Perfekte grafer

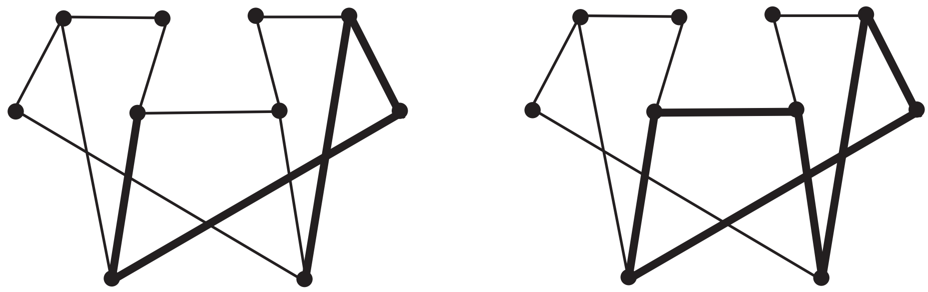
Skipper Dinesen

“Den stærke perfekte graf sætning”, kort betegnet STPGS, blev fremført som en formodning af den franske matematiker Claude Berge i 1961 som en konsekvens af grafteoretikeres interesse i at farvelægge grafer. Påstanden levede som en formodning indtil 2002 hvor den blev bevist af tre af grafteoriens kanoner, Neil Robertson, Robin Thomas og Paul Seymour samt sidstnævntes elev, Maria Chudnovsky. Det tog altså over 40 år at bevise påstanden og beviset er da også meget langt (over 150 sider) og uhyre kompliceret. Vi vil i denne note end ikke nærme os et bevis for sætningen. (Interesserede læsere kan finde et bevis i [4].)
I stedet skal vi se nogle eksempler på perfekte grafer og undervejs komme ind på “den svage perfekte graf sætning”, SVPGS, der i blev fremført som formodning af Claude Berge sammen med formodningen om den stærke sætning. 10 år efter var denne formodning blevet til en sætning, beviset udarbejdet af ungareren Laszlo Lovász i 1971. Beviset er uhyre elegant og bygger på, at en graf er perfekt hvis og kun hvis et bestemt konvekst polytop har heltallige hjørner. Heller ikke dette bevis vil vi vise her, men for interesserede kan det læses i f.eks. [10]. Det kræver lidt matematisk “modenhed”, men kan ellers læses af de fleste, der har beskæftiget sig med konveksitets- og grafteori.
Amerikaneren Delbert Ray Fulkerson havde i en årrække forsøgt at vise den svage perfekt graf sætning. Han var ganske tæt på målet, skulle det vise sig, da han i 1971 fejlagtigt kom til den konklusion, at formodningen var forkert. Han begyndte herefter at lede efter modeksempler, men kort efter modtog han beskeden om Lovász bevis og færdiggjorde herefter hurtigt sit eget bevis. Fulkerson havde et ustabilt sind og begik selvmord få år senere, men han nåede dog at anerkendte Lovarsz som “sejrherre”, som kvitterede ved at kreditere Fulkerson for en stor andel i det endelige bevis.
Som nævnt vil vi ikke bevise hverken SVPGS eller STPGS. Men vi vil naturligvis opskrive begge sætninger og gennem nogle illustrative eksempler bevise (sådan da!) at fire simple klasser af grafer er perfekte. Men først skal vi lige fortælle lidt om hvad grafer er for noget.

Grundlæggende grafteoretiske begreber

En graf er et matematisk objekt bestående af *knuder* og *kanter*. Knuderne er elementer i en endelig mængde, som regel betegnet V, og kanterne angiver at der er en relation mellem visse par af elementer (altså knuder) i V. Knuder betegnes i

regelen v og kanter betegnes e. Mængden af kanter betegnes E og ved et element $e \in E$ forstås en to-punktmængde fra V, $e = \{v_1, v_2\}, v_1, v_2 \in V$, i korthed blot skrevet $e = v_1v_2$. Vi siger at v_1 og v_2 er forbundet af kanten $e = v_1v_2$. Samlet skrives $G = (V, E)$ for en graf G med knudemængde V og kantmængde E.
En *vej* i en graf $G = (V, E)$ er en følge $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}e_n, v_n$ af knuder v_i og forskellige kanter $e_j = v_{j-1}v_j$ fra henholdsvis V og E. En vej hvor $v_0 = v_n$ kaldes en *kreds* hvis $n \geq 3$. En *chorde* i en kreds er en kant som ikke er indeholdt i kredsen, men hvis endepunkter er (se figur 4).

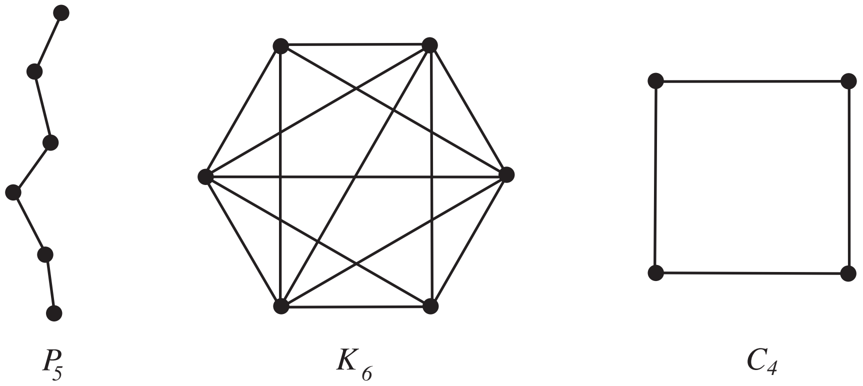


Figur 1: En vej og en kreds.

Visse grafer har specielle kendetegn og strukturer, der giver dem deres egne navne og betegnelser. I den *komplette graf* betegnet K_n er $|V| = n$, og alle n knuder er indbyrdes forbundet. En graf der blot er en vej på m kanter (og $m + 1$ knuder) betegnes P_m og en graf hvor knuder og kanter præcis udgør en kreds på m kanter betegnes C_m.
Grafteori er en anvendelsesorienteret disciplin. Til løsning af praktiske formål kan knudemængden f.eks. være en samling af trafikknudepunkter som jernbanestationer eller broer. Men det kan også være andre ting, f.eks. fabrikker og afsætningsmarkeder. I dette tilfælde har vi typisk en *orienteret graf* - men det vil vi ikke komme videre ind på her.

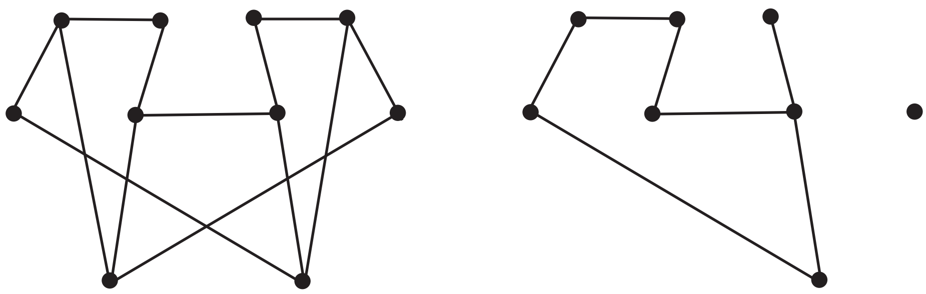
Perfekte grafer

En knudefarvning af en graf er farvelægning af hver knude i knudemængden V således, at hvis to knuder er forbundet af en kant, så skal de tildeles forskellige farver. Det mindste antal farver der skal bruges til sådan en farvning af en graf G kaldes *det knudekromatiske tal* og betegnes $\chi(G)$.
Ligeledes er en kantfarvning en farvelægning af kanterne, hvor kanter opbundet til samme knude tildeles forskellige farver. Det mindste antal farver, der skal bruges til en kantfarvning af en graf G kaldes *det kantkromatiske tal* og betegnes $\chi_e(G)$.
Ved en *klike* i G forstår vi en delmængde $K \subseteq V$ af parvis forbunde knuder. Antallet af knuder i den største klike kaldes *kliketallet* for G og betegnes $\omega(G)$.



Figur 2: Tre grafer.

Da samtlige knuder i en klike K er forbundne, skal vi altså til en farvning af K bruge mindst $|K|$ farver. Vi ser derfor middelbart, at $\chi(G) \geq \omega(G)$ for enhver graf G.
En induceret delgraf H opstår fra $G = (V, E)$ ved at man fjerner et antal (evt. 0) knuder fra V og samtlige kanter opbundet til disse knuder.



Figur 3: En graf og en induceret delgraf. En knude står nu isoleret og grafen er ikke længere *sammenhængende.*

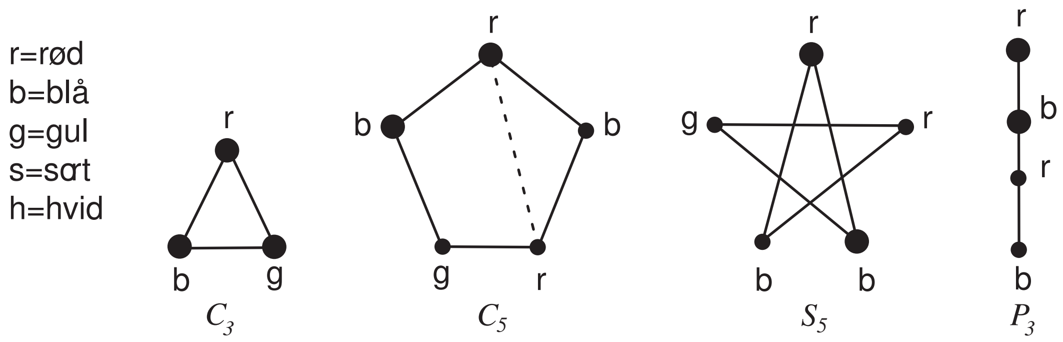
Vi har nu terminologi til at kunne definere *perfekte grafer.*

Definition 1. *En perfekt graf er en graf hvor*

$$\chi(H) = \omega(H) \tag{1}$$

for enhver induceret delgraf H af G.

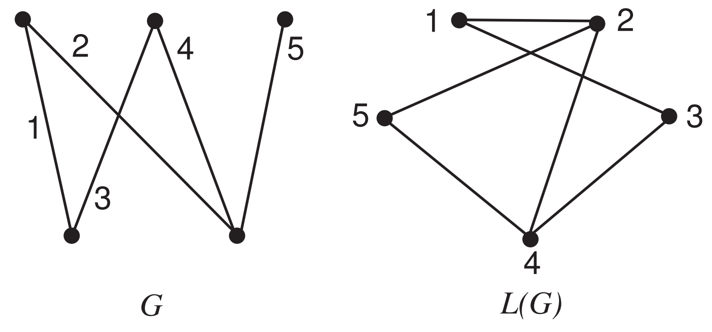
G er altså perfekt hvis $\chi(G) = \omega(G)$ og denne ulighed holder ligemeget hvor mange og hvilke knuder man fjerner, sålænge de resterende blot bibeholder deres tilknyttede kanter.
STPGS som vi opskriver i et senere afsnit giver en komplet klassifikation af perfekte grafer. Indtil da vil vi se på en anvendelse og nogle eksempler.



Figur 4: Graferne $K_3 = C_3, C_5, S_5$ (med en chorde markeret med stiplet) og P_3 med største kliker markeret med fed og knudefarvninger indskrevet ved knuderne. C_3 er tydeligvis selv en klike, spcielt af størrelse 3. Altså er $\chi(C_3) = \omega(C_3) = 3$. C_3 er tydeligvis perfekt. Da $\chi(C_5) = 3 > 2 = \omega(C_5)$ er C_5 ikke perfekt. S_5 er heller ikke perfekt da $\chi(S_5) = 3 > 2 = \omega(S_5)$. Det er nemt at se at enhver vej er perfekt, her P_3.

Svage perfekt graf sætning og eksempler på perfekte grafer

En graf $G = (V, E)$ kaldes todelt hvis knudemængden V kan opsplittes i to disjunkte mængder, V_1 og V_2, på en sådan måde at hver kant i E forbinder en knude i V_1 med en knude i V_2, altså $E \subseteq \{vv' | v \in V_1, v' \in V_2\}$. Det ses, at en graf G er todelt hvis og kun hvis $\chi(G) = 2$. Det er klart at $\chi(H) \leq \chi(G)$ for enhver induceret delgraf H af G. Specielt er $\chi(H) \leq 2$ hvis G er en todelt graf. Todelte grafer er altså et simpelt eksempel på en hel klasse af perfekte grafer.



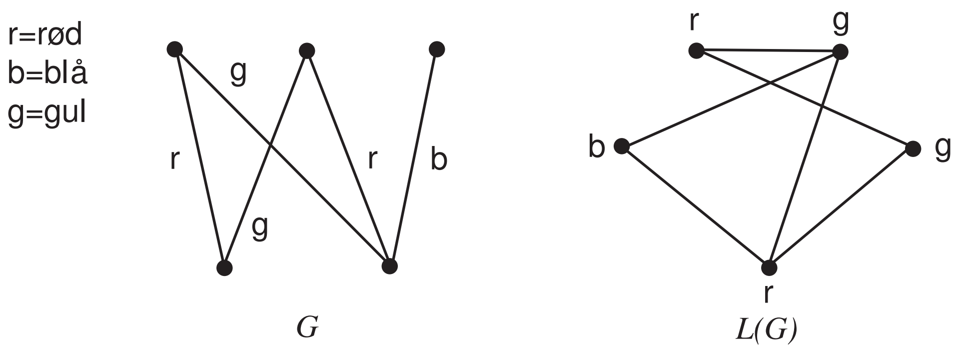
Figur 5: En todelt graf og dens kantgraf. Nummerering af kanter i G modsvarer nummerering af knuder i $L(G)$.

Med afsæt i todelte grafer kan vi hurtigt konstruere flere klasser af perfekte grafer. Kantgrafen, $L(G)$, for en graf $G = (V, E)$ er grafen med knudemængde E og hvor $e, e' \in E$ er forbundne knuder i $L(G)$ hvis de deler et endepunkt i G. Med symboler

er $L(G) = (E, \{ee' \mid e, e' \in E, e \cap e' \neq \varnothing\})$.
Det har længe været kendt, at kantgrafen $L(G)$ for en todelt graf G er perfekt. For at indse dette, skal vi checke, at $\chi(H') = \omega(H')$ for enhver induceret delgraf H' af $L(G)$. Men enhver induceret delgraf H' af $L(G)$ er kantgraf for en passende delgraf G' af G, så da G' naturligvis er todelt, er det nok at vise at $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$.
Først er det klart, at hvis $G = (V, E)$ er en (todelt) graf med kantgraf $L(G) = (V', E')$, så er

$$\chi_e(G) = \chi(L(G)). \tag{2}$$

Parantesen ovenfor antyder, at (2) holder for en hvilken som helst graf G.



Figur 6: $\chi_e(G) = \chi(L(G))$.

I en graf $G = (V, E)$ betegner *knudevalensen*, $\deg_G(v)$, antallet af kanter, der har v som endepunkt. Den maksimale knudevalens af knuder i V betegnes $\Delta(G)$. Se tegningen nedenfor.
Der er en konstrueret 1-1 forbindelse mellem de kanter i E, der deler et endepunkt $v \in V$, og de inbyrdes forbundne knuder i $V'(= E)$: Da en kreds i en todelt graf altid indeholder mindst fire kanter, er enhver klike K i $L(G)$ på formen $K = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}\}$ hvor $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$, betragtet som kanter i E, har eet fælles endepunkt fra V. Med andre ord, et sæt af kanter fra E deler et endepunkt, $v \in V$, netop hvis de er indbyrdes forbunde knuder i V'. De indbyrdes forbundne knuder i V' er netop klikerne i $L(G)$, så vi slutter at

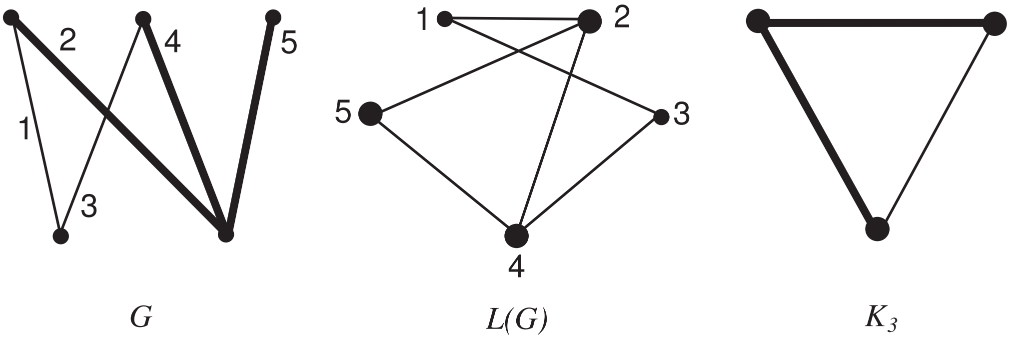
$$\omega(L(G)) = \Delta(G) \tag{3}$$

for enhver todelt graf G. For en vilkårlig graf G kan der derimod hænde, at $\Delta(G) < \omega(L(G))$. Ifølge en klassisk grafteoretisk sætning (af König) er

$$\chi_e(G) = \Delta(G), \tag{4}$$

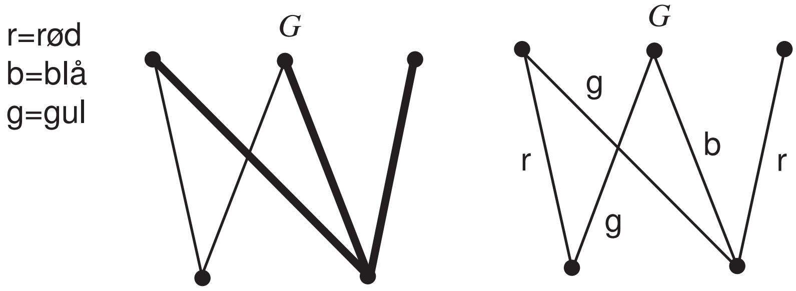
for enhver todelt graf G. Beviset for denne påstand kan findes i enhver lærebog om grafteori og kombinatorik, f.eks. [3]. Bemærk at $\chi_e(K_3) = 3 > 2 = \Delta(K_3)$.
Sammenholdt er

$$\chi(L(G)) = \chi_e(G) = \Delta(G) = \omega(L(G)), \tag{5}$$



Figur 7: Til venstre: En todelt graf, hvor kanter opbundet til en knude med maksimal knudevalens er markeret med fed. I midten: Den tilhørende kantgraf. Kliken svarende til kanterne 2,,4,5 er markeret. Det er en maksimal klike i $L(G)$. Til højre: $L(K_3) = K_3$ og (3) gælder derfor ikke for K_3: $\omega(K_3) = 3 > 2 = \Delta(K_3)$.

hvorfor kantgrafen for en todelt graf er perfekt.



Figur 8: $\Delta(G) = \chi_e(G)$ når G er todelt.

Komplementærgrafen G^c til en graf $G = (V, E)$ har knudemængde V, men to knuder er forbundet af en kant i G^c netop når de ikke er forbundne i G. Ved at etablere en række identiteter svarende til (2), (3) og (4) får man vist, at hvis G er en todelt graf med kantgraf $L(G)$, så er komplementærgraferne G^c og $L(G)^c$ også perfekte. De afgørende argumenter er dog en smule sværere end vi så dem ovenfor. Vi vil ikke gøre mere ud af dét - resultatet er alligevel indeholdt i SVPGS som vi opskriver her:

Sætning 1 (Den svage perfekte graf sætning)**.** *En graf er perfekt hvis og kun hvis dens komplement er perfekt.*

Den stærke perfekte graf sætning

Den stærke perfekte graf sætning giver en komplet klassifikation af perfekte grafer. På den næste halve side giver vi "en halv klassifikation" - den anden halvdel fylder over 150 sider.
En chordefri kreds af længde større end 3 kaldes et *hul* og komplementet til et hul kaldes et *antihul.* C_5 og S_5 fra figur 4 er eksempler på et hul henholdsvis et antihul. Hvis vi (lidt kritisabelt) siger, at i et hul er hver knude v knyttet til to naboer, så er er v, opfattet som knude i et antihul, knyttet til alle andre knuder end sine to naboer.
Vi så at C_5 ikke er en perfekt graf. Indtegner vi derimod den stiplede chorde fremkommer tydeligvis en perfekt graf. Mere generelt ser vi, at hvis G er et ulige hul, dvs. af ulige længde, er

$$\chi(G) = 3 > 2 = \omega(G), \tag{6}$$

hvilket betyder, at hvis G er et hul, så er G ikke perfekt. Når G er et ulige antihul på $2k + 1 > 3$ knuder har vi

$$\chi(G) = k + 1 > k = \omega(G) \tag{7}$$

og en perfekt graf indeholder derfor ikke huller og antihuller af ulige længde som inducerede delgrafer. Vi har altså nemt en forudsætning for at en graf G er perfekt: Hvis G er perfekt har ethvert hul og ethvert antihul i G lige længde. Vi slutter dette afsnit med den stærke perfekte graf sætning, der siger at implikationen også gælder den anden vej, altså at en graf uden ulige huller og ulige antihuller er perfekt.

Sætning 2 (Den stærke perfekte graf sætning)**.** *En graf G er perfekt hvis og kun hvis G ikke indeholder et ulige hul og ikke indeholder et ulige antihul.*

Når vi siger, at en perfekt graf ikke indeholder et ulige hul eller et ulige antihul mener vi naturligvis underforstået som induceret delgraf.

Med STPGS ved vi præcis hvordan de perfekte grafer ser ud. Derimod vides det ikke (af forfatteren) om der findes en algoritme, der i polynomiel tid kan afgøre om en forelagt graf indeholder huller eller antihuller af ulige længde.

Afsluttende bemærkninger

Hvis man kunne have interesse i at vide lidt mere om perfekte grafer, kan det anbefales af følge indledende kurser i diskret matematik og kombinatorik. Forfatteren af denne note er gammel i gårde og er derfor ikke særlig godt bekendt med den nye studieordning, men de tidligere kurser "Mat DM" og "Mat XX" gav begge en god indføring i grafteori. Vil man videre med emnet er det en god ide

(faktisk nødvendig) at beskæftige sig lidt med kombinatorisk optimering og konveksitetsteori.
Beviset for at todelte grafer, deres kantgrafer og begges komplementærgrafer er perfekte kan vel klares inden for rammerne af et rimeligt bachelorprojekt (men det kræver at man på forhånd er fortrolig med grafteori og optimering). Beviset for SVPGS er væsentligt sværere, men kan f.eks. være indeholdt i et fagprojekt på overbygningsuddannelsen.

Litteraturliste

[1] Bhogle, Srinivas: Claude Berge. Current Science, vol 83, 2002.

[2] Billera, Louis og Lucas, William: Delbert Ray Fulkerson. Mathematical Programming Study 8. North-Holland Publishing Company, 1978.

[3] Bryan, Victor: Aspects of Combinatorics - A Wideranging Introduction. Cambridge University Press, 1992.

[4] Chudnovsky, Maria; Seymour, Poul; Thomas, Robin og Robertson, Neil: The strong Perfect Graph Theorem, Manuscript, http://www.math.gatech.edu./ thomas/spgc/html

[5] Cook, William: Combinatoral Optimization. Wiley, 1998.

[6] Cornuéjols, Gerard: Combinatorial Optimization - Packing and Covering. SIAM 2001

[7] Fulkerson, Delbert Ray: On the Perfect Graph Theorem. College of Engineering, Cornell University, 1973.

[8] Mackenzie, Dana: Graph Theory Uncovers the Roots of Perfection. Science, vol 297, 2002.

[9] Matousek, Jiri og Nesetril, Jaroslav: Invitation to Discrete Mathematics. Oxford University Press, 1998.

[10] Thomas, Robin: Lectures by Robin Thomas - Written down by his Students. Department of Mathematics, Georgia Institute of Technology, 2003.