

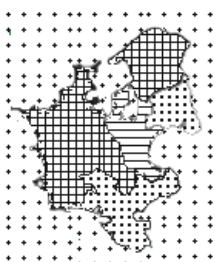
Fire farver er nok

Karl Malassé

100 år i tvivl

Et kort kan farves med fire farver, så områder, som har en grænse til fælles, får forskellige farver. Problemstillingen blev først formuleret af Francis Guthrie i 1852, og fik en afklaring, da det første bevis for 4-farve-sætningen kom i 1977. Det to-delte bevis kom først fra K. Appel, og W. Haken[1], og senere sammen med J. Koch[2] for den anden del. Et lignende, men nemmere bevis kom næsten 20 år efter fra Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour og Thomas Robin[5]. Disse er de to eneste tilgængelige beviser for 4-farve-sætningen. Jeg gengiver her de begreber fra grafteori, som er nødvendige for forståelsen og giver et overordnet indblik i bevisernes fælles ramme.

Kort VS. graf



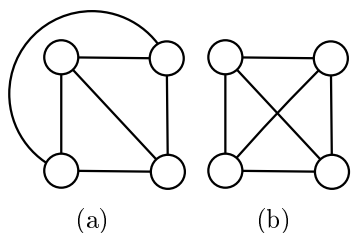
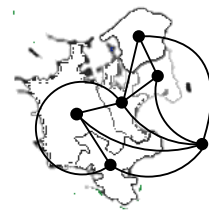
En farvning af Sjællands amtskort med fire farver (her er det mønstre) ses på figuren til venstre. Københavns Amt og Storstrøms Amt er prikket, Vestsjællands Amt og Frederiksborg Amt er gitret, Roskilde Amt er stribet, og det eksterne område (havet) er iført små krydser. Naboområder, altså områder, som har en grænse til fælles, har forskellige farver, og fire farver er også her det mindste antal farver, så dette er tilfældet. Roskilde amt, Københavns amt, og Frederiksborg amt er nemlig indbyrdes naboer, og alene dér skal der bruges tre farver. Disse områder er allesammen naboer til det eksterne område, og farven i dette område skal derfor være forskellig fra de tre øvrige. Resten af farvningen følger nemt.

Skulle man bevise 4-farve-sætningen ud fra ovenstående kort-formulering, skulle man definere formelt, hvad der forstås ved et kort. En definition vil medtage topologiske informationer, såsom afstand og områders indbyrdes placering. Disse oplysninger er irrelevante i vores sammenhæng. En farvning af et område forudsætter blot kendskab til naboernes farve. Vi kan derfor med fordel definere en symmetrisk relation \mathcal{R} på mængden V af områderne, ved at to områder er i relation, såfremt de er naboområder. Ud fra denne relation kan vi konstruere mængden $E = \{(v, w) \mid v\mathcal{R}w, v \in V, w \in V\}$. Parret $G = (V, E)$ kaldes **den duale graf til kortet**.

Duale grafer er blot en lille mængde af, hvad der normalt forstås ved grafer i grafteori. Givet en ikke-tom mængde V og en (muligvis tom) mængde

$E = \{(v, w) \mid v, w \in V\}$, er parret $G = (V, E)$ en **graf**. Elementerne i V kaldes normalt **knuder**, og V siges at være knudemængden. Elementerne i E kaldes normalt **kanter**, og E siges at være kantmængden. For os er elementerne i kantmængden uordnede par, hvorfor de grafer, vi har med at gøre, er uorienterede. Hvis kanten (v, w) findes, siges v og w at være **naboknuder**. En ækvivalent problemstilling af 4-farve-problemet er nu at farve knuderne i den duale graf med fire farver, så naboknuder ikke får samme farve.

En repræsentation af en graf kan have forskellige egenskaber. Særligt er vi interesseret i de grafer, som **kan** repræsenteres således, at grafens kanter ikke mødes andre steder end i fælles endeknuder. Disse typer grafer kaldes **planare** grafer, og en sådan repræsentation kaldes en planar repræsentation. Man begyndte formentligt at interessere sig for denne type grafer netop i forbindelse med 4-farve-problemet. Specielt er den duale graf til et kort en planar graf, og en planar repræsentation af den fås ved, at en hovedstad udpeges i hvert område, og to hovedstæder forbindes med en kant, såfremt deres respektive områder har en grænse til fælles. En planar repræsentation af den duale graf til Sjællands amtskort ses på figuren herover til højre.



Figur 1:

Om en graf er planar eller ej kan være svært at afgøre. At en graf er planar er ikke ensbetydende med, at samtlige repræsentationer af den er planare. Omvendt er det ikke fordi, der ikke findes en umiddelbar planar repræsentation af en graf, at den ikke er planar. På figur 1(a) er en planar graf illustreret med en planar repræsentation. På figur 1(b) er illustreret en ikke-planar repræsentation af den samme graf.

De planare grafer, som er relevant for os, er dem, som er mættet i kanter, d.v.s planare grafer, som mister planariteten ved at tilføje blot én kant. Grafer med denne egenskab kaldes for **maksimale planare grafer**. Den planare graf repræsenteret på figur 1(a) er en maksimal planar graf med fire knuder.

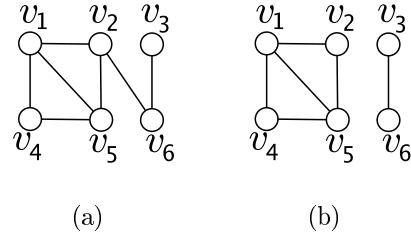
En planar tegning af en planar graf inducerer en naturlig inddeling af tegneplanen i **flader**. Fladerne har kanter fra kantmængden som grænse og udstyrer grafen med et topologisk aspekt. En planar tegning af en planar graf har således flader, men det har en graf ikke.

En 4-farvning af en graf er en farvning af grafens knuder med fire farver, så naboknuder får forskellige farver. Formuleringen af 4-farve-problemet i grafversionen omfatter lidt flere grafer end de grafer, som kan være duale. Dog forbydes kanter af formen $(v, v), v \in V$, for ellers vil en knude være nabo til sig selv. En sådan kant kaldes en **løkke**. Problemformuleringen af 4-farve-problemet i grafversionen betegnes fra nu af $4CT$, og er *som følger*.

Hovedsætning (4-farve-sætningen). Enhver løkkefri planar graf kan 4-farves.

Minimale modeksempler

En **vej** er en følge af forskellige knuder v_1, \dots, v_n , hvor kanterne $(v_i, v_{i+1})_{1 \leq i < n}$ er i kantmængden. En graf siges at være **sammenhængende**, såfremt der findes en vej mellem to vilkårlige knuder. Grafer, som er usammenhængende, består af flere komponenter. Den **komponent**, som en knude v er en del af, er den største sammenhængende delgraf, som indeholder v .



Følgelig har en sammenhængende graf én komponent. En repræsentation af en sammenhængende graf ses på figur (a), medens figur (b) repræsenterer en usammenhængende graf. I den sidstnævnte findes der ingen vej mellem f.eks. v_1 og v_3 . Delgrafen, bestående af knuderne v_3 og v_6 , og kanten (v_3, v_6) , er den største sammenhængende delgraf, som indeholder både v_3 og v_6 og er derfor en komponent. En anden komponent i den samme graf af delgrafen med knudemængden $V = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ og kantmængden $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_5), (v_4, v_5)\}$.

En **triangulering** er en repræsentation af en planar graf, hvor hver flade (også den uendelige flade) er en trekant, d.v.s. at de hver er begrænset med tre kanter. Figur 1(a) kan man se et eksempel på en triangulering. Bemærk, at denne graf også er maksimal planar. Dette er ingen tilfældighed. Enhver planar repræsentation af en maksimal planar graf er en triangulering [4, 6].

Antag, at 4-farve-sætningen ikke gælder. Der findes altså planare grafer, som ikke kan 4-farves. Disse grafer er modeksempler til $4CT$ og er derfor løkkefrie planare grafer. Betragt mængden af alle disse modeksempler. Man kan dele mængden i minimale klasser ved eksempelvis blot at betragte modeksemplerne med færrest knuder eller færrest kanter m.v., bare de er minimale i en eller anden forstand.

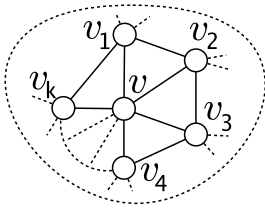
Til vores brug betragter vi de modeksempler, som har færrest knuder. De er **minimale** i antallet af knuder og kaldes af den grund **minimale modeksempler**. Graferne i denne klasse har følgelig samme antal knuder og har den egenskab, at planare grafer med færre knuder kan 4-farves, og dette er en direkte konsekvens af minimaliteten. Er en graf et minimalt modeksempel til $4CT$, medfører det dog ikke, at planare grafer med samme antal knuder også er det. En formel definition følger:

Definition 1. *Et minimalt modeksempel til $4CT$ er en planar graf G , som ikke kan 4-farves, og for enhver planar graf G^* , som opfylder, at $|G^*(V)| < |G(V)|$, kan G^* 4-farves.*

Når man nu vil vise, at $4CT$ gælder, er vores mål at samle så mange oplysninger som muligt om minimale modeksempler og håbe på, at de er tilstrækkelige til at vise, at minimale modeksempler ikke findes.

En undersøgelse af minimale modeksempler viser, at det er maksimale planare grafer [6, 4], og dermed, at enhver planar repræsentation af dem er en triangulering.

Vi definerer **graden** af en knude v til at være antallet af kanter, som v er endeknude for. Følgelig er graden af en knude v også antallet af dens naboer, og en knude af grad k kaldes en k -knude. En **kreds** er en vej, som starter og ender i samme knude. Længden af en kreds er antallet af forskellige knuder i kredsen. En kreds af længde k kaldes en k -kreds.



At et minimalt modeksempel er maksimal planar medfører, at vi ved præcist, hvordan nabolaget til en k -knude ser ud. Naboerne danner nemlig en kreds af længde k , som illustreret på figuren til venstre. Fjerner man kredsens knuder fra grafen, og alle de kanter, som de er endeknuder for, får man en ny (usammenhængende) graf bestående af to komponenter,

hvorfor kredsen er **adskillende**. I det tilfælde, som er illustreret på figuren, vil den ene komponent bestå af blot knuden v , da den adskillende kreds består af naboerne. Dette er imidlertid kun et specielt tilfælde, for kredse kan også adskille grafen i større komponenter.

En videreundersøgelse af minimale modeksempler viser, at de ikke har nogen adskillende kreds af længde tre eller fire. Det første tilfælde vises senere, mens beviset for den anden kan findes i [6, 4]. Endvidere ligger de eneste adskillende 5-kredse i minimale modeksempler omkring 5-knuder. En graf med denne egenskab kaldes **internt 6-sammenhængende**. Dette har til følge, at minimale modeksempler ingen knuder har af grad tre eller fire, for ellers vil deres naboer udgøre en adskillende kreds af længde hhv. tre eller fire.

Borte borte ...

At samle oplysninger om, hvordan et minimalt modeksempel ikke ser ud, spiller en central rolle i 4-farve-problemet. Vi betragter en delgraf G af et minimalt modeksempel T , og groft sagt 4-farver induktivt $T \setminus G$ og udvider denne 4-farvning til en 4-farvning af T . Induktionen starter ved grafer med højst fire knuder, som jo trivielt kan 4-farves. Hvis dette lykkes, kan denne fremgangsmåde påpege nogle delgrafer, som ikke kan være indeholdt i et minimalt modeksempel.

Før at kunne bruge denne metode, betragter vi delgrafer med visse egenskaber. Antag, vi har en 4-farvning af G og betragt to knuder v_1 og v_2 i G . Hvis disse knuder er naboknuder i T , men ikke i G , har de måske fået samme farve i 4-farvningen af G , og vi får besvær, når vi skal udvide 4-farvningen af G til en 4-farvning af T . Vi ønsker derfor at undgå dette problem og definerer de delgrafer, vi ønsker:

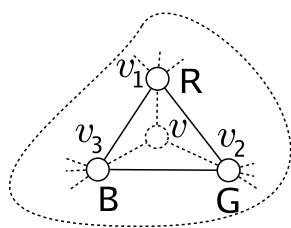
Definition 2. G er en **induceret delgraf** af en maksimal planar graf T , såfremt

G er en delgraf af T og hver kant i T med begge endeknuder i $G(V)$ er i G .

Når vi betragter en induceret delgraf, har vi brug for at vide, hvordan delgrafen er indeholdt i den oprindelige graf. En konfiguration er et værktøj, som udstyrer en induceret delgraf med oplysninger om knudernes grad i den oprindelige graf.

Definition 3. En **konfiguration** er en induceret delgraf G af T udstyret med en afbildning $\gamma : G(V) \rightarrow \mathbb{N}$, så $\forall v \in G(V), \gamma(v) = \text{grad}_T(v)$, hvor $\text{grad}_T(v)$ er graden af knuden v i T .

Definition 4. En konfiguration (G, γ) **indgår** i T , såfremt G er en induceret delgraf af T og hver knude v i G har grad $\gamma(v)$ i T .



Figur 2:

Et eksempel på en meget simpel konfiguration er en knude af grad tre. Vi viser her, at minimale modeksempler ingen 3-knude har. Lad derfor G_m være et minimalt modeksempel, og lad v være en 3-knude. Som illustreret på figuren, danner naboerne omkring v en 3-kreds, som er en adskillende 3-kreds, idet kredsens indre ikke er tom. Betragt nu grafen $G_m \setminus \{v\}$, hvor man fjerner v fra den oprindelige graf, samt alle de kanter som v er endeknude for.

Denne graf har én knude færre end G_m og kan induktivt 4-farves, hvor naboerne til v får tre forskellige farver, da de er indbyrdes naboer. På figuren har naboerne fået farverne rød, grøn, og blå og repræsenteres med deres første bogstav. Denne 4-farvning kan udvides til en 4-farvning af G_m , hvor v får den fjerde farve. G_m kan derfor ikke være et minimalt modeksempel, og dermed har et minimalt modeksempel ingen 3-knude.

Formålet er at finde konfigurationer, som ikke kan indgå i et minimalt modeksempel. En konfiguration med denne egenskab kaldes **reducibel**. En knude af grad tre er en reducibel konfiguration. Om lidt viser jeg, at en anden konfiguration ved navn Birkhoffs diamant er en reducibel konfiguration. En (meget) determineret og (meget) opfindsom person kan dermed sætte sig ned og begynde at lede efter reducible konfigurationer. Men det er ikke nok. For selvom man kan danne et bibliotek af reducible konfigurationer, siger det kun noget om, hvordan et minimalt modeksempel **ikke** ser ud. Hvis man derimod kan vise, at mængden af de fundne reducible konfigurationer er **uundgåelig**, d.v.s at mindst en af konfigurationerne i mængden indgår i ethvert minimalt modeksempel, har man modbevist eksistensen af minimale modeksempler og har bevist 4-farve-sætningen.

For dette er hele essensen i de to tilgængelige beviser for $4CT$. Både Appel, Haken og Koch i første omgang og $RSSR$ senere fremviste en uundgåelig mængde af reducible konfigurationer. Den førstnævnte indeholdt 1476 konfigurationer,

mens den seneste ”kun” indeholdt 633. Dér spillede EDB en stor rolle, for indlejrede Kempe-kæde argumenter sammen med manipulationer af grafer bliver hurtigt uoverskuelige. Reducibiliten af konfigurationerne sikres af et computerprogram. Ligeledes vises konfigurationerne uundgåeligt ved hjælp af en computer.

Diamant og kæder

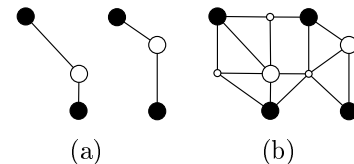
Jeg viser om lidt reducibiliteten af en mere kompliceret konfiguration. Beviset kræver imidlertid et værktøj, kaldet Kempe-kæder, som jeg vil starte med at præsentere.

Betragt en 4-farvet planar graf G og to farver a og b . Delgrafen $G_{a,b}$, bestående af knuder farvet med a eller b og alle kanterne mellem dem, er selv en planar graf. Det er dog ikke sikkert, at $G_{a,b}$ er sammenhængende, og $G_{a,b}$ består derfor af én eller flere komponenter. Disse komponenter kaldes for a - b **Kempe-kæder**. Begrebet Kempe-kæder stammer fra Kempes forsøg på at bevise $4CT$ i 1879 og bliver i høj grad brugt i behandlingen af 4-farve-problemet. Kempes ”bevis” blev bredt anerkendt som værende et bevis til 4-farve-sætningen, men indeholdt imidlertid en fejl, det blev påpeget af P. J. Heawood i 1890.

Betragt en 4-farvning af en planar sammenhængende graf som illustreret på figuren (a) til venstre. Blandt de fire farver er farverne sort og hvid. På figuren er knuderne farvet med en af disse to farver repræsenteret med store hvide eller sorte cirkler. De øvrige knuder farvet med en af de to andre farver er repræsenteret ens med små cirkler. En planar repræsentation af delgrafen $G_{\text{sort,hvid}}$ ses på figur (b) og består af to komponenter. Hver af disse er en sort-hvid Kempe-kæde.

Kempe-kæder bruges til at ændre en 4-farvning af en graf ved et bytte om på farverne i en hel Kempe-kæde. For sådan, som vi har konstrueret dem, har knuderne i a - b Kempe-kæde ingen nabo i den oprindelige graf farvet a og b , og som ikke allerede er en del af den samme a - b Kempe-kæde. Dette betyder formelt, at man kan permutere farverne a og b i en a - b Kempe-kæde uden at bryde 4-farvningen af den oprindelige graf. Man får naturligvis en anden 4-farvning af grafen, men ikke desto mindre er denne 4-farvning gyldig.

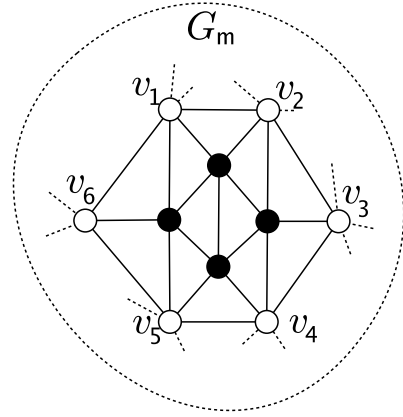
Vi fortsætter med vores eksempel og bytter om på farverne sort og hvid i den ene sort-hvide Kempe-kæde. Den anden lader vi stå uændret. En repræsentation af den nye farvning ses på figur (a). Den oprindelige 4-farvning af grafen ændres tilsvarende og illustreres på figur (b).



Som et eksempel på en mere avanceret reducibel konfiguration betragter vi Birkhoffs diamant. Birkhoffs diamant består af en 5-knude med tre på hinanden følgende naboknuder af grad fem. Disse knuder er repræsenteret ved sorte knuder

i figuren nedenfor til højre. Denne konfiguration er opkaldt efter G. D. Birkhoff[3], som har vist i 1913, at denne konfiguration ikke kan indgå i et minimalt modeksempel. Jeg gengiver her hans argumenter.

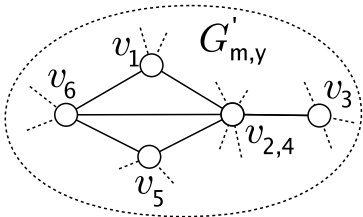
Antag, at en sådan konfiguration er indeholdt i et minimalt modeksempel G_m , altså, at grafen G_m indeholder en 5-knude, som har tre naboer af grad fem. En planar repræsentation af G_m illustreres på figuren til højre og konstrueres ud fra, at G_m er maksimal planar. På denne repræsentation har de sorte knuder grad fem. Lad C betegne 6-kredsen $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1$. Vi ved ikke noget om graderne af knuderne i C , men ved derimod, at kredsen C er en adskillende 6-kreds.



Betragt grafen $G_{m,y}$, hvor man fjerner det indre af 6-kredsen i G_m , altså, hvor man fjerner 5-knuderne fra Birkhoffs diamant (de sorte knuder) og alle de kanter, som de er endeknuder for. Vi konstruerer en ny graf $G'_{m,y}$ ud fra $G_{m,y}$ på følgende måde:

- Knudemængden af $G'_{m,y}$ er $G_m(V) \setminus \{v_2, v_4\} \cup \{v_{2,4}\}$.
- Kanterne af $G_{m,y}$, som hverken har v_2 eller v_4 som endeknude, er med i kantmængden af $G_{m,y}$, medens naboerne til v_2 og v_4 i $G_{m,y}$ bliver naboer til $v_{2,4}$ i $G'_{m,y}$.
- Kanten $(v_{2,4}, v_6)$ tilføjes kantmængden.

Den nye graf $G'_{m,y}$ ser indviklet ud, men er faktisk resultatet af en ganske almindelig manipulation i grafteori. Før kanten $(v_{2,4}, v_6)$ er tilføjet, har vi blot **identificeret** knuderne v_2 og v_4 i knuden $v_{2,4}$. Dette betyder, at vi har smeltet knuderne sammen i én og samme knude, og at de identificerede knuders naboer bliver naboer til den nye knude.



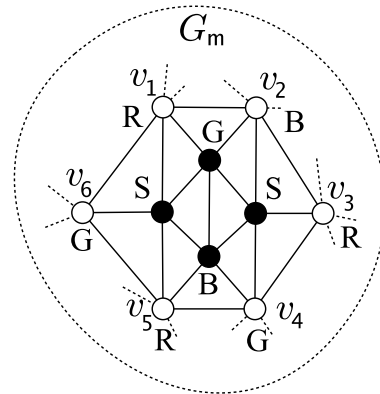
Den planare repræsentation af $G'_{m,y}$ til venstre kan hjælpe læseren med at indse resultatet af manipulationerne. Jeg påstår nu, at $G'_{m,y}$ er en løkkefri og planar graf. Hvis v_2 og v_4 var naboknuder i G_m , vil planariteten af G_m tvinge v_3 til at være en 3-knude, hvilket vi har vist, ikke er indeholdt i et minimalt modeksempel. Derfor findes kanten $(v_{2,4}, v_{2,4})$ ikke, hvorfor $G'_{m,y}$ er løkkefri. Planariteten sikres af figuren til venstre. Endvidere har $G'_{m,y}$ færre knuder end G_m . Grafen $G'_{m,y}$ kan derfor 4-farves induktivt, og vi betragter en 4-farvning af den. Da $v_1, v_6, v_{2,4}$ er indbyrdes naboer, skal tre af farvene bruges på dem. Har vi farvene rød, sort, blå og grøn til at farve med, kan vi antage, at v_1 eksempelvis er farvet rød, $v_{2,4}$ er farvet blå, og at v_6 er farvet grøn. Der

er ikke så mange muligheder for de andre knuder. Knuden v_3 har fået en farve blandt rød, sort og grøn, og knuden v_5 har enten fået rød eller sort.

En 4-farvning af $G'_{m,y}$ inducerer en foreløbig delvis 4-farvning af G_m , hvor knuderne v_2 og v_4 får samme farve. Det er ikke et problem, for et ovenstående argument sikrer, v_2 og v_4 ikke kan være naboknuder i G_m . Vi mangler nu blot at farve det indre af kredsen, og det er lige netop det, vi gør nu.

Vi kan ikke forudsige mere og er derfor nødt til at kigge på alle de seks muligheder, som de mulige farvninger af v_3 og v_5 medfører. Disse muligheder er illustreret på figur 3. Et hurtigt tjek viser, at en udvidelse af den delvis 4-farvning til den indre af kredsen er umiddelbar i alle tilfældene på nær i tilfældet, hvor v_3 og v_5 er farvet rød (tilfældet (c)). Her bliver vi nødt til at anvende et Kempe-kæde argument.

Hvis v_3 og v_5 er en del af den samme rød-sortte Kempe-kæde, består denne kæde af knuder i det ydre af C . Den grøn-blå Kempe-kæde, som v_4 er en del af, vil derfor ikke have fælles knuder med den rød-sortte Kempe-kæde, som v_3 og v_5 er en del af. Derfor sikrer planariteten af G_m , at v_2 og v_4 ikke er en del af den samme grøn-blå Kempe-kæde. Vi kan derfor bytte om på farvene i den grøn-blå Kempe-kæde, som v_4 er en del af, og vi får en ny delvis 4-farvning af G_m , hvor v_4 er grøn, og vi kan udvide denne farvning til en 4-farvning af G_m , som illustreret på figuren til højre.



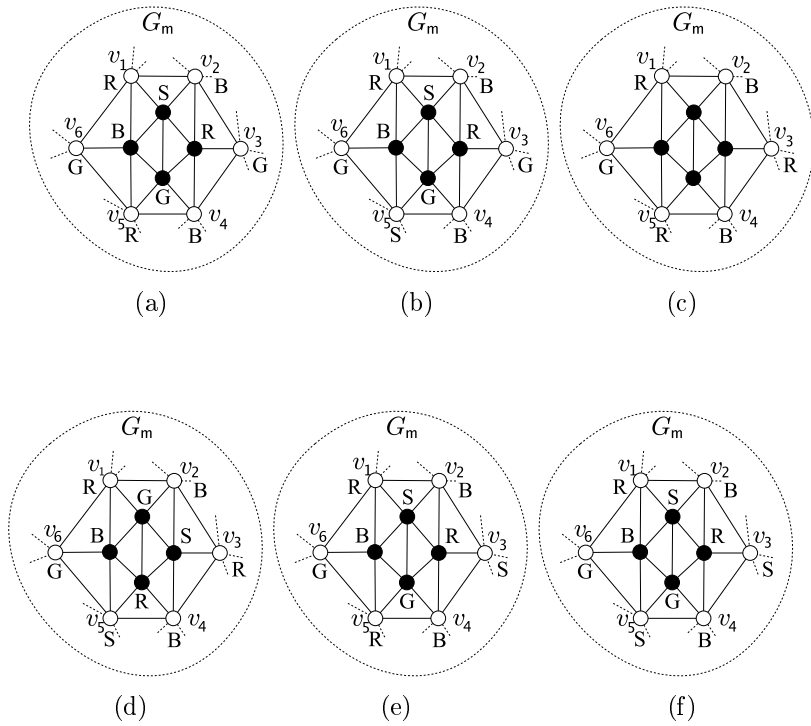
Hvis v_3 og v_5 derimod ikke er i den samme rød-sortte Kempe-kæde, betragter vi den rød-sortte Kempe-kæde, som v_3 er en del af. Hvis ikke v_1 er en del af den, bytter vi om på farvene og får en ny delvis farvning af G_m , hvor v_3 er i sort. Vi kan nu udvide til en 4-farvning af G_m som i tilfældet (e) illustreret på figur 3.

Vi mangler nu det tilfælde, hvor v_1 og v_3 er en del af den samme rød-sortte Kempe-kæde, og v_5 er ikke en del af den. I dette tilfælde kan vi bytte om på farvene i den rød-sortte Kempe-kæde, som v_5 er en del af. I denne nye farvning er v_5 i sort, hvorfor vi ender med tilfældet (d) af figur 3.

Vi har været alle mulighederne igennem og kan dermed konkludere, at Birkhoffs diamant ikke kan indgå i et minimalt modeksempel, og at det derfor er en reducibel konfiguration.

Litteraturliste

- [1] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable part I: Discharging. *Illinois J. Math*, 21:429–490, 1977.



Figur 3:

- [2] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colorable part II: Reducibility. *Illinois J. Math.*, 21:491–567, 1977.
- [3] G. Birkhoff. The reducibility of maps. *Amer. J. Math.*, 35:114–128, 1913.
- [4] R.A. Wilson. *Graphs, colourings and the four-colour theorem*. Oxford University Press, 2002.
- [5] Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour, and Robin Thomas. The four-colour theorem. *J. Comb. Theory Series B*, 70(1):2–44, 1997.
- [6] Thomas Saaty and Paul Kainen. *The four-color problem*. McGraw-Hill, New York, 1977.