Side 9-sætning: Om at tælle $\mathbb{Q}_+$

Taus Brock-Nannestad

De fleste af os kender nok beviset for, at mængden af naturlige tal er ækvipotent med mængden af (positive) rationelle tal. Den konstruktion der benyttes i beviset er imidlertid ikke særlig elegant. F.eks. optræder visse rationelle tal uendeligt mange gange i den liste der konstrueres.

Vi vil her vise en bedre måde at opremse de positive rationelle tal. Tallene i denne opremsning tager formen $b(n)/b(n+1)$, for en passende funktion $b : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, og har følgende egenskaber:

- Ethvert rationelt tal optræder netop én gang i denne liste.
- Tallene $b(n)$ og $b(n+1)$ er indbyrdes primiske, så brøken $b(n)/b(n+1)$ er uforkortelig.

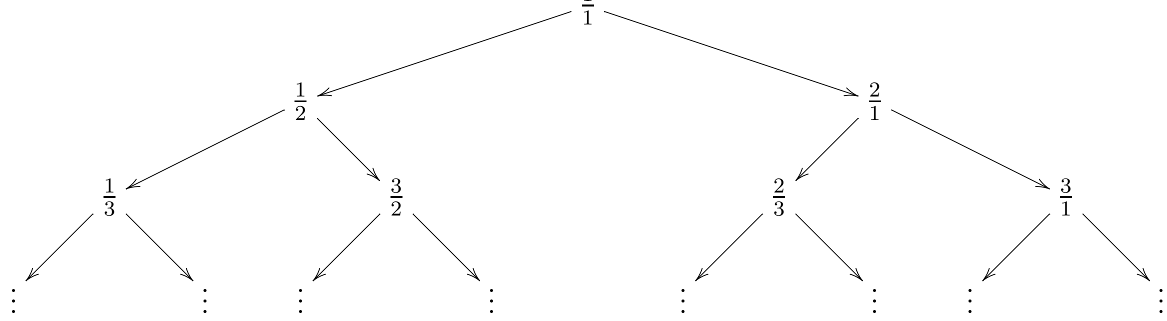
Derudover har funktionen b følgende rare egenskab:

- Tallet $b(n)$ angiver antallet af *hyperbinære* repræsentationer af tallet n. D.v.s. antallet af repræsentationer af n som en sum af potenser af 2, hvor hver potens forekommer 0, 1 eller 2 gange. F.eks. er $b(5) = 2$ da $5 = 2 + 2 + 1 = 4 + 1$.

Først betragter vi følgende *træ* af brøker — i litteraturen kendt som Stern-Brocot-træet. Træet er konstrueret ud fra følgende regler:

- Øverst i træet sidder brøken $\frac{1}{1}$.
- Hver knude $\frac{i}{j}$ har to børn: Venstrebarnet $\frac{i}{i+j}$ og højrebarnet $\frac{i+j}{i}$.

De øverste tre niveauer kan ses i figuren nedenfor.



Vi vil nu vise, at ethvert positivt rationelt tal er repræsenteret netop én gang i dette træ, i en form hvor tælleren og nævneren er indbyrdes primiske.

Lemma. *Ved enhver knude i træet er tælleren og nævneren indbyrdes primiske.*

Bevis. Dette gælder trivielt for den øverste knude $(1/1)$ i træet. Antag, at udsagnet ikke gælder generelt, og lad r/s være en brøk på det højeste niveau i træet hvor udsagnet er falskt. Hvis r/s er et venstrebarn, så er den tilsvarende moderknude $r/(s-r)$ en brøk hvor tæller og nævner ikke er indbyrdes primiske, men som optræder på et højere niveau end r/s, hvilket strider mod vores antagelse.

Hvis r/s er et højrebarn, så er den tilsvarende moderknude $(r-s)/s$, hvilket fører til den samme modstrid. □

Lemma. *Ethvert reduceret rationelt tal optræder i træet.*

Bevis. Dette gælder trivielt for tallet 1. Antag, udsagnet ikke gælder generelt, og udvælg r/s blandt de brøker der *ikke* forekommer, således at nævneren s er mindst mulig, og således at r er den mindste mulige tæller blandt brøkerne med denne nævner.

Hvis $r > s$ så kan $(r-s)/s$ heller ikke optræde i træet, thi ellers ville højrebarnet til denne brøk være r/s som vi antog ikke optrådte i træet. Denne brøk har imidlertid samme nævner som r/s, og en *mindre* tæller, hvilket strider imod vores antagelse om, at r/s var minimal.

Tilfældet $r < s$ behandles fuldstændigt analogt. □

Lemma. *Ethvert rationelt tal optræder højst én gang i træet.*

Bevis. Først bemærker vi, at det rationelle tal 1 kun optræder én gang. Hvis ikke, så skulle en brøk der repræsenterer 1 være et barn af en brøk r/s. Men brøken r/s har de to børn $r/(r+s)$ og $(r+s)/s$, der tydeligvis ikke kan være lig med 1.

Antag, at udsagnet ikke gælder generelt, og lad r/s være det mindste modeksempel, i samme forstand som ovenfor.

Hvis $r < s$, så er r/s et venstrebarn af to forskellige knuder der hver indeholder brøken $r/(s-r)$, hvilket tydeligvis strider mod kravet om, at nævneren s var mindst mulig.

Tilfældet $r > s$ behandles fuldstændigt analogt. □

Vi har nu vist, at ethvert positivt rationelt tal optræder netop én gang i dette brøktræ. Det er nu tydeligt, at vi kan lave en liste over alle positive rationelle tal ved at skrive tallene i den øverste række, efterfulgt af tallene i den næstøverste række, o.s.v..

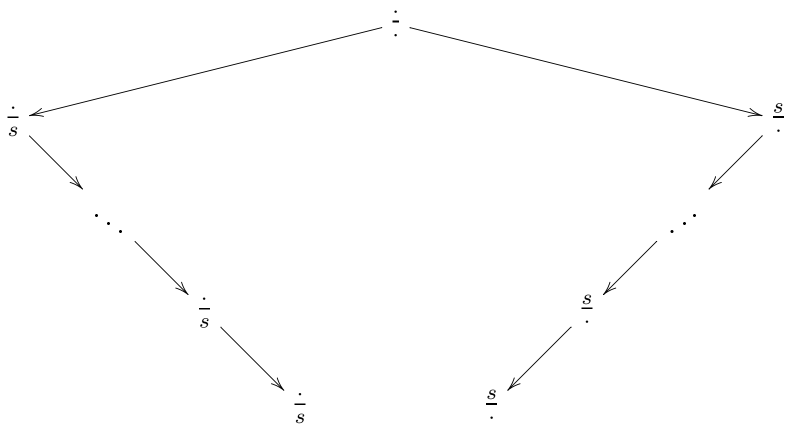
Vi får så en liste af brøker der begynder på følgende måde:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \ldots$$

Som man kan ane ud fra denne liste, så svarer enhver brøks nævner til tælleren i den brøk der kommer umiddelbart efter. Vi vil nu vise, at det gælder for alle brøkerne i denne liste.

Hvis en brøk er et venstrebarn af en specfik moderknude, så vil den brøk der følger umiddelbart efter være det tilsvarende højrebarn der hører til denne moderknude. Udfra definitionen af brøktræet svarer nævneren således til tælleren i brøken der følger umiddelbart efter.

Hvis en brøk er et højrebarn, så har den samme nævner som sin moderknude, og den brøk der følger umiddelbart efter har samme tæller som sin moderknude. Vi kan derfor flytte et niveau op og betragte moderknuderne i stedet. Hvis vi fortsætter på denne måde vil disse to følger af moderknuder til sidst mødes under den samme moderknude, og som vi viste ovenfor, så holdt påstanden i dette tilfælde. Dette kan illustreres ved følgende diagram:



Endelig bemærker vi, at hver række begynder med en brøk af formen $1/s$ og slutter med en brøk af formen $r/1$. Vi har således vist det ønskede udsagn.

Enhver brøk i træet (og listen) har således formen $f(n)/f(n+1)$ for en passende funktion f.

Vi vil nu vise, at denne funktion f er entydigt bestemt, og at den antager de samme funktionsværdier som funktionen b som vi beskrev tidligere.

I brøktræet har brøken $f(n)/f(n+1)$ venstrebarnet $f(2n+1)/f(2n+2)$ og højrebarnet $f(2n+2)/f(2n+3)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \cdots & \frac{f(n)}{f(n+1)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots & \\
\cdots & \frac{f(2n+1)}{f(2n+2)} & & \frac{f(2n+2)}{f(2n+3)} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Udfra den måde træet er konstrueret på må der således gælde, at

$$f(2n+1) = f(n)$$

og

$$f(2n+2) = f(n+1) + f(n).$$

Øjensynlig er f entydigt bestemt udfra disse ligninger samt startværdien $f(0) = 1$.

Vi vil nu vise, at funktionen b, som blev nævnt tidligere, er identisk med funktionen f.

Vi bemærker først, at $f(0) = b(0) = 1$. Antag nu, at $f(k) = b(k)$ for alle $k \leq 2n$.

Givet en hyperbinær repræsentation af tallet $2n + 1$ kan vi konstruere en repræsentation af n ved at fjerne 1-tallet og derefter halvere hvert led. Omvendt kan tage en repræsentation af n, fordoble hvert led og lægge 1 til, hvorved vi får en repræsentation af $2n + 1$. Således må der altså gælde, at $b(2n + 1) = b(n)$.

I en hyperbinær repræsentation af tallet $2n + 2$, så er 2-tallet enten repræsenteret som $1 \cdot 2^1$ eller $2 \cdot 2^0$. Hvis det første er tilfældet, så kan vi halvere hvert led i repræsentationen, hvorved vi får en repræsentation af $n + 1$. I det andet tilfælde kan vi fjerne de to 1-taller og halvere de resterende led, hvorved vi får en repræsentation for n. Omvendt kan man ud fra repræsentationer af n og $n + 1$ konstruere samtlige repræsentationer for $2n + 2$. Således må der gælde, at $f(2n + 2) = f(n + 1) + f(n)$.

Således opfylder funktionen b de samme startbetingelser og ligninger som funktionen f. Da f er entydigt bestemt må der således gælde, at $f(n) = b(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$

Side 9-sætningen. *Til ethvert positivt rationalt tal q findes der et entydigt bestemt heltal n, så q kan skrives som uforkortelig brøk på formen $b(n)/b(n + 1)$, hvor $b(n)$ er antallet af hyperbinære repræsentationer af n.*