Gitterteori

Mikael Thinggaard

Jeg vil i denne artikel fortælle jer lidt omkring gitre og om deres anvendelser. Det første spørgsmål må være: "Hvad er et gitter?", ud over at være det, som Idræt har rundt om deres egen grønne fodboldbane. Matematisk set defineres et gitter på følgende måde:

Definition Et gitter er en ordnet mængde L, hvorom det skal gælde, at for alle $x, y \in L$ skal $x \vee y = \sup\{x, y\}$ og $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ eksistere.

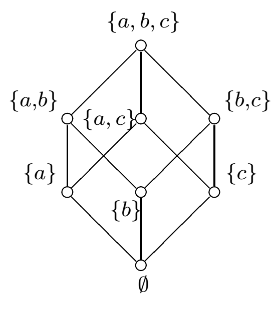
Umiddelbart ligner det ikke det gitter, som er rundt om Idræts fodboldbane, men hvis M er endelig, har man en nem måde at repræsentere gitteret på. Man laver nemlig følgende tegning:

(i) Tegn for hvert element $x \in L$ en lille cirkel $C(x)$ i et koordinatsystem.
(ii) Hvis y overdækker[1] x, da tegnes en streg fra $C(x)$ til $C(y)$, og centrum af $C(x)$ skal have en lavere anden koordinat end centrummet af $C(y)$
(iii) Hvis $x \neq z \neq y$ må $C(z)$ ikke skære et evt. liniestykket mellem $C(x)$ og $C(y)$.

Sådan en tegning kaldes et Hassediagram. Den kvikke læser har sikkert indset, at dette ikke bruger supremum og infimum egenskaberne, og denne tegnemetode gælder faktisk for enhver endelig ordnet mængde.

I tilfældet med et gitter får man, at alle elementerne er kædet sammen, og derfor kommer Hassediagrammet faktisk til at ligne et gitter. Derfor giver definitionens navn mening.

Eksempel
Lad mængden $X = \{a, b, c\}$, og vi ser nu på potensmængden $\wp(X)$ med ordningen $\subseteq$, som klart er et endeligt gitter, hvor sup og inf selvfølgelig bliver henholdsvis $\cup$ og $\cap$.



Vi kalder et gitter L begrænset, hvis det har en bund og en top, som vi kalder henholdsvis 0 og 1[2], og vi kalder L distributivt hvis den distributive lov gælder for sup og inf. I ovenstående eksempel ses det klart, at gitteret er begrænset ($0 = \emptyset$

[1] y overdækker x, hvis der gælder følgende: $x < y$ og hvis $x \leq z < y$ vil $z = x$.
[2] L har et 0, hvis $\exists a \in L$ så $a \leq x \ \forall x \in L$, og har et 1, hvis $\exists b \in L$ så $x \leq b \ \forall x \in L$.

og $1 = \{a, b, c\}$) og distributivt, da den distributive lov gælder for $\cap$ og $\cup$.

I moderne matematik er det sjældent at tale om en struktur uden at komme ind på den associerede mængde af strukturbevarende afbildninger. I de begrænsede distributive gitre kaldes de strukturbevarende afbildninger for $\{0, 1\}$-gitterhomomorfier.

Klassen af en struktur inklusive dens strukturbevarende afbildninger er små skridt i retning af kategoriteori. Det er denne teori, der er basis for den repræsentation, som jeg vil snakke om nu.

Det viser sig nemlig, at der er en (1-1) korrespondance mellem de begrænsede distributive gitre $\mathbf{D}_{01}$ og en særlig slags topologiske rum, nemlig de begrænsede stonerum $\mathbf{S}_B$ (denne korrespondance er selvfølgelig op til isomorfi af gitre og homeomorfi af stonerum).

Til den der kender en smule til topologi, kan jeg sige, at et begrænset stonerum er et topologisk rum X, som opfylder:

(i) X er kompakt og T_0, hvilket vil sige, at for alle $x, y \in X$, hvor $x \neq y$ findes en åben mængde U så $x \in U$ og $y \notin U$ eller $y \in U$ og $x \notin U$.

(ii) De kompakte åbne mængder udgør en basis for X.

(iii) For hvert par af ikke-tomme familier af ikke-tomme kompakte åbne mængder $(X_s)_{s \in S}$ og $(Y_t)_{t \in T}$, vil

$$\bigcap_{s \in S} X_s \subseteq \bigcup_{t \in T} Y_t \;\Rightarrow\; \exists S' \subseteq S \text{ og } T' \subseteq T : \bigcap_{s \in S'} X_s \subseteq \bigcup_{t \in T'} Y_t,$$

hvor S' og T' er endelige delmængder.

(iv) For alle ikke-tomme familier af kompakte åbne mængder $(X_s)_{s \in S}$ vil

$$\bigcap_{s \in S} X_s = \emptyset \;\Rightarrow\; \exists S' \subseteq S : \bigcap_{s \in S'} X_s = \emptyset,$$

hvor S' er en endelig delmængde.

Vejen til korrespondancen er lang, men kort fortalt gør man følgende:

Definition Lad L være et gitter og lad $\emptyset \neq J \subseteq L$. Hvis

(i) $a, b \in J \;\Rightarrow\; a \vee b \in J$

(ii) $a \in L, b \in J$ og $a \leq b \;\Rightarrow\; a \in J$

(iii) $a \wedge b \in J \;\Rightarrow\; a \in J$ eller $b \in J$

kaldes J et primideal, og mængden af alle primidealer betegnes $\mathcal{I}_p(L)$.

Vi viser nu, at man får følgende sætning.

Sætning *Lad L være et gitter og lad $a \in L$. Da vil afbildningen $\eta : L \mapsto \wp\big(\mathcal{I}_p(L)\big)$ defineret ved*

$$\eta : a \mapsto X_a := \{I \in \mathcal{I}_p \mid a \notin I\}$$

være en gitterhomomorfi.

Bevis: Vi skal altså vise, at $X_{a\vee b} = X_a \cup X_b$, og at $X_{a\wedge b} = X_a \cap X_b$ for alle $a, b \in L$. Lad $I \in \mathcal{I}_p$. Vi har altså følgende:

$$\begin{aligned} X_{a\vee b} &= \{I \in \mathcal{I}_p \mid a \vee b \notin I\} \\ &= \{I \in \mathcal{I}_p \mid a \notin I \text{ eller } b \notin I\} && \text{bruger (ii) i ovenstående definition} \\ &= X_a \cup X_b && \text{simpel mængdeteori} \end{aligned}$$

På tilsvarende måde ses det, ved at bruge (iii) fra ovenstående definition, at $X_{a\wedge b} = X_a \cap X_b$. □

Vi vil nu gerne have, at afbildningen η giver en isomorfi fra L ind i et delgitter[3] af $\wp\big(\mathcal{I}_p(L)\big)$. Eftersom $\wp\big(\mathcal{I}_p(L)\big)$ er distributivt, og et delgitter klart nedarver denne egenskab, må en nødvendig egenskab for L være, at det er distributivt. Det viser sig, at dette er nok, men dette er ikke bare sådan lige at vise. Man bliver nemlig nød til at vise, at der er "rigtig mange" primidealer, for at det kan lade sig gøre. Her gør man brug af Zorns Lemma, og en god mængdeteoretiker ved, at det betyder, at udvalgsaksiomet må antages at gælde.

Nu har vi altså en repræsentation af de distributive gitre og dermed også de begrænsede af dem, men for at dette skal være brugbart, bliver vi nød til at karakterisere, hvad billedet af η er. Her er det, at man finder en smart topologi på $\mathcal{I}_p$, som man kalder for et stonerum (stonerum er altså konstrueret ud fra et gitterteoretisk aspekt og ikke et topologisk aspekt). Efter en del mere udregning kommer man frem til Stones berømte repræsentationssætning.

Stones Repræsentationssætning
Lad L være et begrænset distributivt gitter, og lad $a \in L$. Da vil afbildningen $\eta : a \mapsto X_a$ være en gitterisomorfi fra L ind i de kompakte åbne mængder af det begrænsede stonerum $\mathscr{S}(L) := (\mathcal{I}_p(L), \mathcal{T})$, hvor

$$\mathcal{T} := \big\{U \subseteq \mathcal{I}_p(L) \bigm| U \textit{ er en forening af elementer fra } \{X_a \mid a \in L\}\big\}.$$

I ovenstående sætning burde man selvfølgelig forsikre sig, at $\mathscr{S}(L)$ egentlig er et begrænset stonerum, hvilket forholdsvis nemt vises.

Vi kalder de kompakt åbne mængder i et begrænset stonerum X for $\mathscr{T}(X)$, og ovenstående sætning giver nu, at $L \simeq \mathscr{T}\big(\mathscr{S}(L)\big)$. For at klare resten af (1-1) korrespondancen viser man, at for X vil $\mathscr{T}(X)$ være et begrænset distributivt gitter, og at $\mathscr{S}\big(\mathscr{T}(X)\big)$ er homeomorf med X.

[3]Du gættede rigtigt:

$$\emptyset \neq J \subseteq L,\ J \text{ delgitter af } L, \text{ hvis } \forall a, b \in J \text{ vil } a \vee b \in J \text{ og } a \wedge b \in J.$$

I stonerummet vælger vi de strukturbevarende afbildninger til at være de strengt kontinuerte funktioner, som er afbildninger for hvilke originalmængden til en kompakt åben mængde er kompakt åben, og det viser sig, at der også er en (1-1) korrespondance mellem de strukturbevarende afbildninger i $\mathbf{D}_{01}$ og i $\mathbf{S}_B$. Altså er der en (1-1) korrespondance mellem strukturene og deres strukturbevarende afbildninger, og dette kaldes en dualitet.

Hvis man er interesseret i at læse mere omkring gitterteori og få selve dualiteten bevist, anbefaler jeg at læse [1] og [2]. Det kan her nævnes, at [1] har mængdeteorien som tilgang til gitre, og [2] har kategoriteorien som tilgang til gitre.

Okay, nu må det være nok. Hvorfor er gitre interessante, og hvorfor er ovenstående interessant? Jo, allerførst vil jeg citere et kendt udtryk i matematik: "Alting er mængder". Eftersom gitterteori viser en masse omkring en speciel gruppe af ordnede mængder, må dette selvfølgelig undersøges. Den ovenstående dualitet er interessant, fordi det først og fremmest er et vigtigt redskab til at løse problemer. Det er nemlig godt at have muligheden for at oversætte et problem i en struktur til et problem i en anden struktur.

Jo, men kan du overhovedet pege på et begrænset distributivt gitter, som ikke er endeligt (ellers kunne du jo bare pege på eksemplet). Det kan jeg faktisk godt, for hvis man tænker sig lidt om, bliver $\mathbb{N}_0$ hvor ordningen er $|$ (går op i) et begrænset uendeligt distributivt gitter. Har du brug for et lille hint? Jeg kan nævne så meget, at i dette gitter bliver sup lig mfm og inf lig sfd, og noget pudsigt bliver $0 = 1$ og $1 = 0$. Tyg lidt på den.

Der er dog også andre grunde til, at det er interessant at se på gitterteori. Det viser sig nemlig for eksempel, at være et godt redskab inden for logik. Inden For den klassiske logik kan nævnes boolske algebraer. En boolsk algebra er en struktur $\mathbb{A}$ så

(i) $\mathbb{A}$ er et begrænset distributivt gitter.
(ii) For alle $a \in \mathbb{A}$ findes et $\neg a \in \mathbb{A}$, som opfylder, at $\neg a \vee a = 1$ og $\neg a \wedge a = 0$.

Den kvikke læser ser sikkert, at mængden af de boolske algebraer bare er en specifik delmængde af $\mathbf{D}_{01}$, og i denne situation bliver stonerummet $\mathscr{S}(\mathbb{A})$ faktisk et kompakt Hausdorff rum.

Hvad mere interessant er, at hvis man er kendt med udsagnskalkulen, så ved man, at der findes en semantisk og en syntaktisk metode til at beskue denne. Hvis det er lidt rustent, kan jeg lige minde om, at den semantiske metode er den, hvor vi siger, at en veldefineret formel φ er sand, hvis dens sandhedstabel er sand for alle mulige situationer. Den syntaktiske metode er baseret på et deduktionssystem, hvor en veldefineret formel er sand, hvis den kan blive udledt fra en mængde af axiomer via givne deduktionsregler.

Jeg må også hellere lige fortælle jer, hvordan en veldefineret formel defineres i udsagnskalkulen:

(i) Enhver udsagnsvariabel, hvor udvalgsvariablerne er en uendelig mængde kaldet $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, er en veldefineret formel.
(ii) Hvis φ og ζ er veldeniferede formler, så er $\neg\varphi$ og $(\varphi \to \zeta)$ veldefinerede formler.
(iii) Enhver veldefineret formel kommer fra et endeligt antal anvendelser af (i) og (ii).

Man kan nu for både den semantiske og den syntaktiske metode finde en ordning, og det viser sig, at dette gør de to metoder til boolske algebraer, og at disse boolske algebraer er ens. Denne algebra kaldes Lindenbaum-algebraen, eller kort LINDA.

Gitterteori bliver også brugt inden for intuitionistisk og modallogik, men det vil jeg ikke komme nærmere ind på.

Hvis man vil læse mere omkring brug af gitterteori i logikken, anbefaler jeg at læse [3] og [4], og hvis man vil vide, hvordan man finder frem til LINDA, skal man kigge i [1].

Gitterteori er også interessant, eftersom det bliver brugt en del inden for computervidenskab. Desværre er dette område meget teknisk, og jeg kan derfor kun lige skrabe det på overfladen og se, hvad der drysser af.

Allerførst ser jeg, at inden for computerdesign er gitre et vigtigt redskab. Når vi her siger computerdesign, mener vi for eksempel programmeringssprog og integrerede komponenter, kaldet transistorer, i computeren. For eksempel angående transistorerne i computeren kan nævnes, at disse er linket sammen, i hvad man kalder porte ('gates')[4]. Disse porte har tre muligheder for at sende information rundt i komponenterne, og disse tre muligheder ligner meget det, der sker i en boolsk algebra, hvor dens tre operationer er $\wedge, \vee$ og $\neg$.

Faktisk hører portdiagram, mikroprogrammering og kredsløbsopbygning sammen med en konstruktion kaldet boolske termer, som kort kan forklares at være en klasse af elementer opbygget af $\wedge, \vee$ og $\neg$. Opbygningen sker på nogenlunde samme måde, som de veldefinerede formler opbygges.

En anden grund til at gitterteori har stor betydning for computervidenskab, er et område inden for gitterteori kaldet fuldstændig partiel ordnede mængder (CPO) og domæner, som er en specifik delmængde af CPO. Disse områder bliver for eksempel brugt, inden for spørgsmålet omkring noget kan computeres og inden for rekursive processer, som er en meget vigtig del inden for computervidenskab.

Som I nok kan læse, er dette vitterligt kun at skrabe overfladen, og hvis man vil vide mere omkring dette område, kan man finde yderligere information i [1],

[4]Disse informationer er fundet fra engelske tekster, og derfor viser jeg lige det engelske udtryk for, hvad jeg kalder for en port.

og denne bog anbefaler også at kigge i [5].

Jeg håber, dette har svaret på jeres spørgsmål omkring gitterteoriens vigtighed. Jeg håber også, at I synes, det har vagt jeres interesse omkring teorien. Man kan nærmest sige, at I forhåbentligt er blevet fanget i dens gitter.

Interessante bøger omkring og anvendelser af gitterteori

[1] B. A. Davey & H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, 2. udgave, Cambridge, 2002.

[2] R. Balbes & Ph. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1974.

[3] M. de M. Nørgård *Perfect Poset Semantics for Classical, Intuitionstic, and Linear Logic* Københavns Universitet, Speciale, 2005.

[4] M. T. Randrup, *Gitter teoretiske aspekter ved intuitionistisk og modal logik*, Aarhus Universitet, Institut for Matematiske Fag, Speciale, 1999.

[5] R. Backhouse, R. Crole & R. Gibbons, *Algebraic and Coalgebraic Methods in the Mathematics of Program Construction : International Summer School and Workshop, Oxford, UK, April 10-14, 2000: Revised Lectures*, Springer, 2002.