Den ikke-kommutative verden

Ryszard Nest

Lidt historie

Historien begynder samtidig med det tyvende århundrede, med opdagelse af de sære fænomener i mikrokosmos, såsom spektra af atomer og molekyler, den fotoelektriske effekt, superledende materialer og meget andet. Mens disse alle hører til indenfor fysikens domæne, var der et rent matematisk fænomen, der viste sig til at ligge bag dem alle - ikke-kommuterende variable. Heisenberg udtrykte det i den for kvantemekanikken grundliggende ligning

$$[p, q] = pq - qp = \hbar,$$

hvor p er momentet for en partikel, q er beliggenheden, og $\hbar$ er en universal konstant - Plancks konstant.

Fra et rent matematisk synspunkt, er der Schrödinger-modellen for disse relationer, givet ved

$$p = \hbar \frac{d}{dx}, \ q = \text{multiplikation med } x,$$

hvor $\hbar \frac{d}{dx}$ og multiplikation med x virker på et rum af $C^\infty(\mathbb{R})$-funktioner udtrykt i variablen x. Der er også en diskret model, hvor p og q er givet ved to uendelige matricer.

Af det ovenstående kan bl.a. konkluderes, at de naturlige algebraer, der optræder i beskrivelse af naturen er *ikke-kommutative*, altså ligesom $n \times n$ matricerne, $M_n(\mathbb{C})$, eller algebraen af begrænsede operatorer, $B(H)$, på et Hilbertrum H.

Det umiddelbare næste skridt er at se på delalgebraer af disse. Af tekniske grunde kræver vi at disse delalgebraer er afsluttet mht. operatornorm og, hvad der er endnu vigtigere mere vigtigt, lukket under konjugering; $T \mapsto T^*$. De algebraer, vi ender med, kaldes for C^*-algebraer. Det simpleste eksempel er de komplekse tal $\mathbb{C}$, hvor topologien er givet ved absolut værdi, $z \mapsto |z|$, og konjugering ved den komplekse konjugering $z \mapsto z^* = \overline{z}$. Det (meget) lidt mere avancerede eksempel er $M_n(\mathbb{C})$, hvor adjungeringen er den sædvanlige "transponering og konjugering":

$$a = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \mapsto \{\overline{a}_{ji}\}_{i,j=1,\ldots,n} = a^*$$

Dette eksempel er det samme som $B(H)$, hvor vi lader H være det endeligdimensionale Hilbertrum $\mathbb{C}^n$.

Det første ikke-endeligdimensionale eksempel (når vi ser bort fra $B(H)$) er algebraen $K(H)$ af alle kompakte operatorer på et uendeligdimensionalt Hilbertrum H - dvs.alle de operatorer, der kan approksimeres (i norm) med operatorer af endelig rang (dvs. som lever på et endeligdimensionalt underrum). Denne algebra er vigtig nok til at blive kaldt den "elementære" C^*-algebra.

Og lad os så tage endnu et eksempel. Den såkaldte ikke-kommutative torus, $\mathbb{T}_\theta$, er en C*-algebra, der frembringes af to unitære operatorer på et Hilbert rum, U og V, der opfylder relationen

$$UV = \exp 2\pi i\theta VU$$

for et *ikke-rationalt* $\theta \in \mathbb{R}$. Den beskriver en elektron, der bevæger sig i et todimensionalt gitter i et tværrettet magnetisk felt. Da dette eksempel vil dukke op flere gange, vil vi lige nævne visse af dens egenskaber.

Sætning 1. *$\mathbb{T}_\theta$ er simpel, dvs. givet en vilkårlig $C*$-algebra A, vil enhver en kontinuert, ikke-triviel $*$-homomorfi*

$$\Phi : \mathbb{T}_\theta \to A$$

være injektiv. At Φ er en $*$-homomorfi betyder at den er lineær og opfylder

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b), \ \ \Phi(a^*) = (\Phi(a))^*.$$

$\mathbb{T}_\theta$ har et entydigt (normaliseret) spor, dvs. en linear afbilding

$$\tau : \mathbb{T}_\theta \to \mathbb{C}$$

som opfylder $\tau(1) = 1$ og $\tau(ab) = \tau(ba)$.

Givet en unitær repræsentation af $\mathbb{T}_\theta$, altså en $*$-homomorfi

$$\Phi : \mathbb{T}_\theta \to B(H),$$

vil dens billedmængde, $\Phi(\mathbb{T}_\theta)$, aldrig indeholde kompakte operatorer forskellige fra 0.

Inden vi går videre, vil vi lige klare det *kommutative* tilfælde (Spektralsætningen for begrænsede operatorer):

Sætning 2. *En kommutativ C^*-algebra med enhed er isomorf med algebraen af kontinuerte, komplekse funktioner på et kompakt Hausdorff-rum.*

Baseret på ovenstående resultat plejer man at sige at en C^*-algebra beskriver et "ikke-kommutativt topologisk rum". Der er nogle ting som mangler, dog. En delvis liste er:

1. Ikke-Hausdorff-topologiske rum - noget som optræder meget tit i naturen. Det hurtigste eksempel er
$$\mathbb{R}/\mathbb{Q},$$
som ikke er Hausdorff - faktisk er de eneste kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$, som er invariante under translationecr med rationale tal, konstante.
2. Topologiske invarianter - såsom (ko)homologi-grupper, der normalt defineres ved at man studerer kombinatoriske egenskaber ved den måde et topologisk rum kan opbygges af enkle elementer, fx flerdimensionale kuber, $[0,1]^n$. Det problem, der opstår her, er meget enkelt. En kontinuert afbilding
$$\phi : [0,1]^n \to X$$
kan beskrives ved den tilsvarende afbilding ($*$-homomorfi) på funktionsniveau
$$C(X) \ni f \mapsto f \circ \phi \in C([0,1]^n).$$
Dermed kan vi eksempelvis angive et punkt, $x \in X$, ved $*$-homomorfien
$$f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$$
Men da $\mathbb{T}_\theta$ er som nævnt er simpel, har den ingen $*$-homomorfier ind i $\mathbb{C}$, så som rum betragtet, har den ingen punkter!

Geometri

Hvordan opstår dette i den ikke-kommutative verden?

Ideen er meget enkel, og vi vil gennemgå et eksempel. Lad $X = \{P, Q\}$ være en topunktsmængde med diskret topologi. En kontinuert funktion på X er givet ved et par tal, $(f(P), f(Q))$. Vi vil repræsentere $C(X)$ på det to-dimensionale Hilbertrum $\mathbb{C}^2$ med følgende $*$-homomorfi:
$$f \to \begin{pmatrix} f(P) & 0 \\ 0 & f(Q) \end{pmatrix}.$$

Lad nu D være den følgende matrix:
$$\begin{pmatrix} 0 & l \\ l & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi bemærker at
$$[D, f] = Df - fD = l(f(P) - f(Q)) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } ||[D, f]|| = l|f(P) - f(Q)|.$$

Dermed har vi
$$l^{-1} = \sup\{|f(P) - f(Q)| \mid ||[D, f]|| \leq 1\}.$$

Dette kan bruges som en definition!

Definition 1. *Givet en C^*-algebra A repræsenteret på et Hilbertrum H, og en (selvadjungeret) operator D på H, har vi følgende "afstandsbegreb". For to kontinuerte lineare funktionaler $\phi_i : A \to \mathbb{C}$, som tillige er normaliserede, dvs. $\phi_i(1) = 1$, og positive, dvs. $\phi_i(a^*a) \geq 0$ for alle $a \in A$, vil afstanden mellem ϕ_1 og ϕ_2 være givet ved*

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup\{|\phi_1(a) - \phi_2(a)| \mid ||[D, a]|| \leq 1\}.$$

En sådan trippel, (A, H, D), kaldes en spektral trippel.

I vores eksempel med topunktsmængden, angiver punktet P en lineær funktional $\phi_P : f \mapsto f(P)$, og tilsvarende for Q, og vi har

$$d(\phi_P, \phi_Q) = l^{-1}.$$

Vi har altså "konstrueret en metrik" på X, som giver den diameter l^{-1}. Men vi kan stille og roligt gå videre og udvide den til en "metrik" på det ikke-kommutative rum $M_2(\mathbb{C})$ ved at bruge præcis den samme formel!

Inden vi begynder at konkludere, vil vi lige se lidt mere på algebraer som $M_N(\mathbb{C})$. Hvis vi er villige til at acceptere (hvad man tit gør i algebra), at $M_N(\mathbb{C})$ er bestemt ved dens repræsentationer, så er der ikke den store forskel mellem $\mathbb{C}$ og $M_N(\mathbb{C})$. Alle representationer af $\mathbb{C}$ er i form af konstante matricer

$$\mathbb{C} \ni \lambda \to \lambda I_k = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

på $\mathbb{C}^k$, mens alle representationer af $M_N(\mathbb{C})$ er i form af blokdiagonaler

$$M_N(\mathbb{C}) \ni a \to \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

på $(\mathbb{C}^N)^k$. Man siger at de to algebra er *Morita-ækvivalente*. Dette betyder, at der ikke er megen forskel mellem to punkter som er identificeret, dvs.

$$X/\sim = \{P, Q\}/\{P = Q\}$$

og 2×2-matricerne $M_2(\mathbb{C})$. Men, som vi har set ovenfor, er det nemt at give $M_2(\mathbb{C})$ en metrik, mens $X/\sim$ er en etpunktsmængde, og dermed ikke har nogen videre struktur.

Det vi har lavet ovenfor, er lidt af en leg. Men lad os nu vende tilbage til det sære kvotientrum $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Den har ingen ikke-konstante kontinuerte funktioner, ganske som vores etpunktsmængde $X/\sim$. Men på samme måde som vi har kunnet erstatte $X/\sim$ med en den Moritaækvivalente algebra $M_2(\mathbb{C})$, kan vi erstatte vores "intuitiv forståelse" af kvotienten $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ med en pæn C^*-algebra som løst sagt har følgende elementer:

- som analog til diagonale matricer, de kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$;
- som analog til de ikke-diagonale matrixenheder, translationer med rationale tal.

Denne konstruktion hedder "krydsprodukt", $\mathbb{Q} \ltimes C_0(\mathbb{R})$. Ideen er, at $\mathbb{Q} \ltimes C_0(\mathbb{R})$ består af (visse) summer på formen

$$\sum_{q \in \mathbb{Q}} c_q \lambda(q)$$

hvor c_q'erne er kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$ og, for en vilkårlig funktion f på $\mathbb{R}$ og $q \in \mathbb{Q}$ gælder følgende kommutationsrelation:

$$(\lambda_q f \lambda_{-q})(x) = f(x-q).$$

Det er vigtigt hér at bemærke, at i analogi med de endelige matricer, kan vi let konstruere naturligt forekommende tripler af formen

$$(\mathbb{Q} \ltimes C_0(\mathbb{R}), H, D),$$

og dette eksempel - i let modificeret udgave - optræder faktisk i forbindelse med talteori.

Topologiske invarianter

Triplerne (A, H, D) kan udstyres med en ækvivalensrelation, på en sådan måde at ækvivalensklasserne udgør en abelsk gruppe af "homotopi-invarianter" for A - dens K-homologi $K^1(A)$. Det bliver lidt for teknisk at komme ind på hvad der hér forstås ved homotopi, men i det abelske tilfælde, med $A = C(X)$ for et kompakt Hausdorff-rum X, er $K^1(X)$ invariant under kontinuerte deformationer af X. Hér er det nok påsin plads, at nævne at gruppen først blev konstrueret for de ikke-kommutative algebraer.

En anden topologisk invariant er givet ved ækvivalensklasser af projektioner. En projektion er et element $p \in A$ som opfylder

$$p^2 = p = p^*.$$

Hvert gang A repræsenteres som en konkret algebra af operatorer på et Hilbert-rum, vil en projektion blive repræsenteret som en ortogonalprojektion på et passende underrum. To projektioner p og q siges at være ækvivalente, hvis der findes to elementer u og v i A så

$$p = uv \text{ og } q = vu.$$

Vi skriver $[p] = [q]$. Eksempelvis vil to ortogonale projektioner på endeligdimensionale underrum af et givet Hilbertrum, H, være ækvivalente i $K(H)$, hvis og kun hvis dimensionerne af deres billedrum er ens.

Ud af ækvivalensklasserne af projektioner dannes en abelsk gruppe, $K_0(A)$ - den lige K-kohomologi gruppe af A. Denne viser sig at være en af de vigtigste invarianter for A, allerede i det kommutative tilfælde.

Indekssætninger

Et godt eksempel er følgende. Lad $D = a(x)\frac{d}{dx} + b(x)$ være en differentialoperator på $\mathbb{R}$ og lad $D^* = -\frac{d}{dx}\overline{a(x)} + \overline{b(x)}$. Vi er intereseret i løsningerne på ligninger af formen

$$Df = g.$$

Under nogle enkle betingelser på funktionerne a og b, vil følgende to rum af kvadratisk integrable funktioner på $\mathbb{R}$ være endeligdimensionale:

$$\ker D = \{f \mid Df = 0\}; \operatorname{coker} D = \ker D^*.$$

Det oplagte problem er nu at finde

$$\dim(\ker D) - \dim(\operatorname{coker} D)$$

og dette vel at mærke uden at finde den eksplicitte løsning til $Df = g$!

Det (hel-)tal, som står påvenstre side, kaldes for *indekset* af D, og en løsning på problemet er givet i *Atiyah-Singers Indekssætning*. Da formuleringen af denne sætning kræver forarbejde, vil den udelades her. Den kaldes ofte et af de vigtigste resultater i det tyvende århundredes matematik, og det var på grund af den sætning, Atiyah og Singer vandt årets Abel-pris.

Men lad os dog omformulere os lidt. Først, givet et Hilbertrum H og et endeligdimensional underrum $V \subset H$, lader vi p betegne den ortogonale projektion på V. Da gælder

$$\dim V = \operatorname{Tr} p,$$

hvor Tr er det sædvenlige spor - dvs. summen af de diagonale elementer i den matrix der udtrykker p i en given ortonormalbasis.

Lad p og q være projektioner på henholdsvis $\ker D$ og $\operatorname{coker} D$, givet som ovenfor. Da de er endeligdimensionale, sidder de begge i $K(L^2(\mathbb{R}))$ - de kompakte operatorer påHilbertrummet af kvadratisk integrable funktioner på $\mathbb{R}$. Det betyder at

$$[p] - [q] \in K_0(K(L^2(\mathbb{R})).$$

Vi kan nu skrive

$$\text{indeks}\, D = \mathrm{Tr}(p) - \mathrm{Tr}(q)$$

og tænker på den identitet som en beregning af værdien af en gruppehomomorfi

$$\mathrm{Tr} : K_0(K(L^2(\mathbb{R})) \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

på et konkret element af K_0.

Hvad forsker jeg i?

Først det korte svar. Givet en konkret, naturligt forekommende algebra A, har vi følgende spørgsmål:

1. Hvad er $K_0(A)$?
2. Hvilke homomorfier

   $$\phi : K_0(A) \to \mathbb{R}$$

   har vi?
3. Hvilke værdier antager ϕ på naturligt forekommende elementer af $K_0(A)$?

Og så det lidt længere svar.

De ϕ'er, der kan erstatte det almindelige spor af en matrix, kaldes cykliske kocykler. De er givet som multilineære afbildinger

$$\phi : A \times A \times \ldots \times A \to \mathbb{C}$$

med følgende to egenskaber:

1. Cyklicitet:

   $$\phi(a_0, \ldots a_n) = (-1)^{n+1} \phi(a_n, a_0, \ldots, a_{n-1}).$$

2. Kocykel-egenskaben:

   $$\phi(a_0 a_1, a_2, \ldots a_{n+1}) - \phi(a_0, a_1 a_2, \ldots, a_{n+1}) \pm \ldots + (-1)^{n+1} \phi(a_{n+1} a_0, a_2, \ldots a_n) = 0.$$

De cykliske kocykler udgør et vektorrum, der kaldes den cykliske kohomologi af A, og betegnes med $HC_*(A)$. Deres værdier på projektionsklasser gives ved

$$< \phi, [p] >= \phi(p, p, \ldots, p).$$

I modsætning til K-teorien, er HC^* til at beregne ved homologiske metoder, og i de fleste geometriske situationer, eller anvendelser i matematisk fysik, dukker der nogle naturlige cykliske kocykler op, der beskriver interesante størrelser.

De algebraer, der er af interesse, opstår i følgende situationer:

- (Pseudo)differentialoperatorer: Disse har forbindelse til både indeks af differentialoperatorer og i geometri for mangfoldigheder.

- Formelle deformationer af kommutative algebraer: Et eksempel er givet ved algebraen frembragt af størrelserne $(p, q, \hbar)$ med relationen $[p, q] = \hbar$, som vi begyndte med - men hvor $\hbar$ betragtes som en variabel istedet for et fast tal. Dette er en deformation af algebraen af funktioner i to kommuterende variable (p_0, q_0). Dissee opstår i differentialgeometri og fysik.
- Fourier-integral-operatorer: De kan anskues som løsninger til "evolutions-ligningen" - altså givet en differentialoperator D, så

  $$\partial_t f + Df = g \Longrightarrow f(t) = \Phi_t(f).$$

  Denne slags Φ_t har en geometrisk beskrivelse, der involverer Fourier-transformationen - derfor navnet Fourier-integral-operatorer.
- Riemann-Rochs sætning for $\mathcal{D}$-moduler. Vi skal nok lade være med at komme ind på, hvad dette egentlig betyder, så lad os bare nøjes med at sige at det giver os mulighed for at løse "indeksproblemer" for algebraiske ligninger (i modsætning til differentialligninger som ovenover.
- Sidst, men ikke mindst, konkrete C^*-algebraer, der bruges i forskellige sammenhænge - fx repræsentationsteori for grupper.