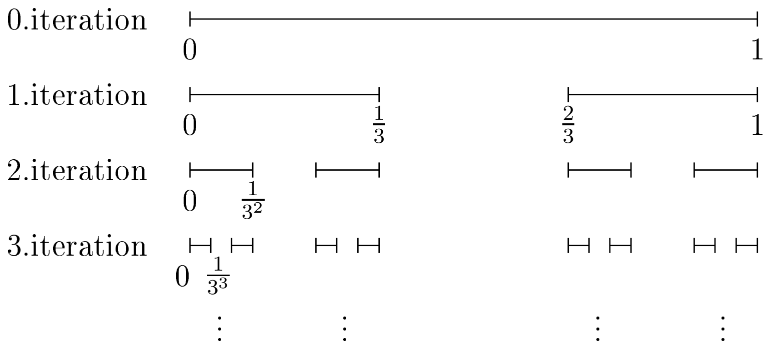
Hausdorff dimension af fraktaler ved selv-similaritet

Henning Røigaard-Petersen

De fleste kender til begrebet fraktaler. Ordet betyder i sig selv "at brække"og kommer af latin "fractus". Den vel nok bedst kendte af disse er Cantor mængderne der kan konstrueres således:
Vælg $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Tag intervallet $I_{0,1} = [0, 1]$, bræk det i tre stykker og smid det midterste bort. Tilbage er $I_{1,1} = [0, \lambda], I_{1,2} = [1 - \lambda, 1]$. Processen fortsættes nu således: Givet intervaller $I_{k-1,1}, \ldots, I_{k-1,2^{k-1}}$ defineres intervallerne $I_{k1,1}, \ldots, I_{k,2^k}$, ved at tage et interval $I_{k-1,j}$ og fra dette fjerne et interval af længde $(1 - 2\lambda)d(I_{k-1,j}) = (1 - 2\lambda)\lambda^{k-1}$ fra midten af dette, således skabes der to nye intervaller. Vi har således at alle intervallerne $I_{j,k}$ har længde λ^k. Cantormængden $C(\lambda)$ defineres nu ved

$$C(\lambda) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}$$

Oftest betragter man cantormængden med $\lambda = \frac{1}{3}$. Jvf figuren nedenfor:



Der er et problem med fraktaler og det sædvanlige dimensionskoncept i $\mathbb{R}^n$. Da $C(\lambda) \subseteq \mathbb{R}$ ville man ved første øjekast tilskrive den dimension 0 eller 1, men ingen af disse er tilfredsstillende: 0 er for lidt og 1 er for meget. Vi søger altså en meningsfyldt dimension d opfyldende $0 < d < 1$. Der findes utallige dimensionsbegreber, men en alment anvendt måde at gøre dette på, er ved hjælp af Hausdorff dimensionen. Mandelbrot definerede da også fraktaler som værende mængder hvis Hausdorff dimension ikke er heltallig. Desværre er dette dimensionsbegreb ikke altid lige let at arbejde med. I denne artikel vil jeg illustrere en metode til bestemmelse af Hausdorff dimension vha. konceptet *Selv-Similaritet* af mængder. Det er kendt fra Mat2 at Hausdorff dimensionen af $C(\frac{1}{3})$ er $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$. Vi vil anvende teorien til at finde dimensionen af Koch kurven som indføres til sidst.

Kort om Hausdorff målet

For at forstå Hausdorff dimensionen skal man forstå Hausdorff målet. Desværre er der ret meget at sige herom, men en kort udgave er: Hausdorff målet er i virkeligheden en ret stor familie af mål $(\mathcal{H}^s)_{s\in[0,\infty]}$. Den kan indføres på separable metriske rum X med passende pæne egenskaber, herunder $\mathbb{R}^n$, og måler samtlige delmængder af X. Lader vi $d(A)$ angive diameteren af $A \in \mathcal{P}(X)$ er

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^s \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, d(E_i) < \delta, E_i \in \mathcal{P}(X)\}$$

Det skal dog nævnes at vi ikke er sikret at $(X, \mathcal{P}(X), \mathcal{H}^s)$ er et mål i 3MI forstanden, men derimod kun et ydre mål. Vi er kun sikret at $(X, \mathcal{B}(X), \mathcal{H}^s)$ er det, men vi omtaler alligevel afbildningen som et mål.

En central egenskab ved målet er

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty \text{ når } s < t < \infty$$

Fidusen er at $\mathcal{H}^s(A)$ enten er ∞, 0 eller imellem, når s varierer, *og* dersom den antager begge af værdierne 0 og ∞, vil $\mathcal{H}^s(A)$ skifte fra ∞ til 0 i netop ét $s \in [0, \infty[$.

$$\underset{0}{|}\underbrace{-----------------}_{\mathcal{H}^i(A)=\infty}\underset{s}{|}\underbrace{-----------------}_{\mathcal{H}^j(A)=0}$$

Værdien af målet i et sådan s kan vi ikke sige noget generelt om.

Vi kan da definere Hausdorff dimensionen ved

Definition 1. *Hausdorff dimension*
Lad X være et separabelt rum udstyret med Hausdorff målet $\mathcal{H}^s$. Da er Hausdorff dimensionen af en mængde $A \subseteq X$:

$$\dim_H A = \begin{cases} 0 & \forall s \in [0, \infty[: \mathcal{H}^s(A) = 0 \\ \infty & \forall s \in [0, \infty[: \mathcal{H}^s(A) = \infty \\ \sup\{s \mid \mathcal{H}^s(A) = \infty\} & \textit{ellers} \end{cases}$$

Begrebet har bl.a. den pæne egenskab at $\text{Dim}_H \mathbb{R}^n = n$ og $\text{Dim}_H A \leq \dim_H B$ for alle $A \subseteq B$. Det bør nu stå klart at denne dimension ikke altid er nem at bestemme. For nærmere om målet, se [1].

Selv-similaritet

Man kan hurtigt overbevise sig selv om at nogle af de kendte fraktaler som f.eks. Cantor mængden $C(\lambda)$ kan beskrives som en art grænse-mængde ved gentagende anvendelse af afbildningerne, som f.eks. $S_1, S_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$S_1(x) = \lambda x, \;\; S_2(x) = \lambda(x-1)+1$$

på intervallet $[0,1]$. Dette koncept vil vi lige formalisere.

Definition 2. *Similaritet*
En afbildning $S : X \to X$ siges at være en similaritet *dersom:*

$$\exists r \in \mathbb{R}_+ \forall x, y \in X : d(S(x), S(y)) = rd(x,y)$$

I tilfældet $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d)$ kan det vises at S er en similaritet hvis og kun hvis S er sammensat af afbildninger

$$\mu_r \circ \tau_b \circ O$$

for passende $\mu_r(x) = rx$, translation $\tau_b = x - b$ og ortogonal transformation O. En similaritet kan således betragtes som en "flytning og skalering"af $\mathbb{R}^n$.

Similariteterne er de afbildninger, der ved gentagen anvendelse, skal "frembringe"vores fraktal. Da de fraktaler vi er interesseret i generelt består af iterrationer der formindsker figuren, vil vi fra nu af kun betragte similariteter der er kontraktioner, dvs. $0 < r < 1$.

Definition 3. *Lad (X,d) være et metrisk rum og $A \subseteq X$. Er $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ en mængde af similariteter $S_i : X \to X$, da defineres*

$$\mathcal{S}(A) = \bigcup_{S_i \in \mathcal{S}} S_i(A)$$

Eksempel 1. *Afbildningerne $S_1, S_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $S_1(x) = \frac{1}{3}x, S_2(x) = \frac{1}{3}(x-1)+1$ er similariteter med $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$, og vi finder at $\mathcal{S}([0,1]) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.*

Der knytter sig en vigtig størrelse til en mængde af disse similariteter. Lader vi $r_1, \ldots, r_N$ være de tilhørende Lipschitz konstanter, så vil afbildningen $\gamma(t) = \sum_{i=1}^{N} r_i^t$ være en kontinuert aftagende funktion med $\gamma(0) = N$ og $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$. Der findes da et entydigt bestemt $D \in \mathbb{R}$ så

$$\gamma(D) = \sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$$

Dette D kalder vi *similaritetsdimensionen* af $\mathcal{S}$.

Det vil vise sig at D er Hausdorff dimensionen for visse *selv-similære mængder*, f.eks. Cantor mængden, hvilket nemt bekræftes.

Invariante mængder og mål

Lad $\mathcal{S}$ være en endelig mængde af similariteter. En delmængde $K \subseteq X$ siges at være *invariant under* $\mathcal{S}$ dersom

$$\mathcal{S}(K) = K$$

Det viser sig at enhver mængde af similariteter har en sådan *entydigt bestemt begrænset og afsluttet* invariant mængde. Betragt mængden $\mathcal{B}(X)$ af afsluttede og begrænsede delmængder af X, og udstyr den med den fra Mat2AN velkendte Hausdorff metrik ρ. Det viser sig at $(\mathcal{B}(X), \rho)$ er et fuldstændigt metrisk rum (ikke trivielt at vise) og at $E \mapsto \bigcup_{i=1}^{N} S_i(E)$ er en kontraktion. Ved Banachs Fikspunktssætning eksisterer en entydigt bestemt afsluttet og begrænset mængde K der er fikspunkt for $\tilde{S}$. Dette er netop vores søgte K.

Vi vil betegne mængden hørende til $\mathcal{S}$ med $|\mathcal{S}|$.

Eksempel 2. *Lader vi igen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ med S_1 og S_2 som før, kan det nemt indses at $C(\frac{1}{3})$ netop er den invariante afsluttede og begrænsede mængde $|\mathcal{S}|$*

På tilsvarende vis kan vi knytte et invariant sandsynlighedsmål på X til $\mathcal{S}$. Lader vi $\mathcal{M}^1 = \{\mu \,|\, \mu \text{ mål på } X, \mu(X) = 1\}$ kan vi for en Lipschitz afbildning $f : X \to X$ definere

$$f_* : \mathcal{M}^1 \to \mathcal{M}^1, \; f_*(\mu)(E) = \mu(f^{-1}(E))$$

Definition 4. *Lad $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ være similariteter og lad $\rho = \{\rho_1, \ldots, \rho_N\}$ være en vilkårlig mængde af reelle tal opfyldende $0 < \rho_i < 1$ for alle i og $\sum_{i=1}^{N} \rho_i = 1$. $\overline{(\mathcal{S}, \rho) : \mathcal{M}^1} \to \mathcal{M}^1$ er afbildningen givet ved*

$$(\mathcal{S}, \rho)(\nu) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i S_{i*} \nu$$

dvs. for $E \subseteq X$ er

$$(\mathcal{S}, \rho)(v)(E) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \nu(S_i^{-1}(E))$$

Vi siger da at et $\nu \in \mathcal{M}^1$ er invariant mht. $(\mathcal{S}, \rho)$ dersom

$$(\mathcal{S}, \rho)(\nu) = \nu$$

Afbildningen $(\mathcal{S}, \rho)$ er interessant når ρ vælges til at være mængden $r = \{r_1^D, \ldots, r_N^D\}$, hvor r_i er Lipschitz konstanten hørende til S_i og D er similaritetsdimensionen.

Ved at indføre en passende snedig metrik, involverende de afbildninger der er begrænsede og kontinuerte på begrænsede mængder, kan $\mathcal{M}^1$ gøres fuldstændigt og $(\mathcal{S}, \rho)$ en kontraktion. Igen ved Banachs fixpunktssætning eksisterer entydigt bestemt invariant sandsynlighedsmål, betegnet $||\mathcal{S}||$.

Dette måls rolle er ikke lige så klart som mængden $|\mathcal{S}|$, og det er da også blot et værktøj til bestemmelse af Hausdorff dimensionen af $|\mathcal{S}|$. Ikke desto mindre er det vigtigt, og det viser sig at $|\mathcal{S}|$ og $||\mathcal{S}||$ er knyttet sammen på mange måder, f.eks. er støtten for $||\mathcal{S}||$ netop $|\mathcal{S}|$. Vi kan nu indføre Selv-similære mængder, finde pæne egenskaber for disse mht. Hausdorff dimensionen og vise at $C(\frac{1}{3}) = |\mathcal{S}|$ er selv-similær.

Selv-similaritet af mængder

Igen er $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ similariteter med similiaritetskonstanter $\{r_1, \dots, r_N\}$ og similaritetsdimension D.

Definition 5. *Selv-Similær*
Lad $A \subseteq X$ have Hausdorff dimension k. A siges at være selv-similær mht. $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ dersom

1. *A er invariant mht. $\mathcal{S}$.*
2. *$\mathcal{H}^k(A) > 0$*
3. *$\mathcal{H}^k(A_i \cap A_j) = 0$ for alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$ så $i \neq j$.*

Hvor $A_i = S_i(A)$.

Eksempel 3. *Vi har fundet Hausdorff dimensionen af $C(\frac{1}{3})$ til at være $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$. Da $C(\frac{1}{3})_1$ og $C(\frac{1}{3})_2$ er disjunkte, er målet af fællesmængden specielt 0. $C(\frac{1}{3})$ er da selv-similær mht. $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$.*

I det følgende vil vi forlade den generelle tilgang til emnet, lade $X = \mathbb{R}^n$ og kun anvende resultaterne i det foregående med $\rho = \{r_1^D, \dots, r_N^D\}$ (similaritets-konstanterne).

Sætning 4. *Lad $K = |\mathcal{S}|$ og $\dim_H K = d$. Da gælder:*

1. *$\mathcal{H}^D(K) < \infty$, specielt er $d \leq D$.*
2. *Dersom $0 < \mathcal{H}^d < \infty$ gælder*

$$K \text{ er selv-similær } \Leftrightarrow d = D$$

Eksempel 5. *Vi kender dimensionen af $C(\frac{1}{3})$. Da den er sammenfaldende med similaritetsdimensionen giver 4 at $C(\frac{1}{3})$ er Selv-similær. Omvendt, ved vi at $C(\frac{1}{3})$ er selv-similær, så Hausdorff dimensionen må være lig Similaritetsdimensionen.*

For nu at kunne bestemme Hausdorff dimensionen af selv-similære mængder, skal vi bruge en hurtig definition

Definition 6. *ÅMB*
$\mathcal{S}$ siges at opfylde Åben mængde betingelsen *dersom der eksisterer en ikke-tom åben mængde O så*

1. $\bigcup_{i=1}^{N} S_i(O) \subseteq O$.
2. $S_i(O) \cap S_j(O) = \emptyset$ *for* $i \neq j$.

Eksempel 6. $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ *opfylder klart ÅMB med* $O =]0,1[$. *Hvert trin i iterationen giver os samme interval som afbildet under "Cantor Mængden"i det tidligere kapitel, blot med endepunkterne fjernet.*

Der er nu teorien for alvor bliver tung, og anvendelsen af målet $||\mathcal{S}||$ og egenskaben supp $||\mathcal{S}|| = |\mathcal{S}|$ bliver stærkt nødvendigt og ikke-trivielt. Når støvet har lagt sig står hovedsætningen tilbage:

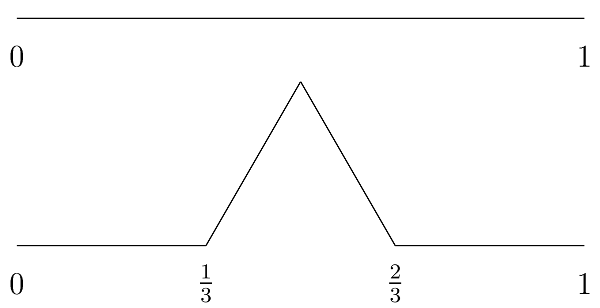
Sætning 7. *Antag at* $\mathcal{S}$ *opfylder ÅMB med en begrænset mængde, og lad* $K = |\mathcal{S}|$ *og* D *similaritetsdimensionen af* $|\mathcal{S}|$.
Da gælder:

$$\dim_H K = D$$

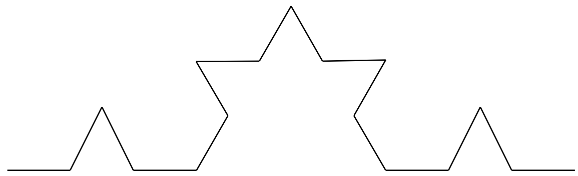
Lad os anvende dette på Koch kurven

Koch kurven

Koch kurven er en delmængde af $\mathbb{R}^2$. Udgangspunktet for iterationen er en ret linie, f.eks. intervallet $[0,1]$. Vi tager den midterste trediedel af linien, og oprejser en ligesidet trekant med sidelængde svarende til det midterste liniestykke, mens de to endestykker efterlades urørt. Herved fremkommer fire liniestykker:



Processen kan nu gentages på hver af liniestykkerne, hvorved der fremkommer 16 liniestykker:



Processen fortsættes hvorved antalet af liniestykker og trekanter vokser kraftigt, men deres længde aftager! En interessant observation er, at antallet af liniestykker vokser hurtigere en deres længde aftager. Efter det n.trin vil der være 4^n liniestykker, hver af længde $\frac{1}{3^n}$. Den samlede længde af kurven efter den n'te iteration er da

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

En konsekvens heraf er at grænsen af iterationer vil have uendelig længde. Koch kurven defineres til at være grænsen for disse iterationer! På trods af denne egenskab er Koch kurven begrænset. Lad A_n betegne arealet mellem Koch kurven og linien givet ved intervallet $[0,1]$, med $A_0 = 0$. I det n.te trin øges A_{n-1} med arealet svarende til de 4^{n-1} trekanter vi tilføjer. Vi kan vurdere denne størrelse opad ved i stedet at tilføje arealet af kvadratet omspændende trekanterne. Disse har areal $\left(\frac{1}{3^n}\right)^2$. Vi har altså:

$$A_n < A_{n-1} + 4^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = A_{n-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^n$$

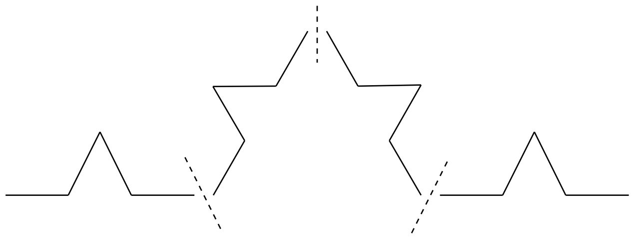
Fortsættes den rekursive betragtning fås

$$A_n < \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^n$$

Dette er en geometrisk række på nær konstantled. Vi kan altså vurdere arealet opdad ved:

$$\lim_{n\to\infty} A_n < \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{4}{3^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{3^2}} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

At finde selv-similariteter for Koch kurven går noget nemmere ved at indse at kurven, på ethvert niveau i iterationen, er sammensat af 4 kopier af sig selv.



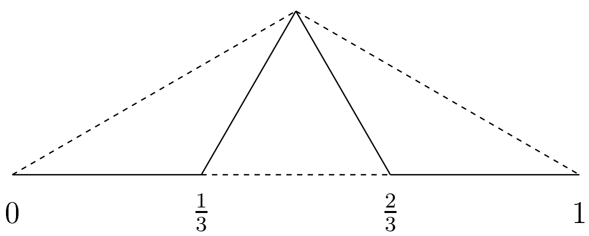
Vi starter i trin 0 med en linie af længde 1. Denne skaleres i trin 1, hvor vi får en linie af længde $\frac{1}{3}$, sammensat 4 gange med sig selv, og evt. drejet i en vinkel på $\frac{\pi}{3}$ i positiv eller negativ retning. Denne proces bliver så ved. Dvs. de similariteter vi skal bruge skal netop kunne skalere og dreje samt tanslatere. Man kan hurtigt overbevise sig selv om at Koch kurven er frembragt af similariteterne $S_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der for $i = 1, 2, 3, 4$ og $x \in \mathbb{R}^2$ er givet ved:

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= \frac{1}{3}x \\
S_2(x) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
S_3(x) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & \sin(\frac{\pi}{6}) \\ -\sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
S_4(x) &= \frac{1}{3}x + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

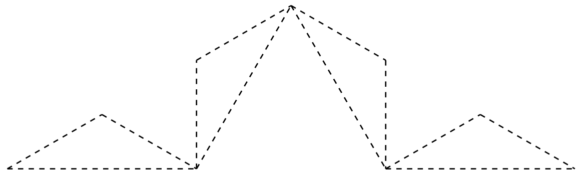
De er alle en skalering, S_4 er yderligere en tanslatering mens S_2 og S_3 tillige er drejninger i positiv hhv. negativ omløbsretning, med en vinkel på $\frac{\pi}{3}$.

De er alle oplagt similariteter med similaritetskonstant $\frac{1}{3}$. Mængden $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ har da similiaritetsdimension $D = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.261$.

Betragt den åbne mængde O givet ved det indre af det konvekse hylster om den 1. iteration:



Anvendes similariteterne på O fås følgende:



Man kan nu overbevise sig om at $\mathcal{S}$ opfylder ÅMB med O. Ved sætning 7 er

$$\dim_H |\mathcal{S}| = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$$

Specielt er Koch kurven en fraktal.

Litteraturliste

[1] M.C. Kaspersen, H. Røigaard-Petersen, *Dimensionsbegreber i Topologien*, Fagprojekt F2004. Tilgængeligt på www.math.ku.dk/∼moller/students/specialer.html