Banachalgebraer og algebraens fundamentalsætning

Stefan Holm

Som bekendt har enhver tilstrækkeligt interessant matematisk teori et bevis for algebraens fundamentalsætning.

Jeg vil hér give et baseret på et par grundlæggende funktionalanalytiske og banachalgebraiske grundsætninger (samt en lille smule ren algebra). Beviset bør uden problemer forstås af alle der har haft 3AN (med projekt om banachalgebraer) og 3AL — eller tilsvarende.

Side 9-sætning. *Lad P betegne et normeret polynomium med komplekse koefficienter og af grad $n \geq 1$. Da vil der findes komplekse tal $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ så $P(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$.*

Bevis. Hvis vi lader $\mathbb{L}$ betegne spaltningslegemet for P over de komplekse tal, ved vi at $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{L} < \infty$. Det vi ønsker er at $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{L} = 1$.

Og her kommer funktionalanalysen så ind i billedet. Da dimensionen af $\mathbb{L}$ er endelig, vil enhver norm (fx den euklidiske) gøre det til et banachrum, og endvidere vil enhver lineær afbildning være kontinuert.

Særligt vil multiplikationsafbildningen være seperat kontinuert i de to variable. Ved passende skalering kan den altså gøres til en ækvivalent, submultiplikativ norm, hvormed $\mathbb{L}$ er en banachalgebra.

Men Gelfand-Mazurs sætning fortæller os at enhver kompleks divisions-banachalgebra vil have dimension 1, og dermed er vi færdige. $\square$