Ligefordelte følger i $[0,1]^k$ med anvendelser

Kenneth Valbjørn Rasmussen

I denne artikel præsenteres et fundamentalt resultat omhandlende *ligefordelte følger* i den k-dimensionale enhedskasse $[0,1]^k$ der normalt er kendt som en variant af *Weyls ligefordelingskriterium*. Endvidere præsenteres to problemer til hvis løsning dette resultat viser sig nyttigt. Så vidt det er mig bekendt har ingen af disse to problemer tidligere været løst. Inspirationen til det arbejde der fremlægges i det følgende stammer fra [1] - en bog der bestemt kan anbefales.

For at opildne lidt interesse vil jeg starte med at præsentere de to (stadig) uløste problemer, der inspirerede mig til det følgende.

Lad $x \in \mathbb{R}$. Vi betegner med $\lfloor x \rfloor$ *heltalsdelen* af x, altså det største hele tal mindre end eller lig med x. Betegn med $\{x\}$ den *brudne* del af x som vi kan definere ved ligningen

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Det er ikke svært at se at dette definerer $\{\cdot\}$ entydigt.

Som det er gjort i en margennote på s. 514 i [1], kan man opstille følgende problem (her omformuleret en smule):

Problem 1 *(stadig delvist uløst) Antag at $\alpha, \beta \in]0,1[$. Under hvilke omstændigheder er det ud fra følgen*

$$\big(\lfloor n\alpha \rfloor + \lfloor n\beta \rfloor\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor + \lfloor 3\beta \rfloor, \dots\big) \tag{2}$$

muligt at bestemme α og β.

At man lige præcis kræver at $\alpha, \beta \in]0,1[$ har selvfølgelig en forhistorie som dog springes over (overvej evt. selv eller se [1]). Lad os først se på hvad det egentlig er, der bliver spurgt om. Vælger vi $\alpha \in \mathbb{R}$ og blot betragter følgen

$$(\lfloor n\alpha \rfloor)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \dots\big),$$

er det ikke svært at finde α idet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\lfloor n\alpha \rfloor = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(n\alpha - \{n\alpha\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} n\alpha - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{n\alpha\} = \alpha$$

da $\{n\alpha\} \in [0,1[$. Samme metode virker ikke umiddelbart i tilfældet problem 1. Vi har

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\lfloor n\alpha \rfloor + \lfloor n\beta \rfloor) = \alpha + \beta$$

hvilket jo ikke siger meget. Det ses at der skal lidt mere arbejde og eventuelt nogle forudsætninger på værdierne af α og β for at løse problem 1. Et taleksempel er på sin plads: Vi har for eksempel

$$(\lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/3 \rfloor)_{n \geq 0} = (0, 0, 1, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 7, \dots)$$

hvor vi altså har sat $\alpha := \frac{1}{2}$ og $\beta := \frac{1}{3}$ i udtrykket (2). Det er klart at følger på denne form er voksende heltalsfølger, og det ser ud til at vi smider forbløffende megen information om α og β væk under dannelsen af disse følger. Derfor er problem 1 interessant.

I samme stil kan vi opstille den næste inspirationskilde fundet i [1] s. 101:

Problem 2 *(stadig delvist uløst) Antag at $\alpha, \beta \in]0, \infty[$. Under hvilke omstændigheder er det ud fra følgen*

$$\big(\lfloor \alpha \lfloor n\beta \rfloor \rfloor\big)_{n \in \mathbb{N}} = \big(\lfloor \alpha \lfloor \beta \rfloor \rfloor, \lfloor \alpha \lfloor 2\beta \rfloor \rfloor, \lfloor \alpha \lfloor 3\beta \rfloor \rfloor, \dots\big) \tag{3}$$

muligt at bestemme α og β.

På samme måde som i tilfældet problem 1 er det umiddelbart klart at følger på formen (3) er voksende heltalsfølger. Også i dette tilfælde ser det ud til at megen information om α og β går tabt i dannelsesprocessen.

Ligefordelte følger i $[0, 1]^k$

Først skal et par begreber på plads. Vi kan betragte $\mathbb{R}$ som et vektorrum over $\mathbb{Q}$. Ethvert tal kan dermed ses som en vektor som vi kan gange med et rationalt tal, og ikke mindst kan vi lægge dem sammen på sædvanlig vis. Bruger vi standard-terminologien fra lineær algebra siges tallene $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ at være *lineært uafhængige* over $\mathbb{Q}$ hvis der for alle $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Q}$ gælder

$$p_1\alpha_1 + \cdots + p_k\alpha_k = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\} : p_i = 0,$$

Følgende definition er taget fra [3] (dog lettere omformuleret).

Definition 1. *En følge $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $[0, 1]^k$ siges at være ligefordelt hvis der for alle $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ med $0 \leq a_j < b_j \leq 1$, $j = 1, \dots, k$, gælder at*[1]

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} 1_{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]}(\sigma_n) = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k). \tag{4}$$

Intuitivt kan vi sige at "andelen" af punkter fra (σ_n) der er indeholdt i kassen $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ i grænsen netop er lig kassens k-dimensionale volumen for enhver k-dimensional kasse i $[0, 1]^k$.

[1] 1_A betegner i det følgende indikatorfunktionen for A, altså funktionen der er 1 på A og 0 udenfor.

At sådanne følger overhovedet findes er slet ikke umiddelbart klart. Xingping Sun har dog i [3] vist at der gælder

Sætning 1. *Lad* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ *og antag at* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ *og 1 er lineært uafhængige over* $\mathbb{Q}$. *Da er følgen*

$$\big(\{n\alpha\}\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\{n\alpha_1\}, \dots, \{n\alpha_k\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

ligefordelt i $[0,1]^k$.

Xingping Sun viser ovenstående sætning ved brug af det der kaldes *Weyls ligefordelingskriterium* (se [4]), men den kan også vises mere direkte, omend mere besværligt.

Vi er også nødt til at overbevise os om, at der overhovedet findes $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ opfyldende $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ og 1 er lineært uafhængige over $\mathbb{Q}$. Definér mængden

$$D_k := \Big\{\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq]0,1[\,\Big|\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ og 1 er lineært uafhængige over } \mathbb{Q}\Big\}$$

og mængden

$$O_k := \Big\{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R} \,\Big|\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ og 1 er lineært uafhængige over } \mathbb{Q}\Big\}.$$

Begge disse mængder er meget store. Idet jeg minder om at en mængde X kaldes *overtællelig* hvis der *ikke* findes en injektiv afbildning $f : X \to \mathbb{N}$ har vi

Sætning 2. *Mængderne* D_k *og* O_k *er begge overtællelige.*

Sætningen kan vises ved brug af en række af Cantors sætninger om *kardinalitet* (størrelse, mægtighed) af $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ - se f.eks. [2]. Dette er ikke svært og overlades til læseren.

Til brug i anvendelserne i det følgende præsenteres nu en anden version af sætning 2 ovenfor. Igen overlades beviset til læseren idet det noteres at dette er en standardanvendelse af definitionen af Riemann-integrabilitet.

Sætning 3. *Lad* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ *og antag at* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ *og 1 er lineært uafhængige over* $\mathbb{Q}$. *Antag endvidere at* $f : [0,1]^k \to \mathbb{R}$ *er Riemann-integrabel. Da er*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} f(\{n\alpha\}) = \int_{[0,1]^k} f(s)ds$$

Faktisk er sætningerne 1 og 3 ækvivalente hvilket dog ikke bruges i det følgende.

To anvendelser af ligefordelte følger

I dette afsnit præsenteres delvise, generaliserede løsninger på problemerne 1 og 2. Først problem 1.

Sætning 4. *Definér afbildningen $\sigma : D_k \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ved*

$$\sigma : \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \mapsto (\lfloor \alpha_1 n \rfloor + \cdots + \lfloor \alpha_k n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}. \tag{5}$$

Vælger vi $y := (y_n)_{n \geq 0} \in \sigma(D_k)$, så eksisterer[2] *grænseværdierne*

$$T_n(y) := \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \binom{y_j - y_{j-1}}{n}, \quad n = 0, \dots, k \tag{6}$$

og vi kan bestemme dèt $\alpha = \{\alpha_, \dots, \alpha_k\} \in D_k$ der opfylder $\sigma(\alpha) = y$ idet

$$\sum_{n=0}^{k} T_n(y) x^{k-n} = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \cdots (x + \alpha_k), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Tallene $-\alpha_1, \dots, -\alpha_k$ er altså rødder i et polynomium der har størrelserne fra (6) som koefficienter.

Før beviset er det på sin plads med et par kommentarer. Udtrykket i gennemsnittet (6) *er* en binomialkoefficient, hvilket nævnes da det måske ser lidt mystisk ud. I beviset bruges de såkaldte *Iverson-klammer* $[\cdot]$ som er defineret på mængden af afgørlige udsagn ved

$$[\text{sand}] = 1 \text{ og } [\text{falsk}] = 0.$$

For et givet $c \in [0, 1]$ kan vi definere den reelle funktion $x \mapsto [x < c]$. Denne ses at være Riemann-integrabel idet den er stykvis kontinuert og vi har klart

$$\int_0^1 [x < c] \, dx = c.$$

Bevis for sætning 4: Vælg et $y \in \sigma(D_k)$ og antag at $\alpha \in D_k$ opfylder $y = \sigma(\alpha)$. Det afgørende trick i beviset er at tolke binomialkoefficienterne i gennemsnittene på højresiden af (6) på en sådan måde at det bliver muligt at anvende sætning 3 på disse. Derved finder vi både at de eksisterer, og hvad de konvergerer imod.

Vi lægger først mærke til, at $T_0(y)$ nemt regnes ud til at være 1 idet vi, per definition, har $\binom{m}{0} = 1$ for alle $m \in \mathbb{N}_0$. Da $\alpha_i \in]0, 1[$ for hvert $i = 1, \dots, k$ ser vi, at vi ved brug af Iverson-klammer har

$$\lfloor \alpha_i j \rfloor - \lfloor \alpha_i (j-1) \rfloor = [\{\alpha_i j\} < \alpha_i], \quad i = 1, \dots, k \text{ og } j \geq 0. \tag{8}$$

[2] Højresiden konvergerer i $\mathbb{R}$ for hvert $n = 0, \dots, k$. Vi sætter her $y_0 = 0$.

Vi ønsker nu at skrive binomialkoefficenten på højresiden af (6) som et udtryk i Iverson-klammer på ovenstående form. Indfør til dette formål mængderne

$$B_n = \{A \subseteq \{1,\dots,k\} \mid A \text{ består af netop } n \text{ elementer}\} \quad n = 1,\dots k.$$

B_n er altså mændgen af samtlige n-delmængder af $\{1,\dots,k\}$ og det ses at B_n har netop $\binom{k}{n}$ elementer. Vi skal nu overbevise os om at vi har

$$\binom{y_j - y_{j-1}}{n} = \sum_{A \in B_n} \prod_{i \in A} [\{\alpha_i j\} < \alpha_i], \quad j \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Til dette formål vælges et n med $0 < n \leq k$ og et $j \geq 0$. Jævnfør (8) og antagelsen $\alpha_i \in]0,1[$ for hvert $i = 1,\dots,k$ er det klart at vi har $0 \leq y_j - y_{j-1} \leq k$. Vi sætter nu $m := y_j - y_{j-1}$.

Det er nu klart at der må være netop m i'er i $\{1,\dots,k\}$, der opfylder

$$[\{\alpha_i j\} < \alpha_i] = 1. \tag{10}$$

Lad C betegne mængden af i'er der opfylder (10). Hvert af produkterne i summen på højresiden af (9) er enten 0 eller 1, og det er ikke svært at se at vi må have

$$A \subseteq C \Leftrightarrow \prod_{i \in A} [\{\alpha_i j\} < \alpha_i] = 1, \quad A \in B_n. \tag{11}$$

Antallet af $A \in B_n$ der opfylder (11) er netop $\binom{m}{n}$, hvilket altså bliver værdien af summen på højresiden af (9). Da m var sat lig $y_j - y_{j-1}$, følger gyldigheden af (9).

Ved brug af (9), antagelsen $\alpha \in D_k$, sætning 3 og (velkendte) sætninger om Riemann-integration finder vi nu at

$$\begin{aligned} T_n(y) &= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \binom{y_j - y_{j-1}}{n} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{A \in B_n} \prod_{i \in A} [\{\alpha_i j\} < \alpha_i] \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{A \in B_n} \prod_{i \in A} [x_i < \alpha_i] \, dx_1 \cdots dx_k \\ &= \sum_{A \in B_n} \prod_{i \in A} \alpha_i. \end{aligned} \tag{12}$$

for hvert n med $0 < n \leq k$.

Det overlades til læseren at verificere identiteten (7). Dette gøres f.eks. nemt ved induktion på k ud fra udregningen ovenfor idet vi husker at $T_0(y) = 1$. Det følger nu af algebraens fundamentalsætning, der udsiger at ethvert k'te grads polynomium har netop k rødder og udtrykket (7) at der findes netop et $\alpha \in D_k$ opfyldende $\sigma(\alpha) = y$. Hermed er sætningen vist. $\square$

Man kan endda, naturligvis kun delvist, gennemprøve sætningen ved udregning på computer. Jeg har gjort dette i tilfældet $k = 3$ hvor jeg brugte mængden $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\}$, der er indeholdt i D_k (Tjek selv efter). Jeg fandt ud af, at man ved at udregne 10^n elementer af følgen givet ved (5) kunne genfinde tallene $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ og $\frac{1}{\sqrt{5}}$ med cirka n korrekte decimaler efter kommaet. Konvergensen af gennemsnittene på højresiden af (6) er altså temmelig langsom.

Som noget helt ekseptionalt bør det noteres at vi ikke behøver at kende værdien af k i sætning 4. Vi kan udvide σ til en afbildning

$$\hat{\sigma} : \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

hvor $\hat{\sigma}$ altså stadig er injektiv og hvor det også stadig er muligt at bestemme, ikke bare antallet af α_i'er, men også deres værdi. Hvordan det?

For at se dette lader vi $\alpha \in D_k$ være givet for et $k \in \mathbb{N}$, og vi sætter $y := \sigma(\alpha)$. Hvis $n > k$ er binomalkoefficienterne i udtrykket (6) alle 0 så $T_n(y) = 0$ idet vi som nævnt i beviset har $0 \leq y_j - y_{j-1} \leq k$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Af udtrykket (12) har vi på den anden side $T_n(y) \neq 0$ når $0 < n \leq k$ da α_i'erne opfylder $\alpha_i > 0$ for hvert i.

Vi kan altså finde k ved at udregne $T_n(y)$ for hvert $n \in \mathbb{N}$. Det mindste $n \in \mathbb{N}$ for hvilket vi har $T_n(y) = 0$, opfylder af ovenstående $n = k + 1$. Da vi dermed så kender k, følger resten af beviset for sætningen.

Lad os nu se på en (delvis) generalisation af problem 2:

Sætning 5. *Antag at $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Hvis $(\alpha\beta\gamma, \beta\gamma, \gamma) \in O_3$ så er det muligt ud fra følgen*

$$\sigma = (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\lfloor \alpha \lfloor \beta \lfloor \gamma n \rfloor \rfloor \rfloor\big)_{n\in\mathbb{N}} \tag{13}$$

at bestemme værdierne af α, β og γ.

Bevis. Lad α, β og γ være givet med de nævnte egenskaber. Vi finder ved udregning at

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \alpha\beta\gamma n - \alpha\beta\{\gamma n\} - \alpha\{\{\beta\gamma n\} - \beta\{\gamma n\}\} \\ &+ \{\{\alpha\beta\gamma n\} - \alpha\beta\{\gamma n\} - \alpha\{\{\beta\gamma n\} - \beta\{\gamma n\}\}\}\end{aligned} \tag{14}$$

for hvert $n \in \mathbb{N}$. På samme måde som i sætning 4 "måler" vi på følgen, og finder derved nok information til at kunne udlede de ønskede størrelser. Vi har umiddelbart af (14) at

$$T_1 := \lim_n \frac{\sigma_n}{n} = \alpha\beta\gamma,$$

Idet der igen henvises til (14) finder vi af sætning 3 at

$$
\begin{aligned}
T_2 &:= \lim_m \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m} (T_1 n - \sigma_n) \\
&= \int_{[0,1]^3} (\alpha\beta x + \alpha\{y - \beta x\} + \{z - \alpha\beta x - \alpha\{y - \beta x\}\})\, dzdydx \\
&= \int_{[0,1]^2} \left(\alpha\beta x + \alpha\{y - \beta x\} + \frac{1}{2}\right) dydx \\
&= \int_{[0,1]} \left(\alpha\beta x + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}(\alpha\beta + \alpha + 1)
\end{aligned}
$$

Vi er nu løbet tør for nemme måder at måle på, men der er en udvej der dog kræver en del regneri. Bruger vi igen sætning 3 fås

$$
\begin{aligned}
T_3 &:= \lim_m \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m} (T_1 n - \sigma_n)^2 \\
&= \frac{1}{3}(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + 1) + \frac{1}{2}(\alpha^2\beta + \alpha\beta + \alpha) \\
&= \frac{3}{4}T_2^2 - \frac{1}{8}\alpha T_2.
\end{aligned}
$$

Idet $T_2 \neq 0$ finder vi heraf

$$\alpha = \frac{6T_2^2 - 8T_3}{T_2}.$$

Idet $\alpha \neq 0$ har vi

$$\beta = \frac{2T_2 - \alpha - 1}{\alpha}.$$

Endelig, idet vi også har $\beta \neq 0$,

$$\gamma = \frac{T_1}{\alpha\beta}$$

hvormed sætningen er vist □

Sætningen kan også vises i det tilfælde hvor der kun er to tal. Det kan muligvis også lade sig gøre at vise ovenstående sætning i det tilfælde hvor der er fire tal! Det har ikke været muligt for mig, at generalisere metoden i sætningen ovenfor, til at gælde $n > 4$ tal. Det ser ikke umiddelbart ud til at der findes en "nem" metode, som den der er præsenteret i sætning 4.

Litteraturliste

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2. edition, Addison-Wesley Publishing Company Ltd., 1994.

[2] Christian Berg, *Generel topologi*, Matematisk afdeling, Københavns Universitet, 1997.

[3] Xingping Sun, *Strictly positive definite functions on the unit circle*, Mathematics of Computation (en AMS-publikation), lagt online den 11. maj, 2004.

[4] Hermann Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins*, Math. Ann. 77, s. 313-352, 1916.