Hvad forsker jeg i

Søren Eilers

Klassifikation af skiftrum

Et skiftrum over et endeligt alfabet $\mathfrak{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ er en delmængde $\underline{\mathsf{X}}$ af $\mathfrak{a}^{\mathbb{Z}}$ som er lukket i produkttopologien induceret af den diskrete topologi på $\mathfrak{a}$ og under skiftafbildningen

$$\sigma : \mathfrak{a}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathfrak{a}^{\mathbb{Z}} \qquad \sigma((a_n)) = (a_{n+1}).$$

Eftersom σ er en homøomorfi af $\underline{\mathsf{X}}$ på sig selv kan vi tænke på $(\underline{\mathsf{X}}, \sigma)$ som et meget simpelt dynamisk system, og sådanne skiftrum har haft stor betydning i teorien for dynamiske systemer som særligt tilgængelige modeller for mere komplekse systemer. For eksempel spillede de en stor rolle i at vise at et trelegemeproblem (som fx bevægelsen af en lille planet i et dobbeltsolsystem) altid har regioner med kaotisk bevægelse.

Eksempel 1. *Lad $\mathfrak{a} = \{0, 1\}$. Et skiftrum i $\mathfrak{a}^{\mathbb{Z}}$ defineres ved*

$$\{(a_n) \mid \forall N : a_N a_{N+1} \neq 11\}$$

Dette skiftrum indeholder alle elementer der som

$$\cdots 0001001000101010000100001000010001010101 0 \cdots \tag{1}$$

ikke indeholder delordet "11".

På trods af deres simple udseende udgør skiftrummene en meget stor og generel klasse med fascinerende og righoldig intern struktur, og fordi skiftrummene er givet på så konkret vis kan man stille og besvare spørgsmål om dem der ville være umulige for generelle dynamiske systemer. Fx kan man vove sig ud i spørgsmålet om **klassifikation** af dem... altså i spørgsmålet om hvordan man bærer sig ad med at se på to sådanne skiftrum om de er ens eller forskellige. Jeg er blevet ledt til at interessere mig for dette spørgsmål lidt ad omveje gennem et kontaktpunkt med mit hovedforskningsfelt, operatoralgebraen.

Inden man går i gang med at klassificere må man naturligvis afklare hvad man mener med "ens" og "forskellig". Det fundamentale lighedsbegreb i denne sammenhæng er

Definition 1. To skiftrum $(\underline{\mathsf{X}}, \sigma)$ og $(\underline{\mathsf{Y}}, \sigma)$ kaldes *konjugerede* hvis der findes en homøomorfi $\phi : \underline{\mathsf{X}} \longrightarrow \underline{\mathsf{Y}}$ med egenskaben $\phi \circ \sigma = \sigma \circ \phi$.

De to rum skal altså være ens topologisk set, på en sådan måde at skiftstrukturen bevares. Denne form for lighed er imidlertid i mange sammenhænge ret restriktiv, og man ser derfor i stedet på en bred vifte af svagere begreber. Jeg vil her nøjes med at indføre

Definition 2. Sæt
$$S\underline{\mathsf{X}} = (\underline{\mathsf{X}} \times \mathbb{R})/\sim$$
med ækvivalensrelationen genereret af kravet $(x, t+1) \sim (\sigma(x), t)$ og udstyret med kvotienttopologi. To skiftrum $(\underline{\mathsf{X}}, \sigma)$ og $(\underline{\mathsf{Y}}, \sigma)$ kaldes *strømningsækvivalente* (eng.: flow equivalent) hvis der findes en homøomorfi $F : S\underline{\mathsf{X}} \longrightarrow S\underline{\mathsf{Y}}$ med egenskaben at der for hvert $x \in S\underline{\mathsf{X}}$ findes en voksende afbildning $f_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ så at
$$F(\phi_t(x)) = \phi_{f_x(t)}(F(x)).$$
hvor $\phi_t([x, s]) = [x, s + t]$.

Løst sagt er $S\underline{\mathsf{X}}$ en kontinuisering af $\underline{\mathsf{X}}$, og strømningsækvivalens betyder at kontinuiseringerne er ens på en retningsbevarende måde. Den komplicerede definition til trods er strømningsækvivalens et ret naturligt begreb, hvilket bedst af alt ses ved følgende observation:

Proposition 1. *Strømningsækvivalens er ækvivalensrelationen genereret af konjugerethed og*
$$(\underline{\mathsf{X}}, \sigma) \sim (\underline{\mathsf{X}}^{a\star}, \sigma)$$
hvor $a \in \mathfrak{a}$ og $\underline{\mathsf{X}}^{a\star}$ er defineret ved at i hvert $x \in \underline{\mathsf{X}}$ erstatte enhver forekomst af "a" med "$a\star$".

Et element som det givet i (1) vil således give anledning til et element

$$\cdots 0001\star001\star0001\star01\star01\star00001\star00001\star00001\star0001\star01\star01\star01\star0 \cdots$$

i $\underline{\mathsf{X}}^{1\star}$, der er et skiftrum i alfabetet $\{0, 1, \star\}$. Det er rimeligt at tænke på strømningsækvivalens som frembragt af konjugerethed og "forsinkelser".

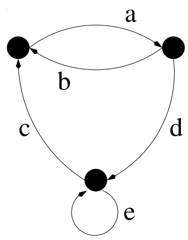
En effektiv måde at specificere et skiftrum er ved at angive en samling af forbudte ord som vi gjorde i Eksempel 1. Det generiske skiftrum kan imidlertid kun specificeres med en uendelig familie af forbudte ord, så klassifikationsspørgsmålet er derfor særligt interessant i de specielle tilfælde hvor skiftrummet kan specificeres ved en endelig datamængde, sådan som vi i Eksempel 1 kunne nøjes med at specificere at "11" var ulovligt. I sådanne tilfælde kan man ligefrem håbe på at der findes en algoritme der ud fra specifikationerne af to skiftrum kan afgøre om de er ens eller forskellige.

Imidlertid er det ukendt om en sådan algoritme eksisterer selv hvad angår konjugerethed af de særligt simple skiftrum *af endelig type*. Sådan benævner man de skiftrum der beskrives ud fra en matrix med indgange i $\mathbb{N}_0$ på følgende vis. Ud fra $n \times n$-matricen A dannes en orienteret graf med n knuder ved at der afsættes a_{ij} kanter fra knude i til knude j for hvert par $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Vi benytter herefter mængden af kanter som alfabet og definerer skiftrummet $\underline{\mathsf{X}}_A$ som mængden af dobbelt uendelige omvandringer på grafen.

Eksempel 2. *Har vi matricen*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og navngiver kanterne som på



får vi et skiftrum over alfabetet $\{a, b, c, d, e\}$ *som fx har elementet*

$$\cdots ababadeeecadcadecababadeeec \cdots$$

Opgave 1. Vis, at skiftrummene i Eksempel 1 og 2 er konjugerede.

Williams viste

Sætning 1. *Lad A og B være matricer som herover. De to skiftrum $\underline{\mathsf{X}}_A$ og $\underline{\mathsf{X}}_B$ er konjugerede hvis der findes $C_0, \dots, C_l$ med*

$$A = C_0 \sim C_1 \sim C_2 \sim \cdots \sim C_l = B.$$

hvor relationen $C \sim C'$ er givet ved

$$\begin{gathered} \exists D \in \mathbf{M}_n^m(\mathbb{N}_0), E \in \mathbf{M}_m^n(\mathbb{N}_0) : \\ C = DE, C' = ED, \end{gathered}$$

Generelt kan man ikke sige noget om længden l af sådan en kæde eller om størrelsen af de indgående matricer $C_1, \dots, C_{l-1}$ — bemærk at D og E ikke behøver at være kvadratiske — så det er ikke kendt om denne relation er generelt afgørlig i den forstand at der kan gives algoritmer som beskrevet herover. Der var længe håb om at konjugererethed var det samme som en egenskab benævnt *svag skiftækvivalens* som ved hjælp af de såkaldte dimensionsgrupper faktisk er kendt at være afgørlig. Men indenfor de sidste år er der fremkommet eksempler der viser at dette ikke er tilfældet.

Holder man sig til strømningsækvivalens er billedet meget simplere:

Sætning 2. *Lad A og B være irreducible matricer. De to skiftrum $\underline{\mathsf{X}}_A$ og $\underline{\mathsf{X}}_B$ er strømningsækvivalente hvis*

$$\mathbb{Z}^n / \left[(\mathrm{id} - A)\mathbb{Z}^n\right] \simeq \mathbb{Z}^m / \left[(\mathrm{id} - B)\mathbb{Z}^m\right] \tag{2}$$

og

$$\det(\mathrm{id} - A) = \det(\mathrm{id} - B)$$

Det er let at på algoritmisk vis afgøre hvorvidt de endeligt frembragte grupper i (2) er isomorfe eller ej. De er jo endeligt frembragte.

Substitutionssystemer

Der er andre måder at generere skiftrum ud fra endelige datamængder på. En metode som jeg har interesseret mig ret intensivt for er ved hjælp af *substitutioner.* Det endelige data er i dette tilfælde en afbildning τ som til hvert bogstav i alfabetet $\mathfrak{a}$ knytter et ord skrevet med bogstaver fra $\mathfrak{a}$. Idet vi benævner ord skrevet med bogstaver fra $\mathfrak{a}$ med $\mathfrak{a}^\sharp$ og det tomme ord med ϵ vil vi koncentrere os om afbildninger

$$\tau : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}^\sharp \backslash \{\epsilon\}.$$

Bemærk at vi ved at sammensætte ord kan definere

$$\tau^N : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}^\sharp \backslash \{\epsilon\}$$

for ethvert N og derefter definere et skiftrum

$$\underline{\mathsf{X}}_\tau = \{(a_n) \in \mathfrak{a}^{\mathbb{Z}} \mid \forall N \exists M : a_{-N} \dots a_N \text{ er et delord af } \tau^M(c)\}$$

Her er c et fastholdt bogstav i alfabetet, og for at sikre at $\underline{\mathsf{X}}_\tau$ ikke afhænger af valget af c, kræver man at substitutionen har den egenskab der kaldes *primitiv,* og som jeg ikke vil skrive ud her.

Eksempel 3. *Substitutionen*

$$\tau(1) = 12 \qquad \tau(2) = 13 \qquad \tau(3) = 123$$

er primitiv og i $\underline{\mathsf{X}}_\tau$ er der fx et element

$$\cdots 12131212312131213123121312123121312123121 3123 \cdots$$

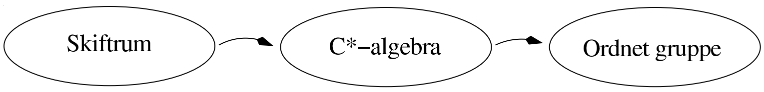
Man ser nemt at disse skiftrum kun kan være konjugerede eller strømningsækvivalente med skift af endelig type hvis de i en vis forstand er degenererede. Faktisk kan man sige at det eneste disse skiftrum har til fælles med dem af endelig type er den endelige præsentation der gør dem interessante i klassifikationssammenhæng.

Klassifikationsspørgsmålet for sådanne skiftrum er temmelig åbent på nuværende tidspunkt. Det mest fundamentale problem er at det er svært at pege på så mange og tilstrækkeligt fintfølende værktøjer at man kan begynde at håbe på at de kan benyttes til at løse opgaven på samme måde som grupperne i (2) løste det for strømningsækvivalens og dimensionsgrupperne løste det for svag skiftækvivalens.

I et projekt med Toke Meier Carlsen lykkedes det os at definere nye invarianter for substitutionssystemer op til strømningsækvivalens ved at inddrage operatoralgebraer, funktionalanalytiske objekter der *a priori* har meget lidt at gøre med skiftrum. Det er et meget interessant projekt for mig at undersøge hvor langt denne nye invariant i samspil med tidligere kendte invaraianter rækker i forhold til at afgrænse strømningsækvivalensklassere for substitutionssystemer og andre systemer

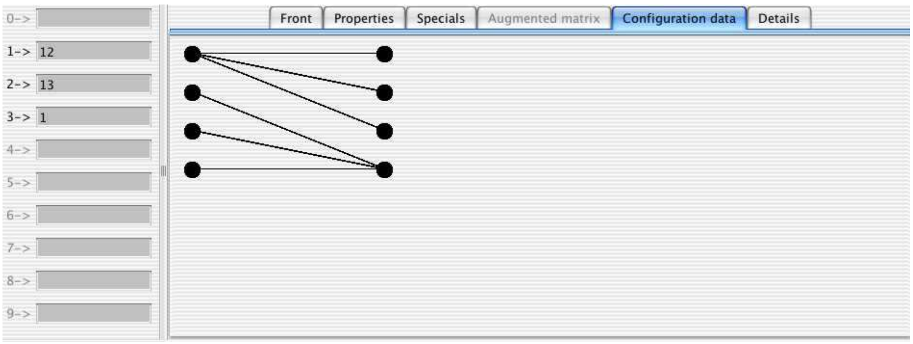
Da dette projekt kun er i sin vorden vil jeg i stedet afslutte med at skitsere hvordan metoder fra operatoralgebra kan spille en rolle her. Dette er på ingen måde et isoleret fænomen – tværtimod tegner der sig et ret generelt billede af at de invarianter man ret naturligt kommer frem til ad denne (om)vej er værdifulde for og svære at udlede direkte fra skiftrumsteorien. Fx var operatoralgebraiske metoder vigtige ved indførslen af de ovenfor nævnte dimensionsgrupper.

Vores invariant er en ordnet gruppe, dvs. en abelsk gruppe udstyret med en samling af positive elementer. Vi knytter ordnede grupper til substitutioner i de to trin



Første trin er en konstruktion indført af Kengo Matsumoto som til ethvert skiftrum knytter en C^*-algebra, altså en mængde af operatorer på et hilbertrum der er lukket under de naturlige operationer. Det er essentielt for konstruktionen at vide at to strømningsækvivalente skiftrum giver det der kaldes stabilt isomorfe C^*-algebraer, og dette resultat bør i den relevante kontekst tilskrives Toke Meier Carlsen. Det andet trin er at benytte den såkaldte K-funktor på den resulterende C^*-algebra, der til enhver C^*-algebra knytter en ordet abelsk gruppe, igen på invariant vis.

Målet med mit projekt med Toke Meier Carlsen var simpelthen at identificere denne sammensatte afbildning. Dette viste sig at være så teknisk krævende at vore resultater måtte deles op i fire artikler, blandt andet fordi vi undervejs erkendte behovet af at give en fuldkommen algoritmisk beskrivelse af afbildningen, således at vi kunne skrive et computerprogram til at beregne en matrix der beskriver den ordnede gruppe ud fra den valgte substitution. Ved hjælp af programmet kunne vi sidenhen få en bedre forståelse af hvordan invarianten fungerede og finde frem til eksempler der afklarede rækkevidden af den. Vi fandt fx et par af substitutioner der ikke kunne adskilles af nogen anden kendt invariant, men godt kunne vises



Figur 1: Skærmdump fra det udviklede program

at være forskellige med vores, og viste dermed at vores invariant var uafhængig af disse.

På `http://www.math.ku.dk/~eilers/myexpo.html` *findes udvalgte referencer, link til det ovenfor nævnte program, og et vink til opgave 1.*