Mere om tælleligheden af de rationale tal

Stefan Holm

I sidste nummer af FAMØS gav Taus et alternativt bevis for den velkendte sætning om tælleligheden af $\mathbb{Q}$. Men ét bevis er jo aldrig nok, så her følger endnu to alternative argumenter for at der faktisk kun er $\aleph_0$ forskellige brøker.

Bevis nr. 1. Vi bemærker først at for et givet $x \in \mathbb{Q}$ kan vi finde entydige tal $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$ og $r \in \{-1, 1\}$ med $\mathrm{sfd}(p, q) = 1$, så $x = r\frac{p}{q}$. For at sikre os at den postulerede entydighed faktisk holder, skynder vi os at sætte $0 = 1 \cdot \frac{0}{1}$.

På grund af entydigheden af vores valg, kan vi opfatte p, q og r som funktioner af x. Og nu er det så ligetil at definere en afbildning $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ ved simpelthen at sætte

$$f(x) = 2^{p(x)} 3^{q(x)} 5^{r(x)+1}.$$

Injektiviteten, og dermed tælleligheden af $\mathbb{Q}$ følger umiddelbart af aritmetikkens fundamentalsætning. $\square$

Bevis nr. 2. Vi vil atter lege lidt med at finde kanoniske fremstillinger af de rationale tal, og derefter udnytte dem til at give et argument for tælleligheden. Som før kan vi for ethvert $x \in \mathbb{Q}$ finde entydige $p \in \mathbb{Z}$ og $q \in \mathbb{N}$ med $\mathrm{sfd}(p, q) = 1$, så $x = p/q$ — brugen af skråstreg i stedet for almindelige brøkstreg er bevidst.

Som det forhåbentlig er velkendt for læserne af dette blad, har ethvert ikke-negativt heltal en fremstilling som et base 8-tal, der bliver entydig hvis vi forbyder foranstillede nuller (bortset fra i tilfældet 0, selvfølgelig, hvor entydigheden kan sikres ved at vi kræver at der kun er ét 0 i fremstillingen). Hvis vi vil have alle heltal med, bliver vi nødt til at tilføje $-$ til mængden af tilladte symboler, men fremstillingen forbliver entydig (igen er der et 0 der driller, men hvis nu vi pænt undlader at skrive -0, er der intet problem).

Hermed har vi en entydig fremstilling af ethvert rationalt tal som en streng af symboler fra mængden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, -, /\}$, og vi kan definere en injektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}_0$ ved simpelthen for et givet rationalt tal at tage den tilknyttede tekststreng, i denne tekststreng erstatte symbolerne "$-$" og "/" med "8" og "9", og opfatte den nye tekststreng som et tal skrevet i den almindelige base 10. $\square$