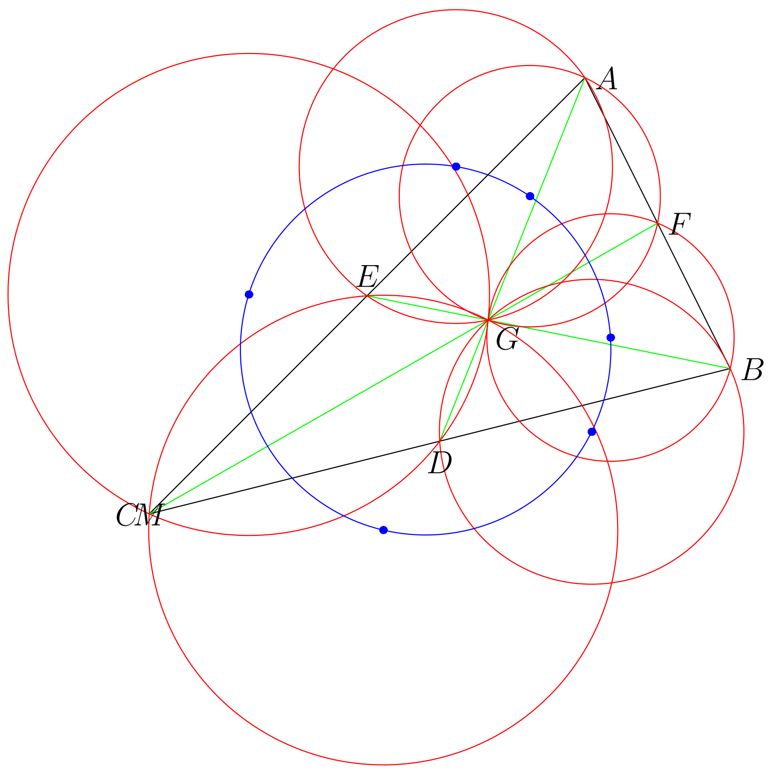
Trekantens medianer

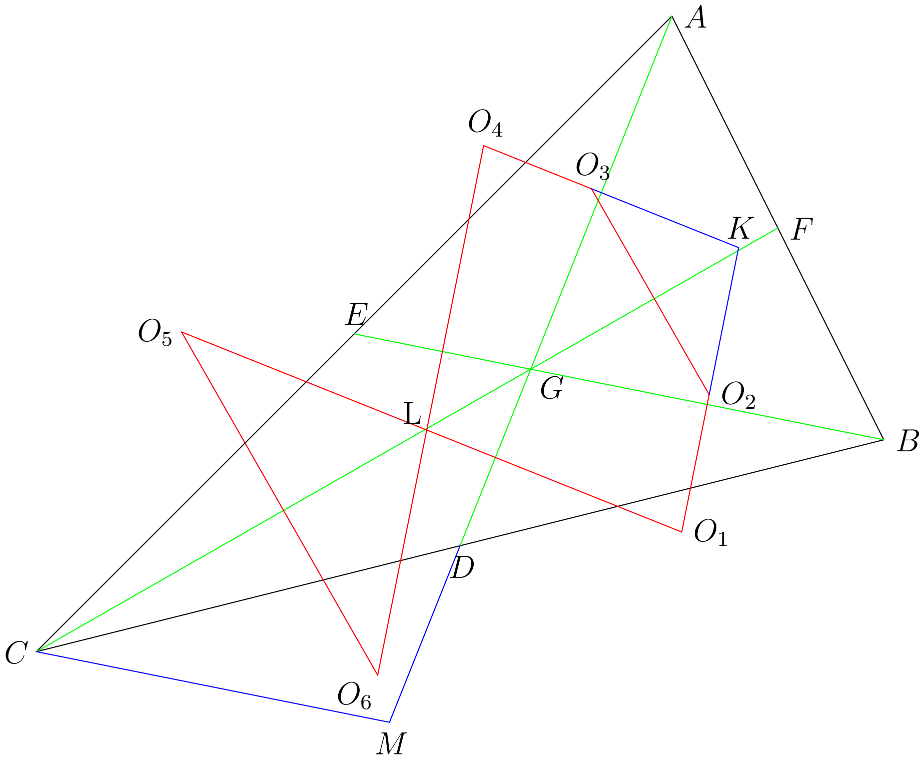
Nicolaj Strands

Side-9 sætningen er i dette nummer hentet fra plangeometrien. Der er tale om et overraskende resultat vedrørende medianerne i en trekant.



Side 9-sætningen. *En Trekants medianer skærer hinanden i et punkt og deler herved trekanten op i 6 mindre trekanter. Centrerne for disse trekanters omskrevne cirkler ligger på en cirkel.*

Bevis. Vi betegner midtpunkterne af trekantens sider D, E og F og medianernes skæringspunkt med G. Lad desuden O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 og O_6 være centrer for de omskrevne cirkler for $\triangle DBG$, $\triangle BFG$, $\triangle FAG$, $\triangle AEG$, $\triangle ECG$ og $\triangle CDG$ (se figuren).



Linjen O_3O_4 er midtnormal til AG da $|O_3A| = |O_3G|$ og $|O_4A| = |O_4G|$. På samme måde er O_6O_1 midtnormal til GD. De er altså begge vinkelret på AD og deres indbyrdes afstand er $\frac{1}{2}|AD|$. Tilsvarende er O_1O_2 og O_4O_5 vinkelrette på BE med indbyrdes afstand $\frac{1}{2}|BE|$.

Lad K være skæringspunktet mellem linjerne O_1O_2 og O_3O_4 og L skæringspunktet mellem O_4O_5 og O_1O_6. Betragt parallelogrammet KO_4LO_1. En højde i parallelogrammet er afstanden mellem de parallelle linjer O_3O_4 og O_1O_6, dvs. den er $\frac{1}{2}|AD|$, så parallelogrammets areal er

$$\mathrm{Ar}(\square KO_4LO_2) = \frac{1}{2}|AD||KO_4|.$$

Den anden højde i parallelogrammet er afstanden mellem de parallelle linjer KO_1 og LO_4 som er $\frac{1}{2}|BE|$. Parallelogrammets areal er altså også

$$\mathrm{Ar}(\square KO_4LO_2) = \frac{1}{2}|BE||KO_1|.$$

Altså er

$$|AD||KO_4| = |BE||KO_1|$$

eller

$$\frac{|KO_1|}{|KO_4|} = \frac{|AD|}{|BE|}. \tag{1}$$

Vi ser nu på $\triangle KO_2O_3$. Vi har

$$KO_2 \perp BG, \quad O_2O_3 \perp FG, \quad KO_3 \perp AG,$$

hvoraf

$$\angle KO_2O_3 = \angle BGF \quad \text{og} \quad \angle KO_3O_2 = \angle FGA. \tag{2}$$

Så får vi i $\triangle KO_2O_3$ at

$$\begin{aligned} O_2KO_3 &= 180^\circ - \angle KO_2O_3 - KO_3O_2 \\ &= 180^\circ - \angle BGF - \angle FGA \\ &= 180^\circ - \angle BGA = \angle DGB. \end{aligned}$$

En linje gennem C parallel med BG skærer AG i M. Så er

$$\angle MCG = \angle BGF = \angle KO_2O_3 \quad \text{og} \angle MGC = \angle FGA = \angle KO_3O_2,$$

hvor vi har brugt (2). Dermed er $\triangle KO_2O_3$ og $\triangle MCG$ ensvinklede så

$$\frac{|KO_3|}{|KO_2|} = \frac{|MG|}{|MC|}. \tag{3}$$

Nu er $\triangle MCD$ og $\triangle GBD$ kongruente fordi de er ensvinklede og $|CD| = |BD|$. Så er

$$|MG| = 2|GD| = \frac{2}{3}|AD| \quad \text{og} \quad |MC| = |GB| = \frac{2}{3}|BE|.$$

Dette giver sammen med (3) og (1) at

$$\frac{|KO_3|}{|KO_2|} = \frac{|MG|}{|MC|} = \frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|KO_1|}{|KO_4|},$$

eller

$$|KO_1||KO_4| = |KO_3||KO_4|.$$

Dette medfører ifølge *korde-sekantsætningen* at punkterne O_1, O_2, O_3 og O_4 ligger på en cirkel. På samme måde ligger O_2, O_3, O_4 og O_5 på en cirkel og O_3, O_4, O_5 og O_6 ligger på en cirkel. Da cirklerne to og to har tre punkter til fælles må de være sammenfaldende. $\square$

Kilde: Matematiske miniaturer, Jens Carstensen og Alija Muminagić.