Spektralfølger

Manisha Montgomery

I en koncentrationslejr under anden verdenskrig opfandt Jean Leray spektralfølgebegrebet. Formålet var for Leray at bestemme homologi og kohomologi af kædekomplekser. Siden da har anvendelsen af spektralfølger spredt sig til andre grene af matematikken, og bruges inden for områder som topologi, algebraisk topologi, differentialgeometri og algebraisk geometri.

Et interessant eksempel på hvad man kan bruge spektralfølger til, er den generelle version af Künneths sætning for dobbeltkomplekser, nemlig Künneths spektralfølgesætning.

Sætning. *Lad (K^*, d_K) og (L^*, d_L) være to $\mathbb{N}_0$-differentialgraduerede moduler over en kommutativ ring R. Lad K^* være flad og lad d_K og d_L begge have grad* 1. *Da gælder:*
Der eksisterer en spektralfølge med

$$E_2^{p,q} \simeq \bigoplus_{a+b=q} \mathrm{Tor}^R_{-p}(H^a(K^*), H^b(L^*)).$$

Denne spektralfølge ligger i anden kvadrant. Hvis spektralfølgen konvergerer, da konvergerer den mod $H(K^* \otimes_R L^*, d_\otimes)$.

Jeg vil i denne artikel introducere nogle af de vigtige begreber der optræder i denne sætning. Formålet er ikke at give en fuldstændig forståelse for sætningen, men blot at give en ide om hvad spektralfølger er. Beviset for sætningen vil vi ikke komme ind på, men blot henvise til [McCleary].

Definition af spektralfølger

Definition: *Differentialbigradueret modul.*
$A^{*,*}$ er en differentialbigradueret modul, hvis følgende er opfyldt:

1. $A^{*,*} = \{A^{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$, hvor $A^{p,q}$ er en modul for alle $p, q \in \mathbb{Z}$. $A^{*,*}$ er altså en familie af moduler over R.
2. $A^{*,*}$ har et differentiale d_A af bigrad enten $(s, 1-s)$ eller $(-s, -1+s)$, for et $s \in \mathbb{Z}$. Det vil sige, at for alle par $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ findes der en homomorfi kaldet d_A, således at enten $d_A : A^{p,q} \to A^{p+s,q+1-s}$ (grad $(s, 1-s)$) eller $d_A : A^{p,q} \to A^{p-s,q-1+s}$ (grad $(-s, -1+s)$), samt at $d_A \circ d_A = 0$. Vi betegner altså med d_A elementerne i en mængde af afbildninger med samme navn, der opfylder ovenstående krav.

Den differentialbigraduerede modul $A^{*,*}$ med differentiale d_A skrives $(A^{*,*}, d_A)$.

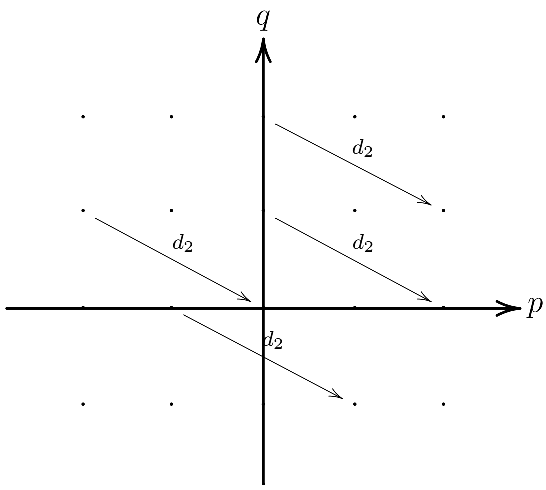
Definition: *Spektralfølge.*
En spektralfølge er en familie af differentialbigraduerede moduler $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r\in\mathbb{N}}$, om hvilken der gælder følgende:

1. Differentialerne, $\{d_r\}_{r\in\mathbb{N}}$, har alle enten bigrad $(r, 1-r)$ eller alle bigrad $(-r, -1+r)$. I første tilfælde er spektralfølgen af kohomologisk type, i andet tilfælde af homologisk type.
2. For $p, q \in \mathbb{Z}$ og $r \in \mathbb{N}$ gælder, for den kohomologiske type, at

$$E_{r+1}^{p,q} \simeq H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r) = \frac{\ker(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r})}{\operatorname{im}(d_r : E_r^{p-r,q-1+r} \to E_r^{p,q})}$$

   og tilsvarende for den homologiske type.

Det r'te element i familien kaldes for spektralfølgens E_r-side, og vi illustrerer denne ved i hvert gitterpunkt (p, q) i planen at placere $E_r^{p,q}$. Differentialerne bliver da illustreret ved vektoren med koordinaterne $(r, 1-r)$ eller $(-r, -1+r)$ alt efter spektralfølgens type. E_2−siden af en spektralfølge af kohomologisk type ser altså således ud:

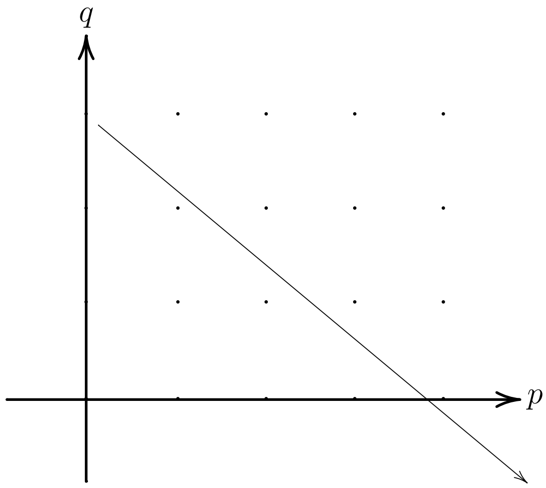


Hvis der om en spektralfølge gælder, at $E_r^{p,q} \simeq \{0\}$ når $p < 0$ eller $q < 0$, siger vi, at spektralfølgen ligger i 1. kvadrant. Tilsvarende defineres 2., 3. og 4. kvadrant spektralfølger.

Bemærkning. Kravet om at $d_A \circ d_A = 0$ i definitionen af differentialbigraduerede moduler sikrer os, at vi kan komme fra en side af en spektralfølge til den næste ved at tage homologi (se definitionen af spektralfølger punkt 2). Bemærk endvidere, at differentialerne ikke kan have vilkårlige bigrader, da de afhænger af r. Desuden bestemmer differentialerne i E_r-siden E_{r+1} men ikke d_{r+1}.

Målet for 1. kvadrant spektralfølger

Vi er interesserede i, hvordan E_r-siden for en 1. kvadrant spektralfølge af kohomologisk type ser ud, når r vokser. Jo større r bliver, desto flere differentialer vil pege uden for 1. kvadrant og dermed være nulafbildninger, hvis kerne selvfølgelig er hele definitionsmængden. Når vi så går videre til næste side ved at tage homologi, vil alle de gitterpunkter hvis diffferentiale "stikker uden for", forblive de samme som i siden før. Mere formelt: Lad en 1. kvadrant spektralfølge $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ af kohomologisk type være givet. Betragt $E_r^{p,q}$ for $r \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{N}_0$ hvor $r > \max\{p, q+1\}$. På følgende illustration er $r = 5, p = 4, q = 3$.



d_r har bigrad $(r, 1-r)$ og vi har $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}$. Da $r > q+1$ er $0 > q+1-r$, og dermed er $E_r^{p+r,q+1-r} \simeq \{0\}$ da $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ jo er en 1. kvadrant spektralfølge. Dermed er d_r nulafbildningen og følgeligt er $\ker d_r = E_r^{p,q}$. Ser vi samtidig på $d_r : E_r^{p-r,q-1+r} \to E_r^{p,q}$ får vi, da $r > p$ medfører $0 > p-r$, at $E_r^{p-r,q-1+r} \simeq \{0\}$ således at $\operatorname{im} d_r$ bliver triviel. Da vi kommer fra en side til den næste ved at tage homologi, får vi, at $E_{r+1}^{p,q} \simeq \frac{E_r^{p,q}}{\{0\}} = E_r^{p,q}$. Lader vi r vokse får vi altså, at $E_{r+k}^{p,q} = E_r^{p,q}$ for $k \geq 0$. Vi kalder modulen $E_r^{p,q}$ for målet for spektralfølgen i (p,q) og betegner den $E_\infty^{p,q}$.

For $2., 3.$ og $4.$ kvadrant spektralfølger er det mere kompliceret at definere målet. Man er da nødt til at beskrive spektralfølgen ved hjælp af et såkaldt tårn af undermoduler af en given modul. Ud fra dette tårn kan vi da definere målet for spektralfølgen. Uden af gå i detaljer vedrørende konstruktionen af tårnet, følger her den mere præcise definition af $E_\infty^{p,q}$.

Definition: $E_\infty^{p,q}$.
Lad $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ være en spektralfølge af kohomologisk type, og lad

$$B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots \subseteq Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq E_2^{p,q}$$

være tårnet for denne spektralfølge hørende til (p,q). Vi siger, at et element $e \in E_2^{p,q}$ overlever til det r'te niveau, hvis e ligger i kernen for differentialerne

$d_2, d_3, \ldots, d_{r-1}$. Vi definerer $Z_\infty^{p,q} := \cap_{n\in\{2,3,\ldots\}} Z_n^{p,q}$, det vil sige undermodulen af $E_2^{p,q}$, der består af elementerne, der overlever ethvert niveau. Tilsvarende definerer vi $B_\infty^{p,q} := \cup_{n\in\{2,3,\ldots\}} B_n^{p,q}$. Det kan vises, at $B_\infty^{p,q} \subseteq Z_\infty^{p,q}$, således at vi kan give den ønskede definition

$$E_\infty^{p,q} := Z_\infty^{p,q} / B_\infty^{p,q}.$$

$E_\infty^{p,q}$ kaldes målet for spektralfølgen i (p, q).

Fra definitionen ses det, at $E_\infty^{p,q}$ løst sagt er den modul, man når frem til efter en uendelig række beregninger af homologi. Det er dog ofte ikke målet for en spektralfølge vi ønsker at bestemme, men derimod den modul følgen konvergerer mod. Man definere konvergensbegrebet ved hjælp af målet for en spektralfølge, men vi vil ikke gå videre ind i dette.

Der er flere måder, hvorpå en spektralfølge kan opstå. Det kan være via en filtreret differentialgradueret modul eller via et eksakt par bestående af to bigraduerede moduler med tre homomorfier, der gennem en itereret proces bestemmer en spektralfølge (faktisk giver disse to meget forskellige metoder anledning til den samme spektralfølge). I beviset for Künneths spektralfølgesætning anvendes et dobbeltkompleks med filtreringer som også giver anledning til en spektralfølge. For en dybere indføring i emnet spektralfølger henvises til [McCleary].

Litteraturliste

[McCleary] J. McCleary: *A User's Guide to Spectral Sequences*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom (2001).

[Weibel] C. A. Weibel: *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom (1994).