FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

19. årgang, nr. 2, december 2005

Augustus De Morgan (1806-1871), britisk algebraiker og logiker. Opfandt begrebet 'matematisk induktion' og foregreb dele af Booles algebraiske logik.

Indhold

Ti år senere

I S15 blev fundet nogle gamle numre af FAMØS. I dem kan man bl.a. læse om den ekstra etage E-bygningen fik i 1995, og om det køkken der er blevet stillet til rådighed for de studerende.

I oktobernummeret fra 1995 er der en artikel om rygeområderne i Vandrehallen. Artiklens skribent er glad for at der netop er kommet røgfri områder. Han finder det dog beklageligt at Vandrehallen ikke er helt røgfri, og bemærker at det ikke er helt i overensstemmelse med loven.

I oktobernummeret fra 1995 er der også en sur leder hvori redaktøren truer med at julenummeret bliver det sidste hvis ikke nye studerende melder sig i redaktionsgruppen. Mange af formuleringerne ligner temmeligt meget dem der blev brugt i foregående nummer af FAMØS da der blev truet med præcis det samme.

Det er da egentlig pudsigt at det ti år senere er de samme ting der foregår.

I julenummeret fra samme år er redaktøren forresten vildt begejstret fordi nye har meldt sig i redaktionsgruppen. Gæt hvad der står i *dette* års julleder:

Sikke julegaver FAMØS har fået i år! Og så endda før tid. To nye har meldt sig i redaktionsgruppen: Mikkel Abrahamsen ('05) og Nikolaj Strands ('04). Vi har modtaget fire opgavebesvarelser, og en interessant formidlingsaktivitet. Og sørme om ikke en VIP har skrevet til "Hvad forsker jeg i?".

Som prikken over i'et lykkedes det redaktøren en sen aften på Caféen? at overtale TB til at skrive en artikel om en krigsmatematiker.

Så for FAMØS er det en god jul.

Vi på redaktionen håber at I alle vil slippe helskindede gennem obligatoriske afleveringer, temaopgaver og deslige, og frem til en god jul.

Om at være ph.d.-studerende

David Kyed

Hvad er dette?

Opgaven fra FAMØS-redaktionen lød sådan set meget nem: "Kan du ikke lige skrive en enkelt side, om hvordan det er at være ph.d.-studerende, og om hvad du går og laver?". Men hvor skal man begynde, og hvor skal man ende, og hvordan skal man undgå at benytte kostbar spalteplads til ligegyldig information?[1] Lad os starte med det rent formelle. Hvert halve år bliver der opslået ph.d.-stillinger ved det naturvidenskabelige fakultet, og hvis man har erhvervet sig en kandidatgrad, kan man søge en sådan stilling. Det foregår ved, at man kontakter en af de fastansatte VIP'er, og spørger om vedkommende har lyst til at vejlede en gennem et eventuelt ph.d.-studium. Der vil typisk være tale om ens specialevejleder. Sammen med denne VIP forfatter man et udkast til et projekt og udfylder de relevante papirer, som så bliver bedømt af en ansættelseskomité. Hvis man er blandt de heldige, får man et brev med besked om at man har fået stillingen et par måneder efter.

Hvad indebærer en sådan stilling?

Når man siger ja til en ph.d.-stilling, forpligter man sig til 840 timers såkaldt pligtarbejde fordelt over de tre år, stillingen varer. Det vil på matematik typisk være en masse undervisning (og forberedelse af samme) af førsteårsstuderende, svarende til ca. 2 MatIntro-klasser, 2 LinAlg-klasser og en sjat anden undervisning. Personligt synes jeg godt om at undervise, og det giver også en smule struktur i hverdagen, hvor resten af ens arbejde ofte er meget fleksibelt, og ligeså godt kan lægges søndag aften, som tirsdag formiddag. Derudover skal man følge kurser på ph.d.-niveau, svarende til ca. et halvt årsværk, og besøge et andet universitet i et halvt år — for at opleve hvordan tingene foregår udenfor HCØ's trygge rammer. Sidst, men *bestemt* ikke mindst, skal man under hele forløbet arbejde med det forskningsprojekt, man beskrev i ansøgningen. Dette skal munde ud i en afhandling, som så skal forsvares overfor en komite af forskere inden for det pågældende felt. På dette sted plejer følgende spørgsmål tit at blive stillet.

Hvordan kan man forske i matematik?

Strategien er sådan set meget simpel. Man bruger først en enorm mængde tid og energi på at nærstudere alt, hvad der

[1] Næppe sådan her!

er skrevet om et lille bitte niche-emne inden for et område der interesserer en. Når det er gjort, prøver man at stille sig selv opgaver inden for det pågældende emne. Det vil sige spørgsmål á la "Kunne man tænke sig at dette eller hint gælder, under antagelse af passende forudsætninger?". Hvis man så formår at svare på et af disse spørgsmål, har man bedrevet forskning — forudsat at der ikke allerede er en anden der har svaret på det pågældende spørgsmål.

I mit tilfælde er emnet von Neumann-algebraer. Dette er et klassisk emne (well, det har i hvert fald ca. 70 år på bagen) inden for disciplinen operator-algebra. I løbet af min kandidat-uddannelse skrev jeg et fagprojekt om den grundliggende teori, og fik derved lidt indblik i hvad sagerne handlede om. Da jeg så skulle i gang med mit speciale, tog jeg en relativt ny artikel[2] og satte mig ind i det teori, jeg manglede for at kunne læse den. På den måde fandt jeg en (ganske snæver) sti frem til forskningsfronten, som jeg så kunne bruge som afsæt for mit ph.d.-projekt. Hvis man har planer om at søge en ph.d.-stilling, vil det nok være en god ide at skrive et speciale om noget relativt nyt matematik. Det bringer ens faglige niveau i vejret, og giver en god startposition for et ph.d-forløb. Målet med ph.d-projektet er at have lavet noget som kan publiceres i et tidsskrift når de tre år er gået. Det er, i grove træk, det der skal til for at ens afhandling kan godkendes, og man kan få ph.d.-graden.

Hvad kan du så blive?

Principielt afskærer man sig ikke fra nogen af de jobmuligheder man har som færdiguddannet kandidat ved at bygge en ph.d.-grad ovenpå, men så vidt jeg ved går de fleste færdige ph.d'er en af følgende to veje: En del søger stillinger i det private erhvervsliv (bl.a. hos Nordea, Cryptomathic, Edlund), og en anden del fortsætter i universitetsverdenen som forskere. Dette indebærer typisk en del år i midlertidige stillinger rundt omkring på forskellige universiteter, med henblik på en fast ansættelse som lektor en skønne dag.

[2] Om L^2-homologi for von Neumann algebraer. Se evt. `http://www.arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0309/0309343.pdf`

Operatoralgebra og atombomber: Historien om John von Neumann

Morten Hornbech

Få personer fra det 20. århundrede har bidraget til udviklingen af så mange forskellige områder inden for naturvidenskab som John von Neumann, der med sine mange enestående resultater inden for ren og anvendt matematik, fysik og datalogi, må anerkendes som en af den moderne tids helt store drivkræfter. I denne lille artikel vil jeg kort beskrive von Neumanns liv og arbejde, med fokus på hans rolle i Manhattan-projektet, samt udviklingen af langtrækkende ballistiske missiler, der var afgørende for USA's overtag i den kolde krig.

Vidunderbarn

John von Neumann blev født ind i en velhavende jødisk familie den 28. december 1903 i Budapest, Ungarn, og det varede ikke mange år inden det stod klart for hans omgivelser at der var tale om et vidunderbarn. Han havde en bemærkelsesværdig hukommelse, og i en alder af 6 år beherskede han allerede flere forskellige sprog, herunder klassisk græsk. Familien Neumann underholdt ofte deres gæster med demonstrationer af den unge Johns usædvanlige evner. En gæst kunne udvælge en side i telefonbogen, og efter at have skimmet siden et par gange, var John i stand til at sammenkæde navn og telefonnummer for samtlige personer på siden. I 1911 begyndte han på Det Lutheranske Gymnasium, der var anerkendt som en de bedste uddannelsesinstituitoner i Budapest, og her blev der straks taget hånd om hans talent.

Fremtid i matematikken

I 1921 færdiggjorde von Neumann sin uddannelse på Det Lutheranske Gymnasium og i 1922 publicerede han sin første matematiske artikel omhandlende nulpunkter for visse minimale polynomier. Imidlertid så hans far ingen fremtid i matematikken så kompromiset blev at von Neumann tog til Berlin for at læse kemi. Dog blev han også indskrevet som matematikstuderende ved universitetet i Budapest, men han fulgte ikke undervisningen. I 1923 skiftede von Neumann til universitetet i Zürich hvor han i 1926 modtog sit diplom som kemiingeniør. Under sit ophold i Zürich forfulgte han sin interesse for matematik og i 1926 modtog han desuden en doktorgrad i matematik ved universitetet i Budapest, med en afhandling om mængdelære.

Matematiske bedrifter

I de følgende år publicerede von Neumann en lang række artikler, med betydelige resultater inden for aksiomatisk mængdelære, målteori, ergodisk teori, repræsentationsteori og matematisk fysik. I årene 1927-29 var von Neumann en hovedperson i skabelsen af de formelle matematiske rammer for kvantemekanikken, og i 1929 introducerede han selvadjungerede algebraer af begrænsede lineære operatorer på Hilbertrum, afsluttet i den svage operatortopologi, hvilket er det der i dag er kendt som von Neumann-algebraer.

Han anså teorien for operatoralgebraer som det næste store mål inden for matematikken og han spillede selv en hovedrolle i skabelsen af denne teori. Von Neumanns evne til at beherske og udnytte andre matematikeres resultater var, ifølge hans kolleger, intet mindre end imponerende, og han vedblev med at publicere inden for en lang række forskellige områder.

I midten af 30'erne begyndte han at interessere sig for hydrodynamik, hvilket ledte hans forskning hen på teorien for ikke-lineære partielle differentialligninger. Von Neumann anså numeriske metoder som den mest lovende løsningsmulighed, og dette fik ham til at interesse sig for hvordan man kunne udføre beregningerne ved brug af computere. Han var en af pionerene inden for datalogi og udviklede blandt andet den såkaldte von Neumann-arkitektur, der kort sagt går ud på at bruge computerens hukommelse til at opbevare data. Et princip der bruges i computere den dag i dag. Sammen med Oskar Morgenstern var von Neumann desuden grundlægger af spilteorien, og sammen udgav de det klassiske værk "Theory of Games and Economic Behaviour" i 1944.

Atombomben

Von Neumann var i 1929 flyttet til Princeton og da han i 1937 blev amerikansk statsborger begyndte den amerikanske regering for alvor at trække på hans talent med henblik på krigsrelateret forskning. I 1943 begyndte von Neumann at arbejde på Manhattan-projektet hvor han brugte sit geni til at håndtere de komplicerede formler og beregninger fra kernefysikken som var nødvendige for at kunne konstruere de atombomber der senere blev smidt over Hiroshima og Nagasaki. Dette arbejde var med til at videreudvikle hans interesse for datalogi, og han var selv med til at konstruere de første moderne computere. Efter 2. verdenskrig blev von Neumann ansat som leder af en række rådgivningskommiteer for det amerikanske forsvar. Komiteerne bestod af førende eksperter inden for missilteknologi og kernefysik, og under von Neumanns ledelse formede de udviklingen af det amerikanske missilprogram.

Det amerikanske missilprogram

I begyndelsen af 1950'erne var atomteknologien forbi sit første spæde stadium, og det næste punkt på det amerikanske forsvars ønskeseddel var interkontinentale ballistiske missiler. Von Neumanns kommiteer havde ansvaret for at evaluere effektiviteten af de enkelte missiltyper og de udstak retningslinjerne for hvorledes arbejdet med de enkelte projekter skulle videreføres. I 1951 førte nye efterretningsoplysninger fra tyske videnskabsfolk til at von Neumanns kommite mente at Sovjetunionen var adskillige år foran USA i udviklingen af ballistiske missiler, og von Neumann selv forudsagde at russerne allerede i slutningen af 50'erne ville have et operationelt interkontinentalt missil samt forbedret teknologi der ville gøre dem i stand til at modstå amerikanske bombefly. Det amerikanske Atlas-missil ville næppe være operationelt før i begyndelsen af 1960, så for at undgå denne kritiske situation satte den amerikanske regering, efter von Neumanns anbefaling, alle ressourcer ind på at udvikle et interkontinentalt missil så hurtigt som muligt. Overordnet set bidrog von Neumann i høj grad til udviklingen af det amerikanske missilprogram, og han kan formentlig tillægges en stor del af ansvaret for det overtag som USA opnåede i den kolde krig fra 1960 og frem.

Mentalt sammenbrud

Von Neumann blev i 1955 ansat for atomenergikommisionen af præsident Eisenhower, og året efter blev han tildelt Enrico Fermi-prisen for sit arbejde inden for kernefysik. Han modtog i løbet af sit liv en række andre priser og anerkendelser, og han fortsatte sit arbejde for den amerikanske regering, med både civile og militære projekter, indtil han døde af kræft i 1957 blot 53 år gammel. I de sidste få måneder af sit liv var von Neumann på randen af et mentalt sammenbrud. Han havde i løbet af sit liv opbygget en følelse af uovervindelighed og kunne ikke acceptere sin uhelbredelige sygdom. Hans hjerne, som ellers altid havde kunnet hjælpe ham, var pludselig uden betydning, og hans stærke ønske om at leve kæmpede mod de medicinske kendsgerninger. Tanken om døden gjorde ham rædselsslagen og panisk, og hans venner sagde at han skreg og græd ukontrollabelt hver nat lige til det sidste.

Udødelighed

Konkluderende set bidrog von Neumann i omfattende grad til naturvidenskaben. Hans arbejde med computere lagde grunden for en ny æra og mange af hans principper fra slutningen af 40'erne og 50'erne benyttes stadig i dag. Hans arbejde med atombomben og ballistiske missiler førte til USA's overtag i den kolde krig og fremmede i det hele taget landets almene tekniske niveau. Von Neumann var en pioner og et multigeni, og på sine kun 53 år nåede han virkelig at sætte sit præg på verden. Sit ønske om at leve evigt kunne han ikke få opfyldt, men han påvirkede sin samtid i en sådan grad at han formentlig aldrig vil blive glemt, og det er vel det tætteste noget menneske kan komme på udødelighed.

Banachalgebraer og algebraens fundamentalsætning

Stefan Holm

Som bekendt har enhver tilstrækkeligt interessant matematisk teori et bevis for algebraens fundamentalsætning.

Jeg vil hér give et baseret på et par grundlæggende funktionalanalytiske og banachalgebraiske grundsætninger (samt en lille smule ren algebra). Beviset bør uden problemer forstås af alle der har haft 3AN (med projekt om banachalgebraer) og 3AL — eller tilsvarende.

Side 9-sætning. *Lad P betegne et normeret polynomium med komplekse koefficienter og af grad $n \geq 1$. Da vil der findes komplekse tal $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ så $P(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$.*

Bevis. Hvis vi lader $\mathbb{L}$ betegne spaltningslegemet for P over de komplekse tal, ved vi at $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{L} < \infty$. Det vi ønsker er at $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{L} = 1$.

Og her kommer funktionalanalysen så ind i billedet. Da dimensionen af $\mathbb{L}$ er endelig, vil enhver norm (fx den euklidiske) gøre det til et banachrum, og endvidere vil enhver lineær afbildning være kontinuert.

Særligt vil multiplikationsafbildningen være seperat kontinuert i de to variable. Ved passende skalering kan den altså gøres til en ækvivalent, submultiplikativ norm, hvormed $\mathbb{L}$ er en banachalgebra.

Men Gelfand-Mazurs sætning fortæller os at enhver kompleks divisions-banachalgebra vil have dimension 1, og dermed er vi færdige. $\square$

Puzzles

Taus Brock-Nannestad

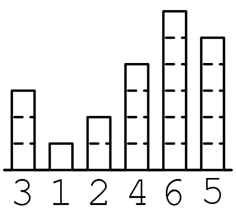
I dette nummer af Famøs fortsætter vi med variationer over sudoku-puzzles. Nogle af jer kan måske huske det højhus-puzzle der var i anden udgave af sidste års Famøs. Denne gang har jeg produceret to lignende puzzles. Det første er 6×6, ligesom det førnævnte puzzle, mens det andet er 9×9, og desuden følger de almindelige sudoku-regler.

For en god ordens skyld gentager jeg lige reglerne for et højhus-puzzle:

> Formålet med denne type puzzle er, at skrive tallene $1, \ldots, N$ i felterne således at følgende betingelser er opfyldt:
>
> 1. Et tal må ikke optræde to eller flere gange i den samme søjle eller række. (De der har fulgt MatXX vil genkende dette som værende definitionen på et latinsk kvadrat. Hvis man har haft gruppeteori kan man forestille sig en gruppetavle).
> 2. Tallene ude på sidelinierne angiver hvor mange tal man kan "se" i den pågældende række eller søjle når man kigger ind i kvadratet fra tallet på sidelinien. Bemærk at man i den højre søjle kigger mod venstre, og ligeledes i den nederste række kigger opad.

Den anden regel kan måske være lidt svær at greje, så hér er en uddybning. En god metafor er, at hvert tal inde i kvadratet representerer højden på et højhus der står i det pågældende felt. Tallene uden for kvadratet angiver så hvor mange højhuse man kan se hvis man kigger ind mod byen.

Som et eksempel på hvad der menes med at kunne "se" tal kan vi betragte rækken "3 1 2 4 6 5".



Hvis vi står til venstre for denne række kan vi se tre forskellige tal: 3, 4 og 6. Tallene 1, 2 og 5 bliver overskygget af 3 og 6, og vi kan derfor ikke "se" dem.

Hvis vi derimod står til højre for rækken og kigger mod venstre kan vi kun se to tal: 5 og 6. Resten af tallene i rækken bliver overskygget af 6-tallet.

Til det andet puzzle skal følgende betingelse ligeledes være opfyldt:

3. Hvert markeret 3×3-kvadrat skal indeholde tallene $1, \ldots, 9$ uden gentagelser.

Det må være nok med instruktioner. Hér kommer puzzles'ne!

	1	2	3	2	3	4	
1							3
2							4
3							3
4							2
3							1
2							2
	2	4	1	4	3	2	

	4	3	2	4	3	2	3	1	2	
7			4							2
4		7								4
2						3				3
4	4			8						1
3					9					3
2						2			4	3
3				1						2
3								6		4
1							4			3
	1	4	3	2	3	3	2	2	4	

Det er det sidste af disse to puzzles der er dette nummers præmiepuzzle. Alle korrekte løsninger der er redaktionen i hænde inden den 10. marts vil komme med i lodtrækningen om en Mystisk Flaske. God Arbejdslyst!

Præmiepuzzlevinder

Taus Brock-Nannestad

Det præmiepuzzle der var med i sidste nummer af FAMØS viste sig at være svært. Meget svært, endda. Faktisk var det så svært, at der kun var fire personer der indsendte en løsning, og tre af dem indrømmede, at løsningen var fundet ved hjælp af et selvskrevet computerprogram. Jeg har opsummeret nogle interessante data om opgaveløsningerne i følgende tabel:

Navn	Programmeringssprog	køretid	oversat
Martin Koch	Python	en weekend	nej
Mikkel Abrahamsen	Pascal	17 sekunder	ja
Therese Graversen	Moscow ML	$<$ 1 sekund	nej
Pablo V. Holm-Nielsen	-	-	-

Her er det bemærkelsesværdigt, at Thereses løsningsprogram er det hurtigste, selvom det ikke er oversat. Det er vist en lille lektion i at det kan betale sig at bruge en effektiv algoritme.

Martin Koch spurgte derudover hvordan jeg bar mig ad med at konstruere mit puzzle, så det vil jeg kort beskrive.

Først og fremmest har jeg selv skrevet et program der kan løse puzzles af denne type. Ikke overraskende er dette program også skrevet i en variant af ML. Først fandt jeg en passende matrix der overholdt kravene om at være en sudoku-løsning. I dette tilfælde brugte jeg simpelthen løsningen på et andet sudoku-puzzle. Jeg fyldte så $<$-tegn ind i alle 3×3-matricerne, og undersøgte om det var nok til at give en entydig løsning. Det var det ikke, så jeg slettede alle tegnene i den midterste matrix, og begyndte at tilføje $<$-tegn indtil jeg stødte på en løsning der var tilfredsstillende (og entydig). Det er nogenlunde den metode jeg har brugt til puzzles'ne i denne udgave af FAMØS. Denne gang har jeg dog sikret mig, at de rent faktisk kan løses ved håndkraft.

Det kan diskuteres om brug af computer er snyd i denne sammenhæng. Givet at det puzzle der var med i sidste nummer var så overordentligt svært, så har jeg valgt at acceptere brugen af computer i dette tilfælde. Det lader til at mit puzzle var udfordrende — om end ikke på den tiltænkte måde.

Hvad angår de puzzles der er i dette nummer, så vil jeg komme med en kraftig opfordring til, at man ikke bruger computer til at løse dem. Pointen med de puzzles er, at man skal løse dem i hånden, og hvis man ikke gør det, så snyder man sig selv for en god mental udfordring.

Til dem der forgæves prøvede at løse sidste puzzle i hånden kan jeg kun beklage, at jeg ikke fik afprøvet det godt nok. Jeg har besluttet mig for ikke at angive løsningen i dette nummer. I stedet vil jeg ændre på puzzlet så det bliver lettere at løse, og så kan I få lejlighed til at blive udfordret med det i et kommende nummer af FAMØS.

Til sidst skal jeg lige røbe, at vinderen af Den Mystiske Flaske blev Martin Koch, samt at flasken kommer til at bestå af det pureste sukkersøde snask der nogensinde har haft betegnelsen "Baileys". Flasken kan hentes hos redaktionen ved en passende lejlighed.

Gitterteori

Mikael Thinggaard

Jeg vil i denne artikel fortælle jer lidt omkring gitre og om deres anvendelser. Det første spørgsmål må være: "Hvad er et gitter?", ud over at være det, som Idræt har rundt om deres egen grønne fodboldbane. Matematisk set defineres et gitter på følgende måde:

Definition Et gitter er en ordnet mængde L, hvorom det skal gælde, at for alle $x, y \in L$ skal $x \vee y = \sup\{x, y\}$ og $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ eksistere.

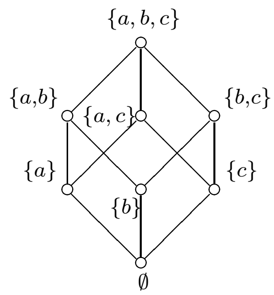
Umiddelbart ligner det ikke det gitter, som er rundt om Idræts fodboldbane, men hvis M er endelig, har man en nem måde at repræsentere gitteret på. Man laver nemlig følgende tegning:

(i) Tegn for hvert element $x \in L$ en lille cirkel $C(x)$ i et koordinatsystem.
(ii) Hvis y overdækker[1] x, da tegnes en streg fra $C(x)$ til $C(y)$, og centrum af $C(x)$ skal have en lavere anden koordinat end centrummet af $C(y)$
(iii) Hvis $x \neq z \neq y$ må $C(z)$ ikke skære et evt. liniestykket mellem $C(x)$ og $C(y)$.

Sådan en tegning kaldes et Hassediagram. Den kvikke læser har sikkert indset, at dette ikke bruger supremum og infimum egenskaberne, og denne tegnemetode gælder faktisk for enhver endelig ordnet mængde.

I tilfældet med et gitter får man, at alle elementerne er kædet sammen, og derfor kommer Hassediagrammet faktisk til at ligne et gitter. Derfor giver definitionens navn mening.

Eksempel
Lad mængden $X = \{a, b, c\}$, og vi ser nu på potensmængden $\wp(X)$ med ordningen $\subseteq$, som klart er et endeligt gitter, hvor sup og inf selvfølgelig bliver henholdsvis $\cup$ og $\cap$.



Vi kalder et gitter L begrænset, hvis det har en bund og en top, som vi kalder henholdsvis 0 og 1[2], og vi kalder L distributivt hvis den distributive lov gælder for sup og inf. I ovenstående eksempel ses det klart, at gitteret er begrænset ($0 = \emptyset$

[1] y overdækker x, hvis der gælder følgende: $x < y$ og hvis $x \leq z < y$ vil $z = x$.
[2] L har et 0, hvis $\exists a \in L$ så $a \leq x \; \forall x \in L$, og har et 1, hvis $\exists b \in L$ så $x \leq b \; \forall x \in L$.

og $1 = \{a, b, c\}$) og distributivt, da den distributive lov gælder for $\cap$ og $\cup$.

I moderne matematik er det sjældent at tale om en struktur uden at komme ind på den associerede mængde af strukturbevarende afbildninger. I de begrænsede distributive gitre kaldes de strukturbevarende afbildninger for $\{0, 1\}$-gitterhomomorfier.

Klassen af en struktur inklusive dens strukturbevarende afbildninger er små skridt i retning af kategoriteori. Det er denne teori, der er basis for den repræsentation, som jeg vil snakke om nu.

Det viser sig nemlig, at der er en (1-1) korrespondance mellem de begrænsede distributive gitre $\mathbf{D}_{01}$ og en særlig slags topologiske rum, nemlig de begrænsede stonerum $\mathbf{S}_B$ (denne korrespondance er selvfølgelig op til isomorfi af gitre og homeomorfi af stonerum).

Til den der kender en smule til topologi, kan jeg sige, at et begrænset stonerum er et topologisk rum X, som opfylder:

(i) X er kompakt og T_0, hvilket vil sige, at for alle $x, y \in X$, hvor $x \neq y$ findes en åben mængde U så $x \in U$ og $y \notin U$ eller $y \in U$ og $x \notin U$.

(ii) De kompakte åbne mængder udgør en basis for X.

(iii) For hvert par af ikke-tomme familier af ikke-tomme kompakte åbne mængder $(X_s)_{s \in S}$ og $(Y_t)_{t \in T}$, vil

$$\bigcap_{s \in S} X_s \subseteq \bigcup_{t \in T} Y_t \;\Rightarrow\; \exists S' \subseteq S \text{ og } T' \subseteq T : \bigcap_{s \in S'} X_s \subseteq \bigcup_{t \in T'} Y_t,$$

hvor S' og T' er endelige delmængder.

(iv) For alle ikke-tomme familier af kompakte åbne mængder $(X_s)_{s \in S}$ vil

$$\bigcap_{s \in S} X_s = \emptyset \;\Rightarrow\; \exists S' \subseteq S : \bigcap_{s \in S'} X_s = \emptyset,$$

hvor S' er en endelig delmængde.

Vejen til korrespondancen er lang, men kort fortalt gør man følgende:

Definition Lad L være et gitter og lad $\emptyset \neq J \subseteq L$. Hvis

(i) $a, b \in J \;\Rightarrow\; a \vee b \in J$

(ii) $a \in L, b \in J$ og $a \leq b \;\Rightarrow\; a \in J$

(iii) $a \wedge b \in J \;\Rightarrow\; a \in J$ eller $b \in J$

kaldes J et primideal, og mængden af alle primidealer betegnes $\mathcal{I}_p(L)$.

Vi viser nu, at man får følgende sætning.

Sætning *Lad L være et gitter og lad $a \in L$. Da vil afbildningen $\eta : L \mapsto \wp\big(\mathcal{I}_p(L)\big)$ defineret ved*

$$\eta : a \mapsto X_a := \{I \in \mathcal{I}_p \mid a \notin I\}$$

være en gitterhomomorfi.

Bevis: Vi skal altså vise, at $X_{a\vee b} = X_a \cup X_b$, og at $X_{a\wedge b} = X_a \cap X_b$ for alle $a, b \in L$. Lad $I \in \mathcal{I}_p$. Vi har altså følgende:

$$\begin{aligned} X_{a\vee b} &= \{I \in \mathcal{I}_p \mid a \vee b \notin I\} \\ &= \{I \in \mathcal{I}_p \mid a \notin I \text{ eller } b \notin I\} && \text{bruger (ii) i ovenstående definition} \\ &= X_a \cup X_b && \text{simpel mængdeteori} \end{aligned}$$

På tilsvarende måde ses det, ved at bruge (iii) fra ovenstående definition, at $X_{a\wedge b} = X_a \cap X_b$. □

Vi vil nu gerne have, at afbildningen η giver en isomorfi fra L ind i et delgitter[3] af $\wp\big(\mathcal{I}_p(L)\big)$. Eftersom $\wp\big(\mathcal{I}_p(L)\big)$ er distributivt, og et delgitter klart nedarver denne egenskab, må en nødvendig egenskab for L være, at det er distributivt. Det viser sig, at dette er nok, men dette er ikke bare sådan lige at vise. Man bliver nemlig nød til at vise, at der er "rigtig mange" primidealer, for at det kan lade sig gøre. Her gør man brug af Zorns Lemma, og en god mængdeteoretiker ved, at det betyder, at udvalgsaksiomet må antages at gælde.

Nu har vi altså en repræsentation af de distributive gitre og dermed også de begrænsede af dem, men for at dette skal være brugbart, bliver vi nød til at karakterisere, hvad billedet af η er. Her er det, at man finder en smart topologi på $\mathcal{I}_p$, som man kalder for et stonerum (stonerum er altså konstrueret ud fra et gitterteoretisk aspekt og ikke et topologisk aspekt). Efter en del mere udregning kommer man frem til Stones berømte repræsentationssætning.

Stones Repræsentationssætning
Lad L være et begrænset distributivt gitter, og lad $a \in L$. Da vil afbildningen $\eta : a \mapsto X_a$ være en gitterisomorfi fra L ind i de kompakte åbne mængder af det begrænsede stonerum $\mathscr{S}(L) := (\mathcal{I}_p(L), \mathcal{T})$, hvor

$$\mathcal{T} := \big\{U \subseteq \mathcal{I}_p(L) \;\big|\; U \text{ er en forening af elementer fra } \{X_a \mid a \in L\}\big\}.$$

I ovenstående sætning burde man selvfølgelig forsikre sig, at $\mathscr{S}(L)$ egentlig er et begrænset stonerum, hvilket forholdsvis nemt vises.

Vi kalder de kompakt åbne mængder i et begrænset stonerum X for $\mathscr{T}(X)$, og ovenstående sætning giver nu, at $L \simeq \mathscr{T}\big(\mathscr{S}(L)\big)$. For at klare resten af (1-1) korrespondancen viser man, at for X vil $\mathscr{T}(X)$ være et begrænset distributivt gitter, og at $\mathscr{S}\big(\mathscr{T}(X)\big)$ er homeomorf med X.

[3]Du gættede rigtigt:

$$\emptyset \neq J \subseteq L,\ J \text{ delgitter af } L, \text{ hvis } \forall a, b \in J \text{ vil } a \vee b \in J \text{ og } a \wedge b \in J.$$

I stonerummet vælger vi de strukturbevarende afbildninger til at være de strengt kontinuerte funktioner, som er afbildninger for hvilke originalmængden til en kompakt åben mængde er kompakt åben, og det viser sig, at der også er en (1-1) korrespondance mellem de strukturbevarende afbildninger i $\mathbf{D}_{01}$ og i $\mathbf{S}_B$. Altså er der en (1-1) korrespondance mellem strukturene og deres strukturbevarende afbildninger, og dette kaldes en dualitet.

Hvis man er interesseret i at læse mere omkring gitterteori og få selve dualiteten bevist, anbefaler jeg at læse [1] og [2]. Det kan her nævnes, at [1] har mængdeteorien som tilgang til gitre, og [2] har kategoriteorien som tilgang til gitre.

Okay, nu må det være nok. Hvorfor er gitre interessante, og hvorfor er ovenstående interessant? Jo, allerførst vil jeg citere et kendt udtryk i matematik: "Alting er mængder". Eftersom gitterteori viser en masse omkring en speciel gruppe af ordnede mængder, må dette selvfølgelig undersøges. Den ovenstående dualitet er interessant, fordi det først og fremmest er et vigtigt redskab til at løse problemer. Det er nemlig godt at have muligheden for at oversætte et problem i en struktur til et problem i en anden struktur.

Jo, men kan du overhovedet pege på et begrænset distributivt gitter, som ikke er endeligt (ellers kunne du jo bare pege på eksemplet). Det kan jeg faktisk godt, for hvis man tænker sig lidt om, bliver $\mathbb{N}_0$ hvor ordningen er $|$ (går op i) et begrænset uendeligt distributivt gitter. Har du brug for et lille hint? Jeg kan nævne så meget, at i dette gitter bliver sup lig mfm og inf lig sfd, og noget pudsigt bliver $0 = 1$ og $1 = 0$. Tyg lidt på den.

Der er dog også andre grunde til, at det er interessant at se på gitterteori. Det viser sig nemlig for eksempel, at være et godt redskab inden for logik. Inden For den klassiske logik kan nævnes boolske algebraer. En boolsk algebra er en struktur $\mathbb{A}$ så

(i) $\mathbb{A}$ er et begrænset distributivt gitter.
(ii) For alle $a \in \mathbb{A}$ findes et $\neg a \in \mathbb{A}$, som opfylder, at $\neg a \vee a = 1$ og $\neg a \wedge a = 0$.

Den kvikke læser ser sikkert, at mængden af de boolske algebraer bare er en specifik delmængde af $\mathbf{D}_{01}$, og i denne situation bliver stonerummet $\mathscr{S}(\mathbb{A})$ faktisk et kompakt Hausdorff rum.

Hvad mere interessant er, at hvis man er kendt med udsagnskalkulen, så ved man, at der findes en semantisk og en syntaktisk metode til at beskue denne. Hvis det er lidt rustent, kan jeg lige minde om, at den semantiske metode er den, hvor vi siger, at en veldefineret formel φ er sand, hvis dens sandhedstabel er sand for alle mulige situationer. Den syntaktiske metode er baseret på et deduktionssystem, hvor en veldefineret formel er sand, hvis den kan blive udledt fra en mængde af axiomer via givne deduktionsregler.

Jeg må også hellere lige fortælle jer, hvordan en veldefineret formel defineres i udsagnskalkulen:

(i) Enhver udsagnsvariabel, hvor udvalgsvariablerne er en uendelig mængde kaldet $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, er en veldefineret formel.
(ii) Hvis φ og ζ er veldeniferede formler, så er $\neg\varphi$ og $(\varphi \rightarrow \zeta)$ veldefinerede formler.
(iii) Enhver veldefineret formel kommer fra et endeligt antal anvendelser af (i) og (ii).

Man kan nu for både den semantiske og den syntaktiske metode finde en ordning, og det viser sig, at dette gør de to metoder til boolske algebraer, og at disse boolske algebraer er ens. Denne algebra kaldes Lindenbaum-algebraen, eller kort LINDA.

Gitterteori bliver også brugt inden for intuitionistisk og modallogik, men det vil jeg ikke komme nærmere ind på.

Hvis man vil læse mere omkring brug af gitterteori i logikken, anbefaler jeg at læse [3] og [4], og hvis man vil vide, hvordan man finder frem til LINDA, skal man kigge i [1].

Gitterteori er også interessant, eftersom det bliver brugt en del inden for computervidenskab. Desværre er dette område meget teknisk, og jeg kan derfor kun lige skrabe det på overfladen og se, hvad der drysser af.

Allerførst ser jeg, at inden for computerdesign er gitre et vigtigt redskab. Når vi her siger computerdesign, mener vi for eksempel programmeringssprog og integrerede komponenter, kaldet transistorer, i computeren. For eksempel angående transistorerne i computeren kan nævnes, at disse er linket sammen, i hvad man kalder porte ('gates')[4]. Disse porte har tre muligheder for at sende information rundt i komponenterne, og disse tre muligheder ligner meget det, der sker i en boolsk algebra, hvor dens tre operationer er $\wedge, \vee$ og $\neg$.

Faktisk hører portdiagram, mikroprogrammering og kredsløbsopbygning sammen med en konstruktion kaldet boolske termer, som kort kan forklares at være en klasse af elementer opbygget af $\wedge, \vee$ og $\neg$. Opbygningen sker på nogenlunde samme måde, som de veldefinerede formler opbygges.

En anden grund til at gitterteori har stor betydning for computervidenskab, er et område inden for gitterteori kaldet fuldstændig partiel ordnede mængder (CPO) og domæner, som er en specifik delmængde af CPO. Disse områder bliver for eksempel brugt, inden for spørgsmålet omkring noget kan computeres og inden for rekursive processer, som er en meget vigtig del inden for computervidenskab.

Som I nok kan læse, er dette vitterligt kun at skrabe overfladen, og hvis man vil vide mere omkring dette område, kan man finde yderligere information i [1],

[4]Disse informationer er fundet fra engelske tekster, og derfor viser jeg lige det engelske udtryk for, hvad jeg kalder for en port.

og denne bog anbefaler også at kigge i [5].

Jeg håber, dette har svaret på jeres spørgsmål omkring gitterteoriens vigtighed. Jeg håber også, at I synes, det har vagt jeres interesse omkring teorien. Man kan nærmest sige, at I forhåbentligt er blevet fanget i dens gitter.

Interessante bøger omkring og anvendelser af gitterteori

[1] B. A. Davey & H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, 2. udgave, Cambridge, 2002.

[2] R. Balbes & Ph. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1974.

[3] M. de M. Nørgård *Perfect Poset Semantics for Classical, Intuitionstic, and Linear Logic* Københavns Universitet, Speciale, 2005.

[4] M. T. Randrup, *Gitter teoretiske aspekter ved intuitionistisk og modal logik*, Aarhus Universitet, Institut for Matematiske Fag, Speciale, 1999.

[5] R. Backhouse, R. Crole & R. Gibbons, *Algebraic and Coalgebraic Methods in the Mathematics of Program Construction : International Summer School and Workshop, Oxford, UK, April 10-14, 2000: Revised Lectures*, Springer, 2002.

FAMØS december 2005.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-,
Økonomi- og Statistikstuderende ved
Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:
Mikkel Abrahamsen
Nikolaj Strands
Sara Arklint (ansvh.)
Stefan Holm
Taus Brock-Nannestad
Ulrik Buchholtz

Tegner:
Mathias W. Madsen

Deadline for næste nummer:
Fredag den 10. marts 2006

Indlæg modtages gerne og bedes sendt til `famos@math.ku.dk` – meget gerne skrevet i LaTeX.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk
Oplag: 500 stk.
ISSN 1395-2145