45 år, men hun tog aldrig til Bologna. Hun hengav sig kort efter udgivelsen af bogen til et tilbagetrukket og religiøst liv. Hun talte dog stadig om videnskabelige emner, når hendes far bad hende om at deltage i samtalerne, men hun søgte ikke længere at lære eller formidle mere matematik. Da hendes far dødede i 1752, opgav hun også disse samtaler helt og hun koncentrerede sig om omfattende godgørende og humanitært arbejde, samt religiøse studier.

Vandret:

1: Overdrevent energisk
9: Fejl
15: Navn
16: Strømmer
18: Kue
19: Dans
21: Person
22: Ros
24: Forstærkende forstavelse
25: Motorskib
26: Antal måder at vælge to ud af fem grantræer uden hensyntagen til rækkefølge
27: Betingelser
29: Gement
32: Oplysninger
33: Mister
34: Ateistiske
37: Bakkeskråning og tillige et ord kun anvendt i krydsogtværser
38: Sande oplysninger
40: Nystartet
41: Af uregelmæssig beskaffenhed
43: Dokumentationen
47: Overhoved
48: Muse
49: Møbel
50: Uregerlig personage
52: Besættelse
54: Spise
55: Stat i fjernøsten
57: Kanon
59: Karakter samt forkortelse for et velkendt torsdagshegn
60: Navn
61: Spolere
64: Oversigt
66: Banachrumsforkortelse
67: Orienteret
68: Mindre slurk
69: Ole Lund Kirkegaard-hovedperson
71: Ørkenvind
73: $\lim_{n\to\infty}(1+1/2+1/4+\cdots+1/2^n)$
74: Stjernekigger-fornavn
76: Stille
78: Som har at gøre med synssansen
80: Fælleseuropæisk begivenhed
81: Retning
83: Skat
84: As
86: Størrelse
88: Organ
90: Potentiel regel
92: Lader hånt om
94: Organisation
95: Enhed
96: Grundstof
97: Dyr
98: Fugl
101: Mangan
102: Damp
104: Indretningen
107: Beskæftigelse
108: (Økonomisk) dokument
110: Hjælp
112: Naturfænomen
113: Samfundsgruppe
116: Klagesudråb
118: Varm
119: Funktion
120: Ynden
123: Slet skjulte
124: Klæde

Kryds & Tværs

Martin "Damskur" Damhus

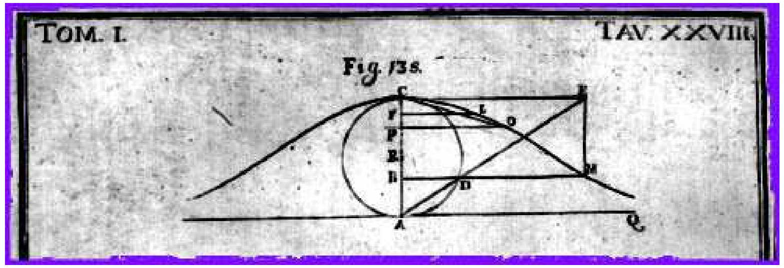


124, 78, 82 – 111, 13, 28 & 57, 41, 71, 5 – 86, 19, 104, 21, 17

Hun brugte alle sine penge til at starte et fattighjem, Pio Instituto Trivulzo, primært for gamle og syge kvinder, som hun blev bestyrer af. Det var også her hun selv dødede d. 9. januar 1799, i total fattigdom, da hun havde brugt alle sine penge på at forbedre livet for de fattige.

Witch of Agnesi

Maria Gaetana Agnesi's bog indeholdt som nævnt en lang række eksempler, der blev brugt til at illustrere teorierne. Blandt andet indeholdt bogen en diskussion af kurven der nu bliver betegnet som Witch of Agnesi, kurven kan med cartesiske koordinater skrives som $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ og blev originalt beskrevet af Fermat. Grunden til at den blev døbt *Witch of Agnesi* skal nok findes i at den blev kaldt ved det italienske ord versiera, der kom fra det latinske ord vertere, der betyder at dreje. Men ordet versiera var også en forkortelse af det italienske ord avversiera, der kan oversættes med djævlens kone. Så da den blev oversat til engelsk gik det galt for oversætteren og versiera blev til det engelske ord witch og kurven kom til at blive kendt under navnet *Witch of Agnesi*.



Litteraturliste

Victor J. Katz: A History of Mathematics, Addison-Wesley 1998
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Agnesi.html
http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/agnesi.htm

Perfekte grafer

Skipper Dinesen

"Den stærke perfekte graf sætning", kort betegnet STPGS, blev fremført som en formodning af den franske matematiker Claude Berge i 1961 som en konsekvens af grafteoretikeres interesse i at farvelægge grafer. Påstanden levede som en formodning indtil 2002 hvor den blev bevist af tre af grafteoriens kanoner, Neil Robertson, Robin Thomas og Paul Seymour samt sidstnævntes elev, Maria Chudnovsky. Det tog altså over 40 år at bevise påstanden og beviset er da også meget langt (over 150 sider) og uhyre kompliceret. Vi vil i denne note end ikke nærme os et bevis for sætningen. (Interesserede læsere kan finde et bevis i [4].)
I stedet skal vi se nogle eksempler på perfekte grafer og undervejs komme ind på "den svage perfekte graf sætning", SVPGS, der i blev fremført som formodning af Claude Berge sammen med formodningen om den stærke sætning. 10 år efter var denne formodning blevet til en sætning, beviset udarbejdet af ungareren Laszlo Lovász i 1971. Beviset er uhyre elegant og bygger på, at en graf er perfekt hvis og kun hvis et bestemt konvekst polytop har heltallige hjørner. Heller ikke dette bevis vil vi vise her, men for interesserede kan det læses i f.eks. [10]. Det kræver lidt matematisk "modenhed", men kan ellers læses af de fleste, der har beskæftiget sig med konveksitets- og grafteori.
Amerikaneren Delbert Ray Fulkerson havde i en årrække forsøgt at vise den svage perfekt graf sætning. Han var ganske tæt på målet, skulle det vise sig, da han i 1971 fejlagtigt kom til den konklusion, at formodningen var forkert. Han begyndte herefter at lede efter modeksempler, men kort efter modtog han beskeden om Lovász bevis og færdiggjorde herefter hurtigt sit eget bevis. Fulkerson havde et ustabilt sind og begik selvmord få år senere, men han nåede dog at anerkendte Lovarsz som "sejrherre", som kvitterede ved at kreditere Fulkerson for en stor andel i det endelige bevis.
Som nævnt vil vi ikke bevise hverken SVPGS eller STPGS. Men vi vil naturligvis opskrive begge sætninger og gennem nogle illustrative eksempler bevise (sådan da!) at fire simple klasser af grafer er perfekte. Men først skal vi lige fortælle lidt om hvad grafer er for noget.

Grundlæggende grafteoretiske begreber

En graf er et matematisk objekt bestående af *knuder* og *kanter*. Knuderne er elementer i en endelig mængde, som regel betegnet V, og kanterne angiver at der er en relation mellem visse par af elementer (altså knuder) i V. Knuder betegnes i

- Formelle deformationer af kommutative algebraer: Et eksempel er givet ved algebraen frembragt af størrelserne $(p, q, \hbar)$ med relationen $[p, q] = \hbar$, som vi begyndte med - men hvor $\hbar$ betragtes som en variabel istedet for et fast tal. Dette er en deformation af algebraen af funktioner i to kommuterende variable (p_0, q_0). Dissee opstår i differentialgeometri og fysik.
- Fourier-integral-operatorer: De kan anskues som løsninger til "evolutionsligningen" - altså givet en differentialoperator D, så

$$\partial_t f + Df = g \Longrightarrow f(t) = \Phi_t(f).$$

  Denne slags Φ_t har en geometrisk beskrivelse, der involverer Fourier-transformationen - derfor navnet Fourier-integral-operatorer.
- Riemann-Rochs sætning for $\mathcal{D}$-moduler. Vi skal nok lade være med at komme ind på, hvad dette egentlig betyder, så lad os bare nøjes med at sige at det giver os mulighed for at løse "indeksproblemer" for algebraiske ligninger (i modsætning til differentialligninger som ovenover.
- Sidst, men ikke mindst, konkrete C^*-algebraer, der bruges i forskellige sammenhænge - fx repræsentationsteori for grupper.

Vi kan nu skrive

$$\text{indeks}\, D = \text{Tr}(p) - \text{Tr}(q)$$

og tænker på den identitet som en beregning af værdien af en gruppehomomorfi

$$\text{Tr} : K_0(K(L^2(\mathbb{R})) \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

på et konkret element af K_0.

Hvad forsker jeg i?

Først det korte svar. Givet en konkret, naturligt forekommende algebra A, har vi følgende spørgsmål:

1. Hvad er $K_0(A)$?
2. Hvilke homomorfier
$$\phi : K_0(A) \to \mathbb{R}$$
har vi?
3. Hvilke værdier antager ϕ på naturligt forekommende elementer af $K_0(A)$?

Og så det lidt længere svar.

De ϕ'er, der kan erstatte det almindelige spor af en matrix, kaldes cykliske kocykler. De er givet som multilineære afbildinger

$$\phi : A \times A \times \ldots \times A \to \mathbb{C}$$

med følgende to egenskaber:

1. Cyklicitet:
$$\phi(a_0, \ldots a_n) = (-1)^{n+1} \phi(a_n, a_0, \ldots, a_{n-1}).$$
2. Kocykel-egenskaben:
$$\phi(a_0 a_1, a_2, \ldots a_{n+1}) - \phi(a_0, a_1 a_2, \ldots, a_{n+1}) \\ \pm \ldots + (-1)^{n+1} \phi(a_{n+1} a_0, a_2, \ldots a_n) = 0.$$

De cykliske kocykler udgør et vektorrum, der kaldes den cykliske kohomologi af A, og betegnes med $HC_*(A)$. Deres værdier på projektionsklasser gives ved

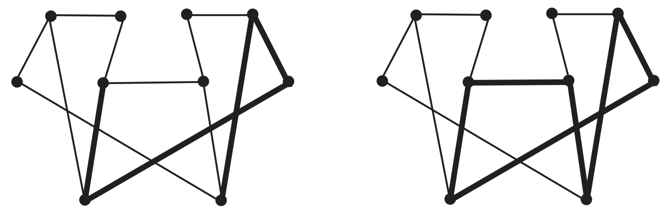
$$< \phi, [p] >= \phi(p, p, \ldots, p).$$

I modsætning til K-teorien, er HC^* til at beregne ved homologiske metoder, og i de fleste geometriske situationer, eller anvendelser i matematisk fysik, dukker der nogle naturlige cykliske kocykler op, der beskriver interesante størrelser.

De algebraer, der er af interesse, opstår i følgende situationer:

- (Pseudo)differentialoperatorer: Disse har forbindelse til både indeks af differentialoperatorer og i geometri for mangfoldigheder.

regelen v og kanter betegnes e. Mængden af kanter betegnes E og ved et element $e \in E$ forstås en to-punktmængde fra V, $e = \{v_1, v_2\}, v_1, v_2 \in V$, i korthed blot skrevet $e = v_1 v_2$. Vi siger at v_1 og v_2 er forbundet af kanten $e = v_1 v_2$. Samlet skrives $G = (V, E)$ for en graf G med knudemængde V og kantmængde E.
En *vej* i en graf $G = (V, E)$ er en følge $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1} e_n, v_n$ af knuder v_i og forskellige kanter $e_j = v_{j-1} v_j$ fra henholdsvis V og E. En vej hvor $v_0 = v_n$ kaldes en *kreds* hvis $n \geq 3$. En *chorde* i en kreds er en kant som ikke er indeholdt i kredsen, men hvis endepunkter er (se figur 4).

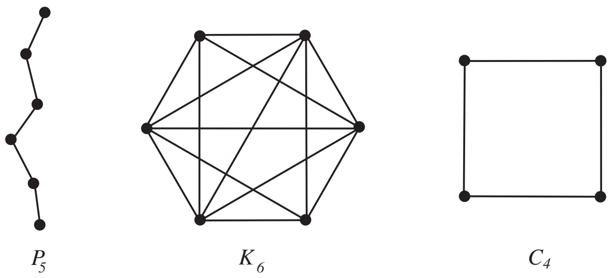


Figur 1: En vej og en kreds.

Visse grafer har specielle kendetegn og strukturer, der giver dem deres egne navne og betegnelser. I den *komplette graf* betegnet K_n er $|V| = n$, og alle n knuder er indbyrdes forbundet. En graf der blot er en vej på m kanter (og $m + 1$ knuder) betegnes P_m og en graf hvor knuder og kanter præcis udgør en kreds på m kanter betegnes C_m.
Grafteori er en anvendelsesorienteret disciplin. Til løsning af praktiske formål kan knudemængden f.eks. være en samling af trafikknudepunkter som jernbanestationer eller broer. Men det kan også være andre ting, f.eks. fabrikker og afsætningsmarkeder. I dette tilfælde har vi typisk en *orienteret graf* - men det vil vi ikke komme videre ind på her.

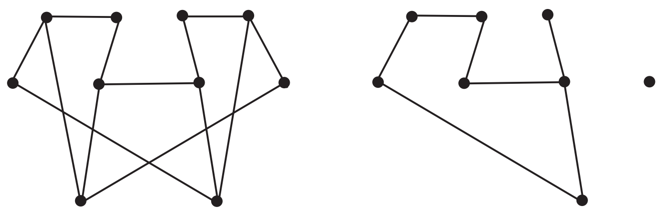
Perfekte grafer

En knudefarvning af en graf er farvelægning af hver knude i knudemængden V således, at hvis to knuder er forbundet af en kant, så skal de tildeles forskellige farver. Det mindste antal farver der skal bruges til sådan en farvning af en graf G kaldes *det knudekromatiske tal* og betegnes $\chi(G)$.
Ligeledes er en kantfarvning en farvelægning af kanterne, hvor kanter opbundet til samme knude tildeles forskellige farver. Det mindste antal farver, der skal bruges til en kantfarvning af en graf G kaldes *det kantkromatiske tal* og betegnes $\chi_e(G)$.
Ved en *klike* i G forstår vi en delmængde $K \subseteq V$ af parvis forbunde knuder. Antallet af knuder i den største klike kaldes *kliketallet* for G og betegnes $\omega(G)$.



Figur 2: Tre grafer.

Da samtlige knuder i en klike K er forbundne, skal vi altså til en farvning af K bruge mindst $|K|$ farver. Vi ser derfor middelbart, at $\chi(G) \geq \omega(G)$ for enhver graf G.
En induceret delgraf H opstår fra $G = (V, E)$ ved at man fjerner et antal (evt. 0) knuder fra V og samtlige kanter opbundet til disse knuder.



Figur 3: En graf og en induceret delgraf. En knude står nu isoleret og grafen er ikke længere *sammenhængende*.

Vi har nu terminologi til at kunne definere *perfekte grafer*.

Definition 1. *En perfekt graf er en graf hvor*

$$\chi(H) = \omega(H) \tag{1}$$

for enhver induceret delgraf H af G.

G er altså perfekt hvis $\chi(G) = \omega(G)$ og denne ulighed holder ligemeget hvor mange og hvilke knuder man fjerner, sålænge de resterende blot bibeholder deres tilknyttede kanter.
STPGS som vi opskriver i et senere afsnit giver en komplet klassifikation af perfekte grafer. Indtil da vil vi se på en anvendelse og nogle eksempler.

på et passende underrum. To projektioner p og q siges at være ækvivalente, hvis der findes to elementer u og v i A så

$$p = uv \text{ og } q = vu.$$

Vi skriver $[p] = [q]$. Eksempelvis vil to ortogonale projektioner på endeligdimensionale underrum af et givet Hilbertrum, H, være ækvivalente i $K(H)$, hvis og kun hvis dimensionerne af deres billedrum er ens.

Ud af ækvivalensklasserne af projektioner dannes en abelsk gruppe, $K_0(A)$ - den lige K-kohomologi gruppe af A. Denne viser sig at være en af de vigtigste invarianter for A, allerede i det kommutative tilfælde.

Indekssætninger

Et godt eksempel er følgende. Lad $D = a(x)\frac{d}{dx} + b(x)$ være en differentialoperator på $\mathbb{R}$ og lad $D^* = -\frac{d}{dx}\overline{a(x)} + \overline{b(x)}$. Vi er intereseret i løsningerne på ligninger af formen

$$Df = g.$$

Under nogle enkle betingelser på funktionerne a og b, vil følgende to rum af kvadratisk integrable funktioner på $\mathbb{R}$ være endeligdimensionale:

$$\ker D = \{f \mid Df = 0\}; \operatorname{coker} D = \ker D^*.$$

Det oplagte problem er nu at finde

$$\dim(\ker D) - \dim(\operatorname{coker} D)$$

og dette vel at mærke uden at finde den eksplicitte løsning til $Df = g$!

Det (hel-)tal, som står påvenstre side, kaldes for *indekset* af D, og en løsning på problemet er givet i *Atiyah-Singers Indekssætning*. Da formuleringen af denne sætning kræver forarbejde, vil den udelades her. Den kaldes ofte et af de vigtigste resultater i det tyvende århundredes matematik, og det var på grund af den sætning, Atiyah og Singer vandt årets Abel-pris.

Men lad os dog omformulere os lidt. Først, givet et Hilbertrum H og et endeligdimensional underrum $V \subset H$, lader vi p betegne den ortogonale projektion på V. Da gælder

$$\dim V = \operatorname{Tr} p,$$

hvor Tr er det sædvenlige spor - dvs. summen af de diagonale elementer i den matrix der udtrykker p i en given ortonormalbasis.

Lad p og q være projektioner på henholdsvis $\ker D$ og $\operatorname{coker} D$, givet som ovenfor. Da de er endeligdimensionale, sidder de begge i $K(L^2(\mathbb{R}))$ - de kompakte operatorer påHilbertrummet af kvadratisk integrable funktioner på $\mathbb{R}$. Det betyder at

$$[p] - [q] \in K_0(K(L^2(\mathbb{R})).$$

ganske som vores etpunktsmængde $X/\sim$. Men på samme måde som vi har kunnet erstatte $X/\sim$ med en den Moritaækvivalente algebra $M_2(\mathbb{C})$, kan vi erstatte vores "intuitiv forståelse" af kvotienten $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ med en pæn C^*-algebra som løst sagt har følgende elementer:

- som analog til diagonale matricer, de kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$;
- som analog til de ikke-diagonale matrixenheder, translationer med rationale tal.

Denne konstruktion hedder "krydsprodukt", $\mathbb{Q} \ltimes C_0(\mathbb{R})$. Ideen er, at $\mathbb{Q} \ltimes C_0(\mathbb{R})$ består af (visse) summer på formen

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}} c_q \lambda(q)$$

hvor c_q'erne er kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$ og, for en vilkårlig funktion f på $\mathbb{R}$ og $q \in \mathbb{Q}$ gælder følgende kommutationsrelation:

$$(\lambda_q f \lambda_{-q})(x) = f(x-q).$$

Det er vigtigt hér at bemærke, at i analogi med de endelige matricer, kan vi let konstruere naturligt forekommende tripler af formen

$$(\mathbb{Q} \ltimes C_0(\mathbb{R}), H, D),$$

og dette eksempel - i let modificeret udgave - optræder faktisk i forbindelse med talteori.

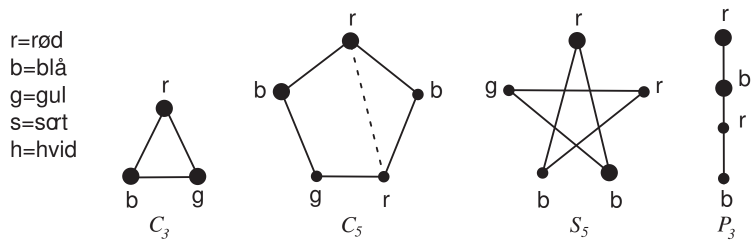
Topologiske invarianter

Triplerne (A, H, D) kan udstyres med en ækvivalensrelation, på en sådan måde at ækvivalensklasserne udgør en abelsk gruppe af "homotopi-invarianter" for A - dens K-homologi $K^1(A)$. Det bliver lidt for teknisk at komme ind på hvad der hér forstås ved homotopi, men i det abelske tilfælde, med $A = C(X)$ for et kompakt Hausdorff-rum X, er $K^1(X)$ invariant under kontinuerte deformationer af X. Hér er det nok påsin plads, at nævne at gruppen først blev konstrueret for de ikke-kommutative algebraer.

En anden topologisk invariant er givet ved ækvivalensklasser af projektioner. En projektion er et element $p \in A$ som opfylder

$$p^2 = p = p^*.$$

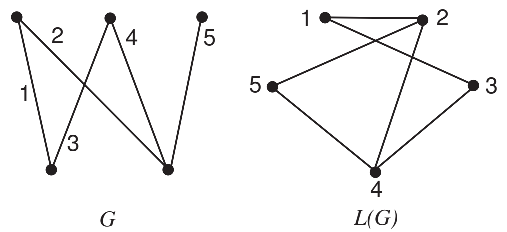
Hvert gang A repræsenteres som en konkret algebra af operatorer på et Hilbert-rum, vil en projektion blive repræsenteret som en ortogonalprojektion



Figur 4: Graferne $K_3 = C_3, C_5, S_5$ (med en chorde markeret med stiplet) og P_3 med største kliker markeret med fed og knudefarvninger indskrevet ved knuderne. C_3 er tydeligvis selv en klike, spcielt af størrelse 3. Altså er $\chi(C_3) = \omega(C_3) = 3$. C_3 er tydeligvis perfekt. Da $\chi(C_5) = 3 > 2 = \omega(C_5)$ er C_5 ikke perfekt. S_5 er heller ikke perfekt da $\chi(S_5) = 3 > 2 = \omega(S_5)$. Det er nemt at se at enhver vej er perfekt, her P_3.

Svage perfekt graf sætning og eksempler på perfekte grafer

En graf $G = (V, E)$ kaldes todelt hvis knudemængden V kan opsplittes i to disjunkte mængder, V_1 og V_2, på en sådan måde at hver kant i E forbinder en knude i V_1 med en knude i V_2, altså $E \subseteq \{vv' | v \in V_1, v' \in V_2\}$. Det ses, at en graf G er todelt hvis og kun hvis $\chi(G) = 2$. Det er klart at $\chi(H) \leq \chi(G)$ for enhver induceret delgraf H af G. Specielt er $\chi(H) \leq 2$ hvis G er en todelt graf. Todelte grafer er altså et simpelt eksempel på en hel klasse af perfekte grafer.



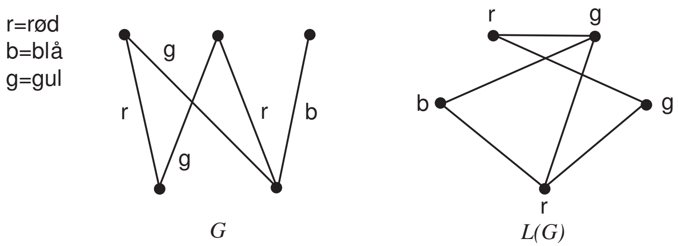
Figur 5: En todelt graf og dens kantgraf. Nummerering af kanter i G modsvarer nummerering af knuder i $L(G)$.

Med afsæt i todelte grafer kan vi hurtigt konstruere flere klasser af perfekte grafer. Kantgrafen, $L(G)$, for en graf $G = (V, E)$ er grafen med knudemængde E og hvor $e, e' \in E$ er forbundne knuder i $L(G)$ hvis de deler et endepunkt i G. Med symboler

er $L(G) = (E, \{ee' \mid e, e' \in E, e \cap e' \neq \varnothing\})$.
Det har længe været kendt, at kantgrafen $L(G)$ for en todelt graf G er perfekt. For at indse dette, skal vi checke, at $\chi(H') = \omega(H')$ for enhver induceret delgraf H' af $L(G)$. Men enhver induceret delgraf H' af $L(G)$ er kantgraf for en passende delgraf G' af G, så da G' naturligvis er todelt, er det nok at vise at $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$.
Først er det klart, at hvis $G = (V, E)$ er en (todelt) graf med kantgraf $L(G) = (V', E')$, så er

$$\chi_e(G) = \chi(L(G)). \tag{2}$$

Parantesen ovenfor antyder, at (2) holder for en hvilken som helst graf G.



Figur 6: $\chi_e(G) = \chi(L(G))$.

I en graf $G = (V, E)$ betegner *knudevalensen*, $\deg_G(v)$, antallet af kanter, der har v som endepunkt. Den maksimale knudevalens af knuder i V betegnes $\Delta(G)$. Se tegningen nedenfor.
Der er en konstrueret 1-1 forbindelse mellem de kanter i E, der deler et endepunkt $v \in V$, og de inbyrdes forbundne knuder i $V'(= E)$: Da en kreds i en todelt graf altid indeholder mindst fire kanter, er enhver klike K i $L(G)$ på formen $K = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}\}$ hvor $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$, betragtet som kanter i E, har eet fælles endepunkt fra V. Med andre ord, et sæt af kanter fra E deler et endepunkt, $v \in V$, netop hvis de er indbyrdes forbunde knuder i V'. De indbyrdes forbundne knuder i V' er netop klikerne i $L(G)$, så vi slutter at

$$\omega(L(G)) = \Delta(G) \tag{3}$$

for enhver todelt graf G. For en vilkårlig graf G kan der derimod hænde, at $\Delta(G) < \omega(L(G))$. Ifølge en klassisk grafteoretisk sætning (af König) er

$$\chi_e(G) = \Delta(G), \tag{4}$$

for enhver todelt graf G. Beviset for denne påstand kan findes i enhver lærebog om grafteori og kombinatorik, f.eks. [3]. Bemærk at $\chi_e(K_3) = 3 > 2 = \Delta(K_3)$. Sammenholdt er

$$\chi(L(G)) = \chi_e(G) = \Delta(G) = \omega(L(G)), \tag{5}$$

Definition 1. *Givet en C^*-algebra A repræsenteret på et Hilbertrum H, og en (selvadjungeret) operator D på H, har vi følgende "afstandsbegreb". For to kontinuerte lineare funktionaler $\phi_i : A \to \mathbb{C}$, som tillige er normaliserede, dvs. $\phi_i(1) = 1$, og positive, dvs. $\phi_i(a^*a) \geq 0$ for alle $a \in A$, vil afstanden mellem ϕ_1 og ϕ_2 være givet ved*

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup\{|\phi_1(a) - \phi_2(a)| \mid ||[D, a]|| \leq 1\}.$$

En sådan trippel, (A, H, D), kaldes en spektral trippel.

I vores eksempel med topunktsmængden, angiver punktet P en lineær funktional $\phi_P : f \mapsto f(P)$, og tilsvarende for Q, og vi har

$$d(\phi_P, \phi_Q) = l^{-1}.$$

Vi har altså "konstrueret en metrik" på X, som giver den diameter l^{-1}. Men vi kan stille og roligt gå videre og udvide den til en "metrik" på det ikke-kommutative rum $M_2(\mathbb{C})$ ved at bruge præcis den samme formel!

Inden vi begynder at konkludere, vil vi lige se lidt mere på algebraer som $M_N(\mathbb{C})$. Hvis vi er villige til at acceptere (hvad man tit gør i algebra), at $M_N(\mathbb{C})$ er bestemt ved dens repræsentationer, så er der ikke den store forskel mellem $\mathbb{C}$ og $M_N(\mathbb{C})$. Alle representationer af $\mathbb{C}$ er i form af konstante matricer

$$\mathbb{C} \ni \lambda \to \lambda I_k = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

på $\mathbb{C}^k$, mens alle representationer af $M_N(\mathbb{C})$ er i form af blokdiagonaler

$$M_N(\mathbb{C}) \ni a \to \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & a & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix}$$

på $(\mathbb{C}^N)^k$. Man siger at de to algebra er *Morita-ækvivalente*. Dette betyder, at der ikke er megen forskel mellem to punkter som er identificeret, dvs.

$$X/\sim = \{P, Q\}/\{P = Q\}$$

og 2×2-matricerne $M_2(\mathbb{C})$. Men, som vi har set ovenfor, er det nemt at give $M_2(\mathbb{C})$ en metrik, mens $X/\sim$ er en etpunktsmængde, og dermed ikke har nogen videre struktur.

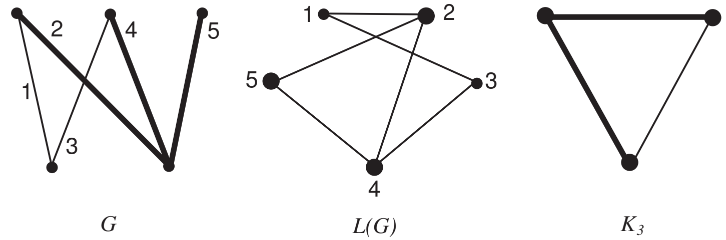
Det vi har lavet ovenfor, er lidt af en leg. Men lad os nu vende tilbage til det sære kvotientrum $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Den har ingen ikke-konstante kontinuerte funktioner,

1. Ikke-Hausdorff-topologiske rum - noget som optræder meget tit i naturen. Det hurtigste eksempel er
$$\mathbb{R}/\mathbb{Q},$$
som ikke er Hausdorff - faktisk er de eneste kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$, som er invariante under translationecr med rationale tal, konstante.
2. Topologiske invarianter - såsom (ko)homologi-grupper, der normalt defineres ved at man studerer kombinatoriske egenskaber ved den måde et topologisk rum kan opbygges af enkle elementer, fx flerdimensionale kuber, $[0,1]^n$. Det problem, der opstår her, er meget enkelt. En kontinuert afbilding
$$\phi : [0,1]^n \to X$$
kan beskrives ved den tilsvarende afbilding ($*$-homomorfi) på funktionsniveau
$$C(X) \ni f \mapsto f \circ \phi \in C([0,1]^n).$$
Dermed kan vi eksempelvis angive et punkt, $x \in X$, ved $*$-homomorfien
$$f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$$
Men da $\mathbb{T}_\theta$ er som nævnt er simpel, har den ingen $*$-homomorfier ind i $\mathbb{C}$, så som rum betragtet, har den ingen punkter!

Geometri

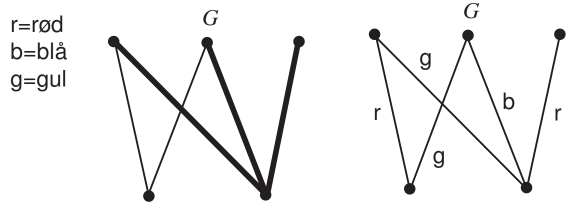
Hvordan opstår dette i den ikke-kommutative verden?

Ideen er meget enkel, og vi vil gennemgå et eksempel. Lad $X = \{P, Q\}$ være en topunktsmængde med diskret topologi. En kontinuert funktion på X er givet ved et par tal, $(f(P), f(Q))$. Vi vil repræsentere $C(X)$ på det to-dimensionale Hilbertrum $\mathbb{C}^2$ med følgende $*$-homomorfi:
$$f \to \begin{pmatrix} f(P) & 0 \\ 0 & f(Q) \end{pmatrix}.$$
Lad nu D være den følgende matrix:
$$\begin{pmatrix} 0 & l \\ l & 0 \end{pmatrix}.$$
Vi bemærker at
$$[D,f] = Df - fD = l(f(P) - f(Q)) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og } |||[D,f]||| = l|f(P) - f(Q)|.$$
Dermed har vi
$$l^{-1} = \sup\{|f(P) - f(Q)| \mid |||[D,f]||| \leq 1\}.$$
Dette kan bruges som en definition!



Figur 7: Til venstre: En todelt graf, hvor kanter opbundet til en knude med maksimal knudevalens er markeret med fed. I midten: Den tilhørende kantgraf. Kliken svarende til kanterne 2,,4,5 er markeret. Det er en maksimal klike i $L(G)$. Til højre: $L(K_3) = K_3$ og (3) gælder derfor ikke for K_3: $\omega(K_3) = 3 > 2 = \Delta(K_3)$.

hvorfor kantgrafen for en todelt graf er perfekt.



Figur 8: $\Delta(G) = \chi_e(G)$ når G er todelt.

Komplementærgrafen G^c til en graf $G = (V, E)$ har knudemængde V, men to knuder er forbundet af en kant i G^c netop når de ikke er forbundne i G. Ved at etablere en række identiteter svarende til (2), (3) og (4) får man vist, at hvis G er en todelt graf med kantgraf $L(G)$, så er komplementærgraferne G^c og $L(G)^c$ også perfekte. De afgørende argumenter er dog en smule sværere end vi så dem ovenfor. Vi vil ikke gøre mere ud af dét - resultatet er alligevel indeholdt i SVPGS som vi opskriver her:

Sætning 1 (Den svage perfekte graf sætning)**.** *En graf er perfekt hvis og kun hvis dens komplement er perfekt.*

Den stærke perfekte graf sætning

Den stærke perfekte graf sætning giver en komplet klassifikation af perfekte grafer. På den næste halve side giver vi "en halv klassifikation" - den anden halvdel fylder over 150 sider.
En chordefri kreds af længde større end 3 kaldes et *hul* og komplementet til et hul kaldes et *antihul*. C_5 og S_5 fra figur 4 er eksempler på et hul henholdsvis et antihul. Hvis vi (lidt kritisabelt) siger, at i et hul er hver knude v knyttet til to naboer, så er er v, opfattet som knude i et antihul, knyttet til alle andre knuder end sine to naboer.
Vi så at C_5 ikke er en perfekt graf. Indtegner vi derimod den stiplede chorde fremkommer tydeligvis en perfekt graf. Mere generelt ser vi, at hvis G er et ulige hul, dvs. af ulige længde, er

$$\chi(G) = 3 > 2 = \omega(G), \tag{6}$$

hvilket betyder, at hvis G er et hul, så er G ikke perfekt. Når G er et ulige antihul på $2k+1 > 3$ knuder har vi

$$\chi(G) = k+1 > k = \omega(G) \tag{7}$$

og en perfekt graf indeholder derfor ikke huller og antihuller af ulige længde som inducerede delgrafer. Vi har altså nemt en forudsætning for at en graf G er perfekt: Hvis G er perfekt har ethvert hul og ethvert antihul i G lige længde. Vi slutter dette afsnit med den stærke perfekte graf sætning, der siger at implikationen også gælder den anden vej, altså at en graf uden ulige huller og ulige antihuller er perfekt.

Sætning 2 (Den stærke perfekte graf sætning)**.** *En graf G er perfekt hvis og kun hvis G ikke indeholder et ulige hul og ikke indeholder et ulige antihul.*

Når vi siger, at en perfekt graf ikke indeholder et ulige hul eller et ulige antihul mener vi naturligvis underforstået som induceret delgraf.

Med STPGS ved vi præcis hvordan de perfekte grafer ser ud. Derimod vides det ikke (af forfatteren) om der findes en algoritme, der i polynomiel tid kan afgøre om en forelagt graf indeholder huller eller antihuller af ulige længde.

Afsluttende bemærkninger

Hvis man kunne have interesse i at vide lidt mere om perfekte grafer, kan det anbefales af følge indledende kurser i diskret matematik og kombinatorik. Forfatteren af denne note er gammel i gårde og er derfor ikke særlig godt bekendt med den nye studieordning, men de tidligere kurser "Mat DM" og "Mat XX" gav begge en god indføring i grafteori. Vil man videre med emnet er det en god ide

Det første ikke-endeligdimensionale eksempel (når vi ser bort fra $B(H)$) er algebraen $K(H)$ af alle kompakte operatorer på et uendeligdimensionalt Hilbertrum H - dvs.alle de operatorer, der kan approksimeres (i norm) med operatorer af endelig rang (dvs. som lever på et endeligdimensionalt underrum). Denne algebra er vigtig nok til at blive kaldt den "elementære" C^*-algebra.

Og lad os så tage endnu et eksempel. Den såkaldte ikke-kommutative torus, $\mathbb{T}_\theta$, er en C*-algebra, der frembringes af to unitære operatorer på et Hilbert rum, U og V, der opfylder relationen

$$UV = \exp 2\pi i\theta VU$$

for et *ikke-rationalt* $\theta \in \mathbb{R}$. Den beskriver en elektron, der bevæger sig i et todimensionalt gitter i et tværrettet magnetisk felt. Da dette eksempel vil dukke op flere gange, vil vi lige nævne visse af dens egenskaber.

Sætning 1. *$\mathbb{T}_\theta$ er simpel, dvs. givet en vilkårlig $C*$-algebra A, vil enhver en kontinuert, ikke-triviel $*$-homomorfi*

$$\Phi : \mathbb{T}_\theta \to A$$

være injektiv. At Φ er en $*$-homomorfi betyder at den er lineær og opfylder

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b),\ \ \Phi(a^*) = (\Phi(a))^*.$$

$\mathbb{T}_\theta$ har et entydigt (normaliseret) spor, dvs. en linear afbilding

$$\tau : \mathbb{T}_\theta \to \mathbb{C}$$

som opfylder $\tau(1) = 1$ og $\tau(ab) = \tau(ba)$.
Givet en unitær repræsentation af $\mathbb{T}_\theta$, altså en $*$-homomorfi

$$\Phi : \mathbb{T}_\theta \to B(H),$$

vil dens billedmængde, $\Phi(\mathbb{T}_\theta)$, aldrig indeholde kompakte operatorer forskellige fra 0.

Inden vi går videre, vil vi lige klare det *kommutative* tilfælde (Spektralsætningen for begrænsede operatorer):

Sætning 2. *En kommutativ C^*-algebra med enhed er isomorf med algebraen af kontinuerte, komplekse funktioner på et kompakt Hausdorff-rum.*

Baseret på ovenstående resultat plejer man at sige at en C^*-algebra beskriver et "ikke-kommutativt topologisk rum". Der er nogle ting som mangler, dog. En delvis liste er:

Den ikke-kommutative verden

Ryszard Nest

Lidt historie

Historien begynder samtidig med det tyvende århundrede, med opdagelse af de sære fænomener i mikrokosmos, såsom spektra af atomer og molekyler, den fotoelektriske effekt, superledende materialer og meget andet. Mens disse alle hører til indenfor fysikens domæne, var der et rent matematisk fænomen, der viste sig til at ligge bag dem alle - ikke-kommuterende variable. Heisenberg udtrykte det i den for kvantemekanikken grundliggende ligning

$$[p, q] = pq - qp = \hbar,$$

hvor p er momentet for en partikel, q er beliggenheden, og $\hbar$ er en universal konstant - Plancks konstant.

Fra et rent matematisk synspunkt, er der Schrödinger-modellen for disse relationer, givet ved

$$p = \hbar\frac{d}{dx}, \ q = \text{multiplikation med } x,$$

hvor $\hbar\frac{d}{dx}$ og multiplikation med x virker på et rum af $C^\infty(\mathbb{R})$-funktioner udtrykt i variablen x. Der er også en diskret model, hvor p og q er givet ved to uendelige matricer.

Af det ovenstående kan bl.a. konkluderes, at de naturlige algebraer, der optræder i beskrivelse af naturen er *ikke-kommutative*, altså ligesom $n \times n$ matricerne, $M_n(\mathbb{C})$, eller algebraen af begrænsede operatorer, $B(H)$, på et Hilbertrum H.

Det umiddelbare næste skridt er at se på delalgebraer af disse. Af tekniske grunde kræver vi at disse delalgebraer er afsluttet mht. operatornorm og, hvad der er endnu vigtigere mere vigtigt, lukket under konjugering; $T \mapsto T^*$. De algebraer, vi ender med, kaldes for C^*-algebraer. Det simpleste eksempel er de komplekse tal $\mathbb{C}$, hvor topologien er givet ved absolut værdi, $z \mapsto |z|$, og konjugering ved den komplekse konjugering $z \mapsto z^* = \overline{z}$. Det (meget) lidt mere avancerede eksempel er $M_n(\mathbb{C})$, hvor adjungeringen er den sædvanlige "transponering og konjugering":

$$a = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \mapsto \{\overline{a}_{ji}\}_{i,j=1,\ldots,n} = a^*$$

Dette eksempel er det samme som $B(H)$, hvor vi lader H være det endeligdimensionale Hilbertrum $\mathbb{C}^n$.

(faktisk nødvendig) at beskæftige sig lidt med kombinatorisk optimering og konveksitetsteori.
Beviset for at todelte grafer, deres kantgrafer og begges komplementærgrafer er perfekte kan vel klares inden for rammerne af et rimeligt bachelorprojekt (men det kræver at man på forhånd er fortrolig med grafteori og optimering). Beviset for SVPGS er væsentligt sværere, men kan f.eks. være indeholdt i et fagprojekt på overbygningsuddannelsen.

Litteraturliste

[1] Bhogle, Srinivas: Claude Berge. Current Science, vol 83, 2002.
[2] Billera, Louis og Lucas, William: Delbert Ray Fulkerson. Mathematical Programming Study 8. North-Holland Publishing Company, 1978.
[3] Bryan, Victor: Aspects of Combinatorics - A Wideranging Introduction. Cambridge University Press, 1992.
[4] Chudnovsky, Maria; Seymour, Poul; Thomas, Robin og Robertson, Neil: The strong Perfect Graph Theorem, Manuscript, http://www.math.gatech.edu./ thomas/spgc/html
[5] Cook, William: Combinatoral Optimization. Wiley, 1998.
[6] Cornuéjols, Gerard: Combinatorial Optimization - Packing and Covering. SIAM 2001
[7] Fulkerson, Delbert Ray: On the Perfect Graph Theorem. College of Engineering, Cornell University, 1973.
[8] Mackenzie, Dana: Graph Theory Uncovers the Roots of Perfection. Science, vol 297, 2002.
[9] Matousek, Jiri og Nesetril, Jaroslav: Invitation to Discrete Mathematics. Oxford University Press, 1998.
[10] Thomas, Robin: Lectures by Robin Thomas - Written down by his Students. Department of Mathematics, Georgia Institute of Technology, 2003.