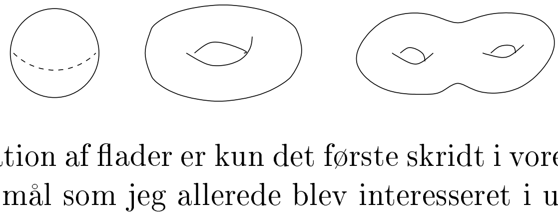
Løkkerum og afbildningsklassegrupper

Nathalie Wahl

Hej, jeg er et nyt ansigt i E-bygningen… Jeg starter som lektor d. 1 juli, 2006. Lad mig begynde med et par ord om mig selv: Jeg blev født i Bruxelles d. 3. oktober, 1976, og det var der jeg voksede op. Ma langue maternelle est le français. I 1994 blev jeg indskrevet på Université Libre de Bruxelles, hvorfra jeg tog min bachelorgrad i matematik i 1998. Derefter tog jeg til Oxford, og fik i 2001 min PhD, under vejledning af Ulrike Tillmann. Siden da har ansættelser bragt mig til Northwestern University i Chicago, Århus Universitet (hvor jeg lærte at tale dansk og spise superpiratos…), og derefter til University of Chicago, på den anden side af byen fra Northwestern. Jeg kommer til Københavns Universitet, sammen med Jesper Grodal, for at udvide topologigruppen ved KU: Fra at bestå af en person, Jesper Michael Møller, bliver vi nu tre! Og flere mennesker betyder selvfølgeligt flere aktiviteter: kurser, seminarer osv., og vi har heldigvis fået nogle penge fra Forskningsrådet for Natur og Univers til at invitere gæster for. Vi starter med en åbningskonference d. 1-3 september, 2006 og en workshop d. 4-8 september, som vi organiserer sammen med min matematiske "bedstefar", Ralph Cohen fra Stanford, som tager 4-5 af sine 9 nuværende PhD studerende og en masse post docs med… Der bliver liv og glade dage. Hvis du har lyst til at vide mere om de nye aktiviteter, kan du kigge på topologihjemmesiden `www.math.ku.dk/topology` eller min hjemmeside `www.math.ku.dk/~wahl`.

OK, så nu må jeg vist igang med at fortælle hvad jeg forsker i. Og hvad er topologi i det hele taget? Topologi er en gammel tradition i Danmark, gående tilbage til Poul Heegaard (1871–1948) og Jakob Nielsen (1890–1959). De var, ligesom jeg, intereserede i geometriske objekter som for eksempel flader. Flader er klassificerede ved hvor mange "huller" de har: hver lukket orienterbar flade er enten en sfære (genus 0), en donut, eller torus, (genus 1), en "dobbelt donut" (genus 2), en "tripel donut", osv.



Denne klassifikation af flader er kun det første skridt i vores (delvise) forståelse af flader. Et spørgsmål som jeg allerede blev interesseret i under min PhD er en sammenhæng mellem flader og løkkerum.

Givet et topologisk rum X med udvalgt punkt $*$, er *løkkerummet* ΩX "rummet af alle løkker i X baseret i $*$", det vil siger rummet af alle afbildninger $S^1 \to X$

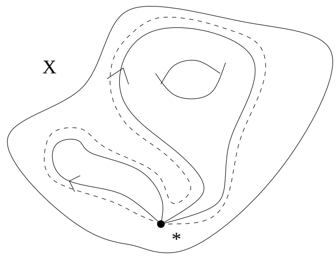
som tager $1 \in S^1$ til $* \in X$. Det kan ligeledes beskrives som rummet af alle afbildninger

$$f : [0,1] \to X \quad \text{med} \quad f(0) = * = f(1).$$

En interessant egenskab ved løkkerum er at de kommer med en multiplikation:

$$\mu : \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$$

hvor $\mu(f,g)$ er den løkke som først følger f og derefter g, det vil sige $\mu(f,g)(t) = f(2t)$ når $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ og $\mu(f,g)(t) = g(2t-1)$ når $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Multiplikationen er ikke helt associativ, men den er *homotopi associativ*, idet løkken $\mu(f,\mu(g,h))$ er homotop (kan deformeres) til $\mu(\mu(f,g),h)$. Og da forskellen bare er reparametriseringen, kan disse homotopier vælges så de passer sammen også når man ganger flere løkker sammen, noget som man, hvis man er med på noderne, kalder en A_∞-multiplikation.

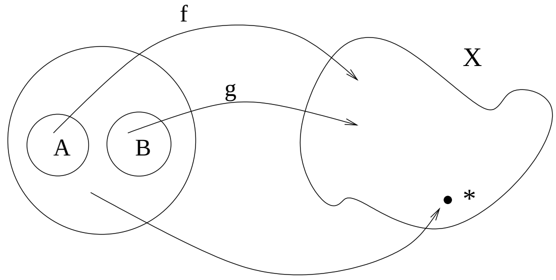


Topologer i 60erne viste faktisk at man kan genkende løkkerum ved egenskaben at der findes en sådan multiplikation: Hvis et sammenhængende topologiske rum Y har en A_∞-multiplikation $\mu : Y \times Y \to Y$, så eksisterer der et rum X sådan at Y er homotopt til ΩX.

Hvad med et dobbelt løkkerum $\Omega^2 X = \Omega(\Omega X)$? Et element i $\Omega^2 X$ kan beskrives som en afbildning fra en cirkelskive

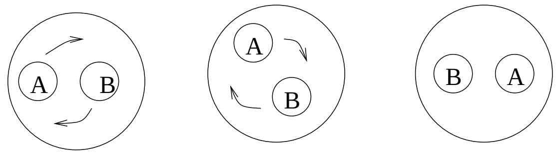
$$f : D^2 \to X \ \text{ med } \ f(\partial D^2) = *$$

og multiplikationen (som eksisterer fordi $\Omega^2 X$ er et løkkerum) kan nu beskrives med følgende billede:



$\mu(f,g)$ er defineret på D^2 ved at bruge f på A, g på B, og sende resten af cirkelskiven til $* \in X$. Dette beskriver en multiplikation, men det er klart at jeg kunne have valgt andre del-cirkelskiver i D^2, større eller mindre, og placeret anderledes. Når der er for mange muligheder at vælge imellem i matematik, er en god løsning at tage dem alle sammen. I dette her tilfælde, har vi et topologisk rum af multiplikationer: rummet $\mathcal{D}(2)$ af alle indlejringer $D^2 \coprod D^2 \hookrightarrow D^2$. Hvert punkt $\mu \in \mathcal{D}(2)$ kan bruges som en multiplikation på et dobbelt løkkerum.

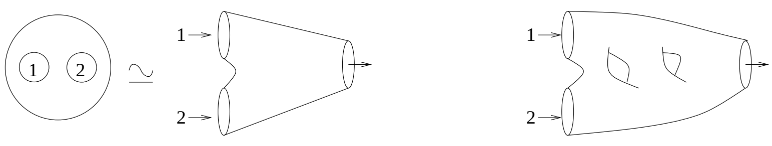
Multiplikationen μ er homotopi associativ ligesom før og følgende billede viser at μ også er homotopi kommutativ, det vil sige at $\mu(f, g) \neq \mu(g, f)$ men den ene kan deformeres til den anden for enhver f, g (og enhver μ).



Altså vores multiplikation på dobbelte løkkerum er homotopi kommutativ på grund af en symmetri af cirkelskiven!

Ligesom i én dimension (tilfældet Ω) eksisterer der også for Ω^2 en sætning som siger at et rum Y med en passende homotopi kommutativ A_∞-muliplikation er homotop til et dobbelt løkkerum. En cirkelskive med to huller —altså et element i $\mathcal{D}(2)$ ovenfor— kan også opfattes som en genus 0 flade hvor randen er forening af tre cirkler. Mere generelt er en genus 0 flade med rand $k+1$ cirkler et element i $\mathcal{D}(k)$, rummet af indlejringer af k disjunkte cirkelskiver i en cirkelskive, som vi også kan opfatte som måder at gange k elementer i et dobbelt løkkerum sammen på. Samlingen af elementer i $\{\mathcal{D}(k)\}_{k\geq 0}$ består altså af "alle genus 0 flader med et virkårligt antal rande", men er også lig med "alle måder at gange et vilkårligt antal elementer sammen i $\Omega^2 X$". (Og den rigtige måde at udtrykke det jeg hentydede til ved "passende homotopi kommutativ A_∞" er at sige at *operad*'en $\{\mathcal{D}(k)\}_{k\geq 0}$ virker på Y...)

Højere genus flader med rand kan også tænkes som multiplikationer. Jeg vil ikke forklare detaljerne, men ideen kommer frem i følgende billede, hvor man tænker på en multiplikation som noget med to inputs og et output:



Og hvorfor skulle man holde sig til 1 dimension (linier, enkelte løkkerum) og 2 dimensioner (flader, dobbelte løkkerum), når man kan gøre dette for et vilkårligt Ω^n, ja endog for $n = \infty$, alså et *uendeligt løkkerum*, hvis man opfatter dette passende.

Puha, jeg har nu snakket en del om løkkerum, som jo er spændende nok i sig selv, men hvad har det at gøre med de der afbildningsklassegrupper?? Afbildningsklassegruppen af en flade er simpelthen dens gruppe af symmetrier! Og det er denne gruppe man skal forstå hvis man virkeligt vil forstå flader. (Her må jeg desvære indrømme at en googlesøgning af denne danske oversættelse af det engelske ord "mapping class group" kun gav to hits, hvorimod det engelske ord gav 66.300, hvoraf det første er en definition fra Wikipedia!)

Da jeg kom til Oxford i 1998, havde Tillmann lige vist at den "stabile afbildningsklassegruppe", løst sagt gruppen af symmetrier af en flade af uendelig genus, efter at man anvender Quillen's magiske "plus konstruktion" (den som man også bruger til at definere højere algebraisk K-teori) giver én et *uendeligt* løkkerum. Folk var meget overraskede over dette resultat, og hun blev inviteret til den prestigefulde *International Congress of Mathematicians* i Kina i 2002, for at fortælle om det. Grunden til at topologer var så overraskede var at der faktisk var én der havde vist at det ikke kunne være rigtig! —en forkert konklusion fra korrekte udregninger. Tillmann havde faktisk to beviser for sin sætning som hver bestod i at give en multiplikation. En af de ting jeg viste i min PhD afhandling var at begge disse to multiplikationer faktisk er ækvivalente! Dette resultat publicerede jeg i det kendte topologitidskrift *Topology*. Det er her i historien at Århus kommer ind i billedet: Ib Madsen fra Århus blev straks interesseret i Tillmanns resultater og efter samarbejde med Tillmann, beviste han sammen med Michael Weiss fra Aberdeen en generalisering af Mumfords formodning, en formodning om kohomologi af afbildningsklassegrupper som kom fra algebraisk geometri. Det giver altid meget opmærksomhed når man viser formodninger uden for sit eget fagområde, og Madsen-Weiss resultatet udkommer da også snart i det mest prestigefyldte tidsskrift af dem alle: *Annals of Mathematics*. Det var derfor naturligt at tage til Århus for at snakke med Ib, og min tid der førte blandt andet til at jeg fandt et bevis for Mumfords formodning for *ikke-orienterbare* flader, altså sådanne nogle som det to-dimensionelle reelle projektive rum, og Klein flasker, en artikel som jeg i februar i år sendte på ArXiv'et (`www.arxiv.org`), der hvor matematikere sender deres artikler før de udkommer i et tidskrift, og mit bevis er nu ved at blive gennemlæst af eksperter.

Men hvordan kom jeg så til København? Denne spændende historie går helt tilbage til en sommerkonference i Stanford, Californien i 1999, og indeholder også ikke-matematiske aspekter. Men den vil jeg lade læseren have til gode. Til slut vil jeg blot fortælle at en god start til at lære mere om topologi er at følge Jesper Michael's introduktionskursus i Blok 1 til næste efterår. Ja, den utålmodige læser kan faktisk tyvstarte ved at kigge i lærebogen Algebraic Topology af Allen Hatcher fra Cornell (som jeg iøvrigt også har skrevet artikler med...). Bogen kan downloadedes fra `www.math.cornell.edu/~hatcher`. Kurset bliver fulgt op i Blok 2 med kurset "Topics in Algebraic Topology", som Jesper G. og jeg afholder. Vi ses!