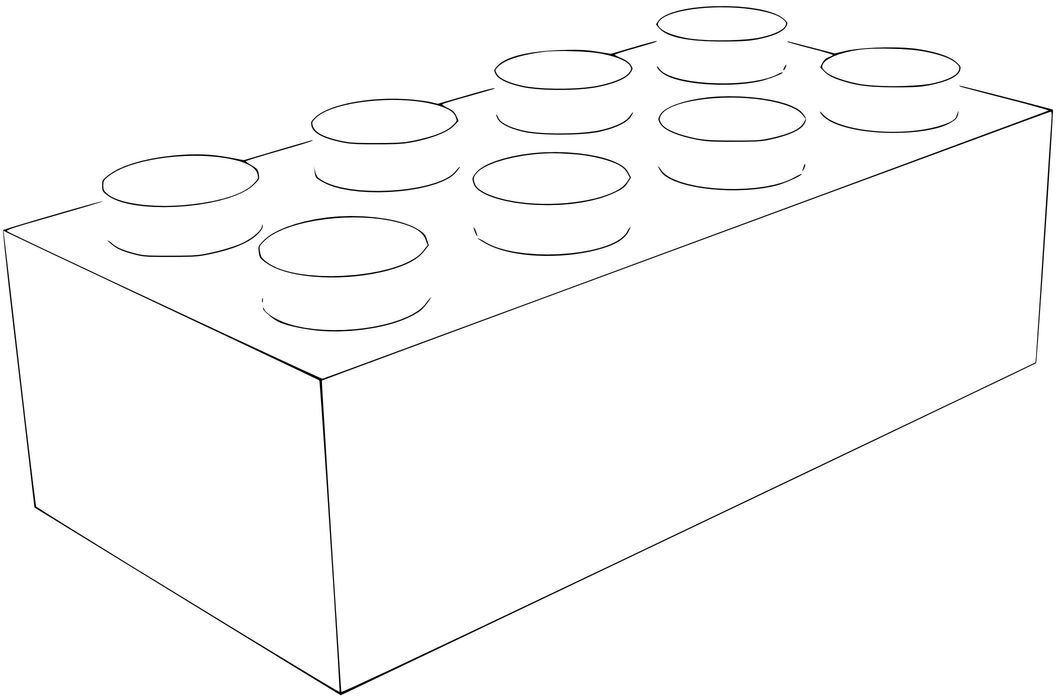
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

19. årgang, nr. 4, juni 2006



2×4-LEGO-klodsen, f. 1949. Har siden sine første dage været kilde til megen kreativitet, og med tiden også givet anledning til matematiske spekulationer. En lille gruppe matematikere fra HCØ har i de seneste år forsøgt at gøre rede for bl.a. hvordan antallet af bygninger der kan bygges med LEGO-klodser afhænger af antallet af klodser. Her har 2×4-klodsen, blandt de uendeligt mange tænkelige LEGO-klodser, opnået en status som den kanoniske LEGO-klods

Indhold

Præmieopgave

af Mikkel Abrahamsen

Definér et indre hul i en LEGO-bygning til at være et område der ikke indeholder nogen klodser og som er helt afgrænset af klodser. Opgaven lyder nu: Bestem det mindste antal 2×4-LEGO-klodser med hvilket man kan bygge en bygning med tre indre huller.

Klassifikation af endeligdimensionelle moduler over semisimple Lie algebraer

Betina Jensen

Dette er en kort oversigtsartikel om dele af teorien om Lie algebraer og moduler over disse. Artiklen behandler bl.a. rodrumsdekomposition, vægtrum og klassifikation af endeligdimensionelle irreducible moduler over semisimple Lie algebraer.

Indledning

Lie algebraer er nogle algebraiske objekter, som udover at være interessante i sig selv, er relevante i forbindelse med studiet af Lie grupper. Lie grupper er mangfoldigheder, som er udstyret med en gruppestruktur. Sidstnævnte er interessante, bl.a. fordi de finder anvendelse i mange forskellige grene af matematikken, fx differentialligninger, talteori, geometri og matematisk fysik. Der er en tæt forbindelse mellem Lie algebraer og Lie grupper, så ved at studere Lie algebraer, kan vi lære noget om Lie grupper. En begrundelse for at studere Lie algebraerne i stedet for Lie grupperne er, at de er algebraiske objekter, som er "lettere" at studere, bl.a. fordi man kan benytte sig af lineær algebra. En måde at studere Lie algebraer på er at studere de moduler, en Lie algebra tillader. I denne artikel vil vi kigge på irreducible moduler over semisimple Lie algebraer.

Lie algebraer og moduler

I det følgende lader vi F betegne et legeme.

Definition 1. *En Lie algebra L over F er et vektorrum over F, udstyret med en bilineær operation $[-,-]\colon L \times L \to L$ ("bracket"), som opfylder følgende betingelser*

(a) $[x,x] = 0$ *for alle* $x \in L$
(b) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ *for alle* $x,y,z \in L$

(Den sidste betingelse i definitionen kaldes Jacobiidentiteten.)

Bemærk at (a) medfører at $-[x,y] = [y,x]$ for alle $x,y \in L$ (ses ved at benytte bilineariteten på $[x+y,x+y]$). En Lie algebra L kaldes *abelsk*, hvis $[x,y] = 0$ for alle $x,y \in L$. Til ethvert element $x \in L$ knyttes afbildningen $\operatorname{ad} x\colon L \to L$, givet ved $\operatorname{ad} x(y) = [x,y]$. Enhver Lie algebra L udstyres med bilinearformen $B_L\colon L \times L \to \mathsf{F}$, givet ved $B_L(x,y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)$, hvor Tr betegner sporet. Denne afbildning kaldes *Killingformen.*

Definition 2. *En modul V over L er et vektorrum over F udstyret med en L–multiplikation $L \times V \to V$, betegnet $(x, v) \mapsto x.v$, med følgende egenskaber*

- $(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v)$
- $x.(av + bw) = a(x.v) + b(x.w)$
- $[x, y].v = x.y.v - y.x.v$

for alle $x, y \in L$, $v, w \in V$ og $a, b \in \mathsf{F}$.

I resten af denne artikel antages L at være en endeligdimensionel Lie algebra over F.

Lad V og W være L–moduler. En modul–homomorfi $\varphi\colon V \to W$ er en F–lineær afbildning, som har egenskaben $\varphi(x.v) = x.\varphi(v)$ for alle $x \in L$, $v \in V$. En modul–isomorfi er en bijektiv modul–homomorfi. Vi siger at V er *irreducibel*, hvis V ikke indeholder nogen ægte undermoduler, bortset fra 0. Modulen V kaldes *fuldstændig reducibel*, hvis V kan skrives som en direkte sum af irreducible undermoduler. Med direkte sum af undermoduler, menes blot direkte sum af de underliggende vektorrum. Et element $v \in V$ kaldes *cyklisk* i V, hvis der gælder følgende: For enhver undermodul $U \subseteq V$, med $v \in U$, gælder at $U = V$.

Bemærkning 3. For enhver irreducibel L–modul V gælder at alle elementer *$v \in V \setminus \{0\}$ er cykliske i V.*

Et element x i L kaldes ad *–semisimpelt*, hvis afbildningen $\operatorname{ad} x\colon L \to L$ er diagonaliserbar. Lie algebraen L kaldes *semisimpel*, hvis Killingformen B_L er ikke–degenereret, dvs. hvis der for ethvert $x \in L$ gælder, at $B_L(x, y) = 0$ for alle $y \in L$ hvis og kun hvis $x = 0$. Hvis L er semisimpel, er enhver endeligdimensionel L–modul fuldstændig reducibel (jf. [1, thm. 6.3]).

Eksempel 4. Vi betragter vektorrummet $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, bestående af alle 2×2 matricer med værdier i $\mathbb{C}$, hvis spor er lig 0. Når vi udstyrer $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ med operationen $[-, -]\colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ givet ved kommutatoren $[X, Y] = XY - YX$, er det let at tjekke at $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ bliver en Lie algebra over $\mathbb{C}$. Standardbasen for $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ består af elementerne

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$ og $[x, y] = h$. Vha. dette er det let at tjekke at $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ er semisimpel.

Rodrumsdekomposition

Vi antager nu at L er semisimpel og at F er algebraisk afsluttet og af karakteristik 0, fx $\mathsf{F} = \mathbb{C}$.

Det kan vises at der findes en Lie delalgebra i L bestående af ad–semisimple elementer (jf. [1, § 8.1]). Sådanne delalgebraer kaldes *torale*. Vi vælger en maksimal toral Lie delalgebra H i L. Det kan vises at enhver toral Lie delalgebra er abelsk (jf. [1, lemma 8.1]). Specielt ses, vha. Jacobiidentiteten, at $\operatorname{ad} H = \{ \operatorname{ad} h \mid h \in H \}$ består af kommuterende diagonaliserbare lineære afbildninger på L, og dermed kan disse diagonaliseres samtidigt. Vi sætter nu, for ethvert $\alpha \in H^*$,

$$L_\alpha = \{ x \in L \mid \operatorname{ad} h(x) = \alpha(h)x \text{ for alle } h \in H \}.$$

Idet $\operatorname{ad} h$'erne kunne diagonaliseres samtidigt, er det klart at $L = \bigoplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha$. Vi kalder en afbildning $\alpha \in H^*$ for en *rod* og L_α for et *rodrum*, hvis både $\alpha \neq 0$ og $L_\alpha \neq 0$, og vi sætter Φ til at være mængden af rødder. Bemærk at Φ må være endelig, idet $\dim_{\mathsf{F}} L < \infty$. Det kan vises at $L_0 = H$ ([1, prop. 8.2]), og dermed får vi

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha. \tag{1}$$

Bemærk at rødderne og dekompositionen ovenfor afhænger af valget af den maksimale torale Lie delalgebra. Vi kalder Φ for rodsystemet for L mht. H og (1) kaldes *rodrumsdekompositionen* af L mht. H. Rodrumsdekompositionen har mange nyttige egenskaber. Vi fremhæver nogle nedenfor – for beviser henvises til [1, kap. 8].

Sætning 5. *Med notationen ovenfor gælder:*

(*a*) $\operatorname{span}_{\mathsf{F}} \Phi = H^*$.

(*b*) *Hvis* $\alpha \in \Phi$ *så er* $-\alpha \in \Phi$.

(*c*) *For* $\alpha \in \Phi$ *og* $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$ *findes et* $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ *således at* x_α, y_α *og* $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ *udgør en basis for en Lie delalgebra i* L *isomorf med* $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, *via isomorfien* $x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(*d*) *For* $\alpha \in \Phi$ *gælder at* $\dim L_\alpha = 1$.

(*e*) *For* $\alpha \in \Phi$ *og* $c \in \mathsf{F}$ *gælder, at hvis* $c\alpha \in \Phi$ *så må* $c = \pm 1$.

(*f*) *For* $\alpha, \beta \in \Phi$, *hvor* $\alpha + \beta \in \Phi$, *gælder at* $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

Det kan vises at der findes en basis $\Pi \subseteq \Phi$ for rodsystemet (se [1, thm. 10.1]). Dette indebærer bl.a. at enhver rod $\varphi \in \Phi$ har en entydig opskrivning $\varphi = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha$, hvor alle k_α'erne enten er positive heltal eller de alle er negative heltal. På denne måde inddeles rødderne i positive hhv. negative, alt efter om koefficienterne i den entydige opskrivning er positive eller negative. Mængden af positive rødder betegnes Φ^+ og mængden af negative rødder betegnes Φ^-. Vi indfører en ordensrelation " $\prec$ " på H^*, hvori der for de positive rødder $\varphi \in \Phi^+$ gælder at $0 \prec \varphi$; definer at $\mu \prec \lambda$ hvis og kun hvis $\lambda - \mu$ er en sum af positive rødder eller $\mu = \lambda$.

Vægtrum

Vi fortsætter med notationen fra afsnit 1. Lad V være en L–modul og sæt, for hvert $\lambda \in H^*$,

$$V_\lambda = \{\, v \in V \mid h.v = \lambda(h)v \text{ for alle } h \in H \,\}.$$

Når $V_\lambda \neq 0$ kaldes V_λ et *vægtrum* og λ kaldes en *vægt* af H på V.

Definition 6. *En maksimal vektor af vægt λ i V er en vektor $v \in V_\lambda$, hvor $v \neq 0$ og $L_\alpha.v = 0$ for alle $\alpha \in \Pi$.*

Ved at benytte den entydige opskrivning af de positive rødder som heltals–linearkombinationer af elementerne fra Π, samt sætning 5(f), kan det vises at hvis $L_\alpha.v = 0$ for alle $\alpha \in \Pi$, må også $L_\alpha.v = 0$ for alle $\alpha \in \Phi_+$. Hvis v er cyklisk i V, for en maksimal vektor v af vægt λ i V, siger vi at V er *standard cyklisk* over L med højeste vægt λ ("højeste" begrundes i sætning 7(b)).

Fastsæt, for hvert $\alpha \in \Phi$, elementer $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$, $y_\alpha \in L_{-\alpha} \setminus \{0\}$ og $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ som i sætning 5(c).

Sætning 7. *Lad v være en maksimal vektor af vægt λ i V og antag at v er cyklisk i V. Lad $\Phi_+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Da gælder*

- (a) $V = \operatorname{span}_{\mathsf{F}}\{\, y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}.v \mid i_\nu \in \mathbb{N}_0 \,\}$ *og* $V = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$.
- (b) *Enhver vægt μ på V kan skrives på formen $\mu = \lambda - \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha$, hvor alle k_α'erne ligger i $\mathbb{N}_0$. Specielt ses at $\mu \prec \lambda$.*
- (c) *For ethvert $\mu \in H^*$ gælder at* $\dim V_\mu < \infty$ *og* $\dim V_\lambda = 1$.

Korollar 8. *Lad v være en maksimal vektor af vægt λ i V og antag at V er irreducibel. Da er v den entydigt bestemte maksimale vektor i V, optil skalarmultiplikation.*

Sætning 9. *Lad V og W være standard cykliske L–moduler med højeste vægt λ. Hvis V og W er irreducible, da er de isomorfe.*

Sætning 10. *For ethvert $\lambda \in H^*$ findes en irreducibel standard cyklisk L–modul $V(\lambda)$ med højeste vægt λ.*

For beviser henvises til [1, thm. 20.2], [1, kor. 20.2], [1, thm. 20.3A] og [1, thm. 20.3 B].

Til ethvert $\lambda \in H^*$ findes altså en modul $V(\lambda)$ og en maksimal vektor $v_\lambda \in V(\lambda)$ af vægt λ med følgende egenskaber:

- (i) $h.v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda$ for alle $h \in H$.
- (ii) $L_\alpha.v_\lambda = 0$ for alle $\alpha \in \Phi^+$.
- (iii) v_λ er cyklisk i $V(\lambda)$.

Sæt nu

$$\Lambda^+ = \{\, \lambda \in H^* \mid \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{N}_0 \text{ for alle } \alpha \in \Pi \,\}.$$

Λ^+ kaldes mængden af *dominante heltalsvægte*.

Sætning 11. *For ethvert $\lambda \in \Lambda^+$ gælder at L–modulen $V(\lambda)$ er endeligdimensionel.*

For bevis henvises til [1, thm. 21.2].

Korollar 12. *Afbildningen $\lambda \mapsto V(\lambda)$ giver en 1–1 korrespondance mellem Λ^+ og isomorfiklasserne af endeligdimensionelle irreducible L–moduler.*

For bevis henvises til [1, korollar 21.2].

På denne måde bliver samtlige endeligdimensionelle moduler over L klassificeret. Da enhver L–modul er fuldstændig reducibel (idet L er semisimpel), dvs. kan skrives som en direkte sum af irreducible undermoduler, og da samtlige endeligdimensionelle irreducible moduler er klassificeret ovenfor, kan alle endeligdimensionelle moduler altså klassificeres (op til isomorfi).

Eksemplet $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

I dette sidste afsnit ser vi, hvordan teorien fra afsnit 1 fungerer i et konkret eksempel. Vi betragter den semisimple Lie algebra $L = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ over $\mathbb{C}$ fra eksemplet 4. Ud fra regnereglerne s. 4 er det let at se at elementet h er ad–semisimpelt og at $\mathbb{C}h$ må være maksimal toral i $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, idet torale delalgebraer er abelske. Vi sætter $H = \mathbb{C}h$. Lad $\alpha \in H^*$ være givet ved $\alpha(h) = 2$. Det er da let at se at α er en rod, at $x \in L_\alpha$ og at $y \in L_{-\alpha}$. Heraf følger specielt at $L = H \oplus L_\alpha \oplus L_{-\alpha}$. Vi ser at $\Phi^+ = \{\alpha\}$, $\Phi^- = \{-\alpha\}$ og at $\Pi = \{\alpha\}$. Heraf ses at mængden af dominante vægte bliver $\Lambda^+ = \{\, \lambda \in H^* \mid \lambda(h) \in \mathbb{N}_0 \,\}$. Vi identificerer nu H^* med $\mathbb{C}$ og Λ^+ med $\mathbb{N}_0$ (vha. afbildningernes værdi på elementet h). Korollar 12 giver, at der er en 1–1 korrespondance mellem $\mathbb{N}_0$ og mængden af isomorfiklasser af endeligdimensionelle irreducible L–moduler. Vi skal nu beskrive denne korrespondance lidt nøjere:

Lad $\lambda \in \mathbb{N}_0$ være givet og lad V være en endeligdimensionel irreducibel L–modul med højeste vægt λ (jf. korollar 12). Vælg en maksimal vektor v af vægt λ i V, dvs. et element $v \in V \setminus \{0\}$ således at $h.v = \lambda v$ og $x.v = 0$. Da V er irreducibel, må elementet v være cyklisk i V (jf. bemærkning 3). Sætning 7(a) giver at $V = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{C}} V_\mu$, så da $\dim V < \infty$, ses at $V_\mu \neq 0$ for kun endeligt mange $\mu \in \mathbb{C}$. Det er klart at $v \in V_\lambda$. Ved induktion ses at $y^n.v \in V_{\lambda-n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da kun endeligt mange af V_μ'erne er forskellige fra 0, findes altså et $N \in \mathbb{N}_0$ således at $y^N.v \neq 0$ og $y^{N+1}.v = 0$.

Lemma 13. *Elementerne v, $y.v$, $y^2.v$, …, $y^N.v$ udgør en basis for vektorrummet V.*

Bevis. Bemærk at $y^n.v = 0$ for alle $n > N$. Vi ved at elementerne v, $y.v$, $y^2.v$, …, $y^N.v$ udspænder V (jf. sætning 7(a)), så det er nok at vise lineær uafhængighed. Antag at $a_0v + a_1y.v + a_2y^2.v + \cdots + a_Ny^N.v = 0$ for skalarer $a_i \in \mathbb{C}$. Da må også $y^N.(a_0v + a_1y.v + a_2y^2.v + \cdots + a_Ny^N.v) = a_0y^N.v = 0$, og dermed ses at $a_0 = 0$. Altså er $a_1y.v + a_2y^2.v + \cdots + a_Ny^N.v = 0$. Dermed må også $y^{N-1}.(a_1y.v+$

$a_2 y^2.v + \cdots + a_N y^N.v) = a_1 y^N.v = 0$, og heraf ses at $a_1 = 0$. Fortsættes på denne måde ses at alle a_i'erne må være lig med 0, og altså er elementerne v, $y.v$, $y^2.v$, $\ldots$, $y^N.v$ lineært uafhængige, som ønsket. □

Lemma 14. *Med notation som ovenfor gælder at* $\lambda = \dim V - 1$.

Beviset er en variant af beviset i [1, § 7.2]

Bevis. Vi sætter $v_{-1} = 0$, $v_0 = v$ og definerer v_i for alle $i \in \mathbb{N}$ ved at sætte $v_i = (\frac{1}{i!}) y^i.v_0$. Vi starter med at vise følgende tre egenskaber:

(a) $h.v_i = (\lambda - 2i)v_i$
(b) $y.v_i = (i+1)v_{i+1}$
(c) $x.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$ (for $i \geq 0$)

Vi bemærker først at $y.w \in V_{\mu-2}$ for alle $w \in V_\mu$, $\mu \in \mathbb{C}$. Ved brug af dette er det let at vise (a) ved induktion. Egenskaben (b) følger af definitionen. Vi viser nu (c) ved induktion: Induktionsstarten er let at se, ud fra definitionen af v_i. Antag nu at $x.v_{n-1} = (\lambda - (n-1) + 1)v_{n-2}$ for et givet $n \in \mathbb{N}$. Vi ser at

$$\begin{aligned}
x.v_n &= x.\frac{1}{n!}y^n.v_0 = \frac{1}{n!}x.y.(y^{n-1}.v_0) \\
&= \frac{1}{n!}(y.x.(y^{n-1}.v_0) + h.(y^{n-1}.v_0)) \quad \text{(jf. definition 2)} \\
&= \frac{1}{n}y.x.v_{n-1} + \frac{1}{n}h.v_{n-1} \\
&= \frac{1}{n}y.(\lambda - n + 2)v_{n-2} + \frac{1}{n}(\lambda - 2(n-1))v_{n-1} \quad \left(\begin{array}{l}\text{jf. (a) samt induk-} \\ \text{tionsantagelsen}\end{array}\right) \\
&= (\lambda - n + 2)\frac{1}{n}(n-1)v_{n-1} + \frac{1}{n}(\lambda - 2n + 2)v_{n-1} \quad \text{(jf. (b))} \\
&= (\lambda - n + 1)v_{n-1},
\end{aligned}$$

som ønsket.

Vi betragter nu egenskaben (c) ovenfor for $i = N + 1$. Da $v_{N+1} = 0$ får vi at $(\lambda - N)v_N = 0$. Idet $v_N \neq 0$, ser vi altså at $\lambda = N = \dim V - 1$ (jf. lemma 13). □

Litteraturliste

[1] James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1978, Second printing, revised. MR MR499562 (81b:17007)

Side 9-sætning

Sara Arklint

Inden for algebra kaldes et element r i en ring for nilpotent såfremt der findes et $n \in \mathbb{N}$ så $r^n = 0$. Vi bemærker straks at 0 altid vil være nilpotent. Betragt nu en surjektiv ringhomomorfi $\varphi\colon R_1 \to R_2$ og et nilpotent element $r_2 \in R_2$. Findes der da et nilpotent element $r_1 \in R_1$ så $\varphi(r_1) = r_2$, dvs. kan vi løfte nilpotente elementer? Læseren opfordres til at finde på modeksempler. Den dovne læser må nøjes med mit kedelige modeksempel som er kvotientafbildningen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/512$.

Der gælder dog følgende sætning:

Side 9-sætningen. *Lad $\mathscr{A}$ og $\mathscr{B}$ være C^*-algebraer, og antag at vi har en surjektiv $*$-homomorfi $\varphi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Hvis $b \in \mathscr{B}$ opfylder at $b^n = 0$, da findes et $a \in \mathscr{A}$ så $\varphi(a) = b$ og $a^n = 0$.*

Beviset er lige så langt som det er teknisk, så jeg nøjes med at henvise til Catherine L. Olsen og Gert K. Pedersens artikel *Corona C^*-algebras and their applications to lifting problems.*[1] Jeg vil hellere fokusere på de indgående begreber.

Vi ved jo alle hvad en C^*-algebra er: et normeret vektorrum der desuden er en ring og udstyret med en involution $*$ således at samtlige algebraiske strukturer opfører sig pænt i forhold til hinanden og normen. Og en $*$-homomorfi er så en lineær ringhomomorfi som også samarbejder med involutionen $*$.

Hvad der forstås ved 'pænt', kan udtrykkes i omtrent sytten ligninger. Jeg vil dog hellere give eksempler på C^*-algebraer, og lad mig som det første nævne de komplekse tal $\mathbb{C}$. Læseren opfordres til at overveje eksemplet.

De komplekse tal er et særtilfælde af to mere generelle eksempler som også skal nævnes: algebraen $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ af $n \times n$-matricer over de komplekse tal $\mathbb{C}$, og algebraen $C(X)$ af kontinuerte funktioner fra et kompakt hausdorffrum X til de komplekse tal $\mathbb{C}$. Operationerne i $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ er de oplagte, og involutionen $*$ er givet ved kompleks konjugering af indgangene og dernæst transponering. I $C(X)$ er alle operationer blot de punktvise—fx definerer vi $f+g$ ved $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$— og normen er supremumsnormen $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$.

Et godt og meget tilgængeligt eksempel på en C^*-algebra er $C([0,1])$. I denne situation er det dog et meget dårligt eksempel da denne C^*-algebra kun har ét nilpotent element. Den opmærksomme læser kan ved op til flere fremgangsmåder overbevise sig om dette. Der findes dog ikke-kommutative C^*-algebraer med betydeligt flere nilpotente elementer, så Side 9-sætningen handler bestemt ikke kun om at man kan løfte elementet 0.

[1] Math. Scand. 64 (1989), no. 1, 63–86.

Max Power: En pæn(t) simpel invariant

Jacob Thamsborg, jacob@thamsborg.dk

Om at gå (Klods) Søren i bedene

I sidste års sidste udgave af FAMØS fortalte Søren Eilers om sit arbejde med at klassificere skiftrum genereret af visse substitutioner op til strømningsækvivalens. Denne klassifikation foregår ved snedig – og ret overraskende – brug af operatoralgebra. Jeg selv er i skrivende stund i gang med speciale hos Søren om netop dette emne, men min vinkel er mere direkte, da min viden om operatoralgebra ikke er stor.

Dette skal dog ikke holde os tilbage. Vi vil med lidt løs viden om metriske rum og almindelig dødelig magi – men helt uden operatoralgebra – reproducere et konkret resultat fra en af Sørens nyeste artikler, nemlig at de to substitutioner over alfabetet $\{a, b, c, d\}$ defineret ved

$$a \mapsto accdadbb, \quad b \mapsto acdcbadb, \quad c \mapsto aacdcdbb, \quad d \mapsto accbdadb$$

hhv.

$$a \mapsto accbbadd, \quad b \mapsto accdbabd, \quad c \mapsto aacbbcdd, \quad d \mapsto acbcdabd$$

genererer skiftrum som ikke er strømningsækvivalente. Og således demonstrere at man kan leve et næsten normalt liv som matematiker, uden at vide hvad en C^*-algebra er. Men først skal vi vist have lidt styr på begreberne.

Jeg har tilstræbt at gøre denne artikel uafhængig af Sørens artikel, men udbyttet vil naturligvis være større hvis man læser begge. Jeg beklager notationsforskelle, man graver sig forbløffende hurtigt ned. Kontakt mig endelig hvis du har spørgsmål, savner referencer eller lignende.

Symboler, sekvenser, skiftrum og substitutioner

Lad os tage det fra begyndelsen. Først skal vi have os et *alfabet*, det er en ikke-tom, endelig mængde af symboler, vi benævner det gerne $\mathcal{A}$. Et godt eksempel kunne være $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$. Når vi har symboler kan vi danne *ord* ved at sætte dem ved siden ad hinanden, f.eks. er *dab* og *adbad* helt fine ord. Mere præcist laver vi ord ved at sætte 0 eller flere, men dog kun endeligt mange, symboler efter hinanden. Da ordet bestående af nul symboler er notorisk svært at få øje på betegner vi det med ϵ, og vi sætter $\mathcal{A}^*$ til at være mængden af ord lavet med symboler fra alfabetet $\mathcal{A}$.

Da vi er matematikere kan vi sagtens håndtere uendelighed uden hovedpine, så vi kan selvfølgelig også betragte uendeligt lange ord. Disse, som vi kalder *sekvenser*, er mere præcist følger af symboler indekseret over mængden af heltal. Et (i sagens natur) ufuldstændigt eksempel er

$$\dots dabdabbadab.adbadaadbad \dots$$

idet vi aftaler at symbolet svarende til heltallet 0 står lige til højre for punktummet og så går det ellers derudaf i begge retninger. Tænk dog ikke så meget på disse heltal, tænk hellere på en sekvens som et punktum og så uendeligt mange symboler i begge retninger. Alle sekvenserne lavet med symboler fra alfabetet $\mathcal{A}$ betegner vi $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Vi er nu klar til at bygge skiftrum, vores første milepæl. Et *skiftrum* over alfabetet $\mathcal{A}$ er en samling af nogle, men sjældent alle, sekvenserne fra $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Under visse betingelser. Først definerer vi *skiftafbildningen*. Det er let, for det er bare afbildingen $T : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ defineret ved at rykke punktummet en gang til højre. Mere formelt er T defineret ved at vi har $(T(x))_i = x_{i+1}$ for $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ og $i \in \mathbb{Z}$ men tænk hellere på at flytte punktummet. Vi kan nu formulere kravene til et skiftrum, den dyreste version lyder at det er en delmængde $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ med $T(X) = X$ som er lukket i produkttopologien på $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ induceret af den diskrete topologi på $\mathcal{A}$. I den billigere ende kan vi definere en naturlig metrik på $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ som placerer sekvenser tæt dersom de stemmer overens på mange symboler omkring punktummet. Vi kan så kræve lukkethed under denne metrik, stadig kombineret med invarians under skiftafbildningen. Da metrikken faktisk inducerer produkttopologien, er definitionerne ækvivalente, men kompakthed følger gratis med den dyre.

Aftenens andet højdepunkt, definition af substitutioner: En *substitution* τ over alfabetet $\mathcal{A}$ er blot en afbildning $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$. Ved at sætte funktionsværdier ved siden af hverandre og definere $\tau(\epsilon) = \epsilon$ kan vi udvide til $\tau : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$, så giver det også mening at sammensætte τ med sig selv. Vi kræver ydermere primitivitet af vores substitutioner, et simpelt kriterium som udelukker visse degenererede substitutioner, det skøjter vi elegant henover her. Man kan på flere ævkivalente metoder knytte et skiftrum X_τ til en primitiv substitution τ. Den letteste er at definere substitutionens sprog $\mathcal{L}(\tau)$ som alle ord, der forekommer som delord af $\tau^n(\alpha)$ for $n \in \mathbb{N}$ og $\alpha \in \mathcal{A}$. Vi kan nu bygge X_τ ved at plukke de sekvenser fra $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ hvis delord alle er i $\mathcal{L}(\tau)$.

Lad os slutte med et lille eksempel, vi definerer Morse substitutionen τ_M over alfabetet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ ved

$$a \mapsto ab, \quad b \mapsto ba.$$

Prøv her om du kan finde et fixpunkt i $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ for τ_M eller – hvis det ikke kan lade sig gøre – så måske et $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ med $\tau_M^2(x) = x$? Kan vi så slutte at $x \in X_{\tau_M}$? Vi definerer $\tau_M : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ved at lade punktummet stå og anvende τ_M på hvert enkelt symbol. Hvad så med at finde et et ord på formen uu for $u \in \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$ i $\mathcal{L}(\tau_M)$? Eller måske et på formen uuu?

At være ens på forskellige måder og forskellige måder at være ens på samme måde

Lad os nu forestille os at vi har to skiftrum, X og Y. Man kan naturligt spørge om de er ens, og dette er selvfølgelig tilfældet hvis vi faktisk har $X = Y$. Men også hvis vi har $X \neq Y$ kan vi i visse tilfælde opleve at de – betragtet som skiftrum – opfører sig helt identisk. Denne, lidt svagere form for lighed, fanges i følgende definition:

Definition 1. *To skiftrum X og Y kaldes* konjugerede *dersom der findes en homeomorfi $\varphi : X \to Y$ med $\varphi \circ T = T \circ \varphi$.*

Konjugerethed er naturlig, idet den essentielt fordrer bevarelse af skiftrummets struktur, både den topologiske og den dynamiske. Men det er stadig for stærkt for os og vi må svække yderligere. For at gøre det er vi nødt til at trylle lidt: Vi tager et skiftrum X, putter det i en sort hat og – abracadabra – ud trækker vi ΣX, et nyt topologisk rum, der indeholder X, men hvor vi for hvert element $x \in \Sigma X$ tillægger $T^r(x)$ mening for alle $r \in \mathbb{R}$, ikke bare for heltal. Tænk på det som muligheden for at flytte punktummet til et vilkårligt sted i sekvensen, også inde i selve symbolerne. Vi kan nu definere:

Definition 2. *To skiftrum X og Y kaldes* strømningsækvivalente *dersom der findes en homeomorfi $\varphi : \Sigma X \to \Sigma Y$ således at der for hver $x \in \Sigma X$ findes $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voksende med $\varphi(T^r(x)) = T^{f_x(r)}(\varphi(x))$ for alle $r \in \mathbb{R}$.*

Intuitionen er her, at man kan strække hver sekvens som man lyster, dog skal retningen opretholdes, derfor kravet om at være voksende. Man kan begribeligvis definere ΣX uden magi, se f.eks. definition 2 i Sørens tidligere artikel i FAMØS, her er vi mere dog mere interesserede i intuitionen.

Lad os parallelt med disse lighedsovervejelser introducere en simpel måde at konstruere nye skiftrum ud fra gamle:

Definition 3. *Lad X være et skiftrum over alfabetet $\mathcal{A}$ og lad $\alpha \in \mathcal{A}$ og $\bullet \notin \mathcal{A}$ være symboler. Lad $s : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to (\mathcal{A} \cup \{\bullet\})^{\mathbb{Z}}$ være den afbilding som erstatter alle forekomster af α med $\alpha\bullet$. Vi definerer da et nyt skiftrum ved* symbolekstension *som følger:*

$$X^{\alpha\bullet} = s(X) \cup T(s(X)).$$

Man bør som ansvarlig matematiker tjekke at der faktisk er tale om et skiftrum, bemærk at vi er nødt til at forene med $T(s(x))$ for at undgå huller i sekvenserne. Intuitionen er at vi strækker hver forekomst af α til dobbelt længde, og ganske rigtigt, vi får at X og $X^{\alpha\bullet}$ er strømningsækvivalente. Mere spændende er dog at denne konstruktion sammen med konjugerethed faktisk genererer strømningsækvivalens. Det betyder at to skiftrum X og Y er strømningsækvivalente netop hvis der findes en endelig følge af skiftrum

$$X = X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n = Y$$

således at vi for hver $1 \leq i < n$ har at X_i og X_{i+1} er konjugerede eller at den ene af de to kan opnås fra den anden ved symbolekstension. Dette er bekvemt at vide men ubekvemt at vise, især den ene vej rundt. Man kan næsten fornemme det problematiske i at skifte fra den kontinuerte / reelle definition til den diskrete / heltallige version.

At være eller ikke at være strømningsækvivalent

Vi har nu overstået den nødvendige men også lidt kedelige del, nemlig at få styr på begreberne, og vi er klar til at gå i kast med selve opgaven: At vise at skiftrummene genereret af de to substitutioner i indledningen ikke er strømningsækvivalente. Det er bare ikke så let. Kan vi hitte en måde at bevæge os fra det ene skiftrum til det andet ved konjugation og symbolekspansion er de strømningsækvivalente, men kan vi ikke, kan det jo skyldes manglende opfindsomhed snarere end manglende strømningsækvivalens.

Hvad gør vi så? Hvad nu hvis vi kunne knytte et magisk tal til hvert af de to skiftrum og så vise at *hvis* skiftrummene er strømningsækvivalente *så* er tallene de samme? Og hvis så tallene faktisk ikke var de samme? Jamen så ville vi jo have vist det ønskede, det lyder som en besnærende ide. Vi kalder det lovede magiske tal en *invariant* fordi det ikke ændres under strømningsækvivalens. Ideen er tyvstjålet fra Sørens arbejde, hans invarianter er dog snedige grupper. Mere generelt anvendes ideen om invarianter under forskellige former for lighed i klassifikationsspørgsmål bl.a. i algebraisk topologi og operatoralgebra. Husk dog på en ting inden vi starter: Hvis de magiske tal skulle vise sig at være ens, ja så er vi ikke nået en dyt videre. Vores invariant er nemlig ikke komplet, så vi kan ikke slutte den anden vej, identiske magiske tal implicerer ikke nødvendigvis strømningsækvivalens. Så magisk er det desværre heller ikke.

Det magiske tal: Max Power

Hvad er det så, dette magiske tal, dette lys for enden af tunellen som skal løse vores problemer? Det er faktisk ikke så kompliceret. Et ord, som består af gentagelser af et andet ord, kalder vi en *periode*, længden af dette andet ord bliver periodens *længde* og længden af selve ordet divideret med periodens længde er periodens *power*. Det lyder nu engang bedre på engelsk. Bemærk at den sidste gentagelse ikke behøver være fuldstændig, eksempler på perioder er a med længde og power 1 og ordene *ababa* og *abcdabcdab* der har længde 2 henholdsvis 4 men begge power på $2\frac{1}{2}$. Det magiske tal er så den største power vi kan finde, hvis vi leder blandt alle perioder i substitutionens sprog, vi kalder det *Max Power*. Nåja, det største tal i en potentielt uendelig mængde er måske lidt vovet, så lad os nøjes med supremum. Og, nåja igen, hvis vi gerne vil have et reelt tal som supremum må vi hellere sørge for en øvre grænse. Heldigvis har en klog kvinde vist, at holder vi os til *aperiodiske* primitive substitutioner så er det i orden. De aperiodiske er dem som genererer uendelige skiftrum, og det er også de interessante, så der er ingen skade sket ved at nøjes med dem. Vi kan nu præcist definere:

Definition 4. *Til en aperiodisk primitiv substitution τ knytter vi en reel* Max Power *defineret ved*

$$\mathrm{MP}(\tau) = \sup\{p \mid p \text{ er power for en periode i } \mathcal{L}(\tau)\}$$

og vi postulerer at dersom de to indledningsvis definerede substitutioner – som lykkeligvis er både primitive og aperiodiske – genererer strømningsækvivalente skiftrum, ja så har de samme Max Power.

Lad os lige tage en pause til et eksempel. Vi definerede Morse substitutionen ovenfor, og jeg lover at den er både primitiv og aperiodisk. Faktisk kan man let undersøge dette – helt uden at kende definitionerne – for det program som Søren har udviklet og som han omtalte i sin artikel kan, blandt mange andre ting, tjekke dette. Programmet kan dog ikke udregne Max Power, men jeg postulerer at $\mathrm{MP}(\tau_M) = 2$. Det er ikke svært at vise $\mathrm{MP}(\tau_M) \geq 2$ men den anden vej er er ikke så let. Prøv det, som de siger i reklamerne.

Nu tilbage til hovedopgaven og vores postulat: Hvordan Søren viser vi det? Ja, det er jo spørgsmålet, lad os se hvad vi kan finde på. Først kalder vi substitutionerne τ og υ for at få hold på tingene, skiftrummene genereret af substitutionerne bliver så X_τ og X_υ. Vi antager nu at de faktisk er strømningsækvivalente, det er rimeligt nok, for det er under den antagelse vi ønsker at vise $\mathrm{MP}(\tau) = \mathrm{MP}(\upsilon)$. Lad os så tage en periode i $\mathcal{L}(\tau)$, en god vilkårlig en. Den har jo så en tilhørende power. Hvad nu hvis vi ud fra den kunne bygge os en periode i $\mathcal{L}(\upsilon)$ med samme power? Ja så kunne vi faktisk udelukke $\mathrm{MP}(\tau) > \mathrm{MP}(\upsilon)$ og den anden vej kan sikkert klares med et symmetriargument og lidt armviften. Så vi har allerede en god – omend lidt løs – plan.

Lad os uddybe den lidt ved hjælp af det vi allerede har lært. For vi ved nemlig at vi kan komme fra X_τ til X_υ ved konjugation, symbolekstension og, nåja, omvendt symbolekstension. Så måske vi kan betragte perioders opførsel under disse konstruktioner? Der går dog lidt ged i det, for vi kan ikke være sikre på at eventuelle mellemliggende skiftrum er genereret af substitutioner, så hvordan kan vi tale om perioder i dem? Vi definerer hurtigt sproget for et vilkårligt skiftrum X til at være alle ord som forekommer i rummets sekvenser, vi betegner det $\mathcal{L}(X)$. Så er det i orden at tale om perioder i vilkårlige skiftrum, de skal bare ligge i skiftrummets sprog. Og da vi har $\mathcal{L}(\tau) = \mathcal{L}(X_\tau)$ og tilsvarende for υ – ja faktisk for alle primitive substitutioner – har vi ikke klodset i det. Og så er planen klar: Vi skal argumentere for at perioder kan krydse konjugationer, symbolekspansioner og omvendte symbolekspansioner uden tab af power. Så er det bare at komme i gang med detaljerne.

Vi starter med konjugationer, de er gerne venlige. Fat to vilkårlige konjugerede skiftrum, X og Y, vi kan vælge en homeomorfi $\varphi : X \to Y$ med $T \circ \varphi = \varphi \circ T$. Det viser sig, at hvis vi tager en sekvens $x \in X$ og gerne vil gætte symbolet

$\varphi(x)_{[i]}$ for et $i \in \mathbb{Z}$ så behøver vi ikke kigge på hele x men kun på symbolerne i omegnen af $x_{[i]}$. Dette resultat kaldes Curtis-Lyndon-Hedlunds Theorem, mere præcist findes et $n \in \mathbb{N}_0$ og en afbildning Φ fra mængden af ord af længde $2n+1$ i $\mathcal{L}(X)$ til mængden af symboler i Y således at vi har $\phi(x)_{[i]} = \Phi(x_{[i-n,i+n]})$. Vi vil blindt stole på dette. Men prøv at overveje kort: Det er faktisk en rimelig konsekvens af kontinuiteten kombineret med kommutativitet af homeomorfien og skiftafbildningen, idet vi husker at metrikken placerer sekvenser tættere på hinanden desto mere de stemmer overens omkring punktummet.

Det er tid til handling. Hvis nu det omtalte n var, ja, lad os bare sige 2. Og kanhænde at *abcdabcdabcd* er en periode i X, det giver, tælle tælle tælle, længde 4 og power 3. Så findes $x \in X$ med perioden som delord, vi har altså $x_{[i,i+11]} = abcdabcdabcd$ for et eller andet $i \in \mathbb{Z}$. Monstro vi kunne finde en god periode et eller andet sted i Y? Vi får

$$\varphi(x)_{[i,i+11]} = ??\alpha\beta\gamma\delta\alpha\beta\gamma\delta??$$

idet vi indfører følgende symbolbetegnelser

$$\alpha = \Phi(abcda),\ \beta = \Phi(bcdab),\ \gamma = \Phi(cdabc),\ \delta = \Phi(dabcd)$$

og et spørgsmålstegn betyder at vi ikke rigtig kender symbolet. Er det så godt eller skidt? På den ene side er det jo godt, vi har lavet os en ny periode, endda med samme længde. Men på den anden side er det skidt, for der er røget et par symboler i begge ender så vi er nede på power 2. Vi kan altså ikke krydse en konjugation helt uden tab af power – men vi kan faktisk gøre noget der er ligeså godt. For bemærk at faldet i power er lig 4 divideret med længden af perioden, og det uanset hvor lang perioden er. Så hvad nu hvis den var meget lang? Vi generaliserer og konkluderer i et hug:

Proposition 5. *Vi kan krydse en konjugation med vilkårligt lille tab af power ved at betragte perioder der er tilstrækkeligt lange.*

Hvis man kan rumme det, kan man tænke på at en periode af uendelig længde kan krydse en konjugation helt uden tab af power. Det er godt nok lidt uklart hvordan en sådan periode skulle se ud, men tanken giver intuition.

Nu hastigt videre til symbolekspansioner, tag skiftrummet X, lad os f.eks. sige at det er over alfabetet $\{a, b\}$, og byg skiftrummet X^{ac}. Måske vi i X har perioden *bbabbabb* med længde 3 og power $2\frac{2}{3}$, måske den ligger i sekvensen $x \in X$, og hvis vi kigger i sekvensen $s(x) \in X^{ac}$ kan vi – måske – finde perioden

$$s(bbabbabb) = bbacbbacbb$$

som har længde 4 men desværre power på $2\frac{1}{2}$. Ak, tænkte matematikeren, og ve, skæbnen er mig bestemt ikke venligt stemt, endnu en gang bliver der skåret salamiskiver af min periode. Hvad gør vi? Problemet er, at antallet, eller rettere frekvensen, af forekomster af a i den ufuldstændige ende bb er mindre end i selve det gentagne ord bba, derfor bliver bb ikke forlænget med samme faktor som bba og vi oplever tab af power. Og denne gang går det ikke at vælge perioden meget lang, for vort tab er ikke opadtil begrænset af et fast antal symboler. Og så alligevel...

Magi må der til, og magi er hvad vi har, vi har nemlig snydt lidt hjemmefra, ligesom i TV køkkenet: I skiftrum genereret af primitive substitutioner har hvert symbol en grænsefrekvens, således at hvis vi betragter ord i sproget som er tilstrækkeligt lange, så kommer frekvensen af hvert symbol vilkårligt tæt på symbolets grænsesekvens. Jeg skal ikke redegøre for dette resultat her, blot påberåbe mig Perron-Frobenius' sætning og haste videre, men den skulle være god nok. Vi kan nu regne, eller måske snarere pseudo-regne: Hvis perioden har uendelig længde, og den har en kort ufuldstændig ende, f.eks. en med $n \in \mathbb{N}_0$ symboler, ja så taber vi højst hele den ufuldstændige ende dvs. højst $\frac{n}{\infty}$ i power, det kan vi godt leve med. Og hvis nu der er tale om en lang ufuldstændig ende, f.eks. en som er uendelig lang, ja så er frekvensen af det symbol vi forlænger lig grænsefrekvensen både i den ufuldstændige ende og i det gentagne ord hvorfor de forlænges med samme faktor og der er intet tab af power.

Det var nok lovlig løssluppent, og de fleste vil nok – som en slags tømmermænd – insistere på mere præcise overvejelser. Men den underliggende intuition synes klar, så vi vil lade det ligge her. Et andet problem er mere presserende, for hvordan ved vi egentlig at de omtalte grænsesekvenser findes i de mellemliggende skiftrum som vi møder på vores tur fra X_τ til X_υ? De findes i X_τ og X_υ da disse er genereret af primitive substitutioner, men faktisk er vi nødt til at vise at eksistensen af grænsefrekvenser bevares under konjugation og begge veje over symbolekspansion. Er det rimeligt at dette skulle være sandt? Bestemt ja. Er det svært at vise? Nej. Men er det så besværligt at vise? Ja, lidt besværligt er det. Er det noget vi ønsker at gå dybere ind i her? Bestemt nej! I stedet skynder vi os videre med endnu en delkonklusion:

Proposition 6. *Vi kan krydse de symbolekspansioner, som vi møder, med vilkårligt lille tab af power ved at betragte perioder der er tilstrækkeligt lange. Og det begge veje.*

Nåja, vi har faktisk slet ikke betragtet den anden vej, men problemstilling og løsning er de samme. Og nu, selvom det måske ikke er helt klart, er vi faktisk meget tæt på målet.

Den Store Finale

Lad os opsummere: Vi kan bevæge os fra X_τ til X_υ i trin bestående af konjugation, symbolekspansion og omvendt symbolekspansion. Og hvert af disse trin kan foretages med vilkårligt lille tab af power hvis vi betragter perioder som er tilstrækkeligt lange. Men hvis vi nu starter med en tilfældig periode i X_τ er den jo ikke nødvendigvis lang, den kan såmænd være ganske kort? Dette løses ved at anvende τ på den, dette giver en ny periode med samme power men otte gange den oprindelige længde. Vi kan naturligvis gentage dette indtil den ønskede længde er nået. Men hvad så når vi har krydset et par trin, kan vi ikke risikere at forkorte perioderne undervejs, i de mellemliggende skiftrum er der jo ikke nogen substitution som vi kan forlænge med? Dette løser vi ved at observere, at vi under alle tre former for trin ikke alene kan opnå nye perioder med vilkårligt lille tab af power men *også* med vilkårlig stor længde når blot vi vælger den oprindelige periode tilstrækkeligt lang. Det er ikke svært at se, vi undlod at diskutere det ovenfor for ikke at forplumre argumentationen. Så vi har vist – eller i hvert fald argumenteret for – at hvis vi tager en hvilken som helst periode i X_τ så kan vi bygge en periode i X_υ med vilkårligt lille tab af power. Og så er postulatet faktisk vist, for vi kan naturligvis flytte perioder den anden vej også.

Og så er vi hjemme. Eller er vi nu også det – for hvad var målet egentlig? Det var jo at vise X_τ og X_υ ikke strømningsækvivalente. Og hvad har vi vist? Ja vi har vist at *hvis* de faktisk er det, ja, så har vi $\mathrm{MP}(\tau) = \mathrm{MP}(\upsilon)$. Og hvad så? Ja, så håber vi godtnok meget på at sidstnævnte lighed ikke holder. Men hvad er så $\mathrm{MP}(\tau)$ og $\mathrm{MP}(\upsilon)$? Se det er spørgsmålet, for jeg ved stadig ikke hvordan man beregner disse eksakt. Men trylle kan vi jo altid, så jeg gav min computer nogle timer til at finde alle de perioder den kunne, og disse udregninger indikerer – bemærk den bevidst forsigtige sprogbrug – at vi har

$$\mathrm{MP}(\tau) \simeq 2,69 \quad \text{og} \quad \mathrm{MP}(\upsilon) \simeq 2,58.$$

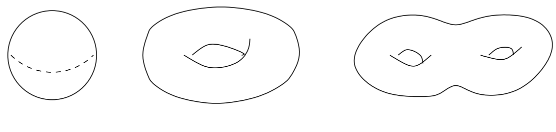
Disse indikationer er dog tilstrækkeligt præcise til at jeg godt tør vædde en stor is på at de to værdier faktisk er forskellige. Og så har vi faktisk nået vores mål. Afslutnigsvis vil jeg udlodde to yderligere store is for bestemmelse af de eksakte værdier af $\mathrm{MP}(\tau)$ og $\mathrm{MP}(\upsilon)$.

Løkkerum og afbildningsklassegrupper

Nathalie Wahl

Hej, jeg er et nyt ansigt i E-bygningen... Jeg starter som lektor d. 1 juli, 2006. Lad mig begynde med et par ord om mig selv: Jeg blev født i Bruxelles d. 3. oktober, 1976, og det var der jeg voksede op. Ma langue maternelle est le français. I 1994 blev jeg indskrevet på Université Libre de Bruxelles, hvorfra jeg tog min bachelorgrad i matematik i 1998. Derefter tog jeg til Oxford, og fik i 2001 min PhD, under vejledning af Ulrike Tillmann. Siden da har ansættelser bragt mig til Northwestern University i Chicago, Århus Universitet (hvor jeg lærte at tale dansk og spise superpiratos...), og derefter til University of Chicago, på den anden side af byen fra Northwestern. Jeg kommer til Københavns Universitet, sammen med Jesper Grodal, for at udvide topologigruppen ved KU: Fra at bestå af en person, Jesper Michael Møller, bliver vi nu tre! Og flere mennesker betyder selvfølgeligt flere aktiviteter: kurser, seminarer osv., og vi har heldigvis fået nogle penge fra Forskningsrådet for Natur og Univers til at invitere gæster for. Vi starter med en åbningskonference d. 1-3 september, 2006 og en workshop d. 4-8 september, som vi organiserer sammen med min matematiske "bedstefar", Ralph Cohen fra Stanford, som tager 4-5 af sine 9 nuværende PhD studerende og en masse post docs med... Der bliver liv og glade dage. Hvis du har lyst til at vide mere om de nye aktiviteter, kan du kigge på topologihjemmesiden `www.math.ku.dk/topology` eller min hjemmeside `www.math.ku.dk/~wahl`.

OK, så nu må jeg vist igang med at fortælle hvad jeg forsker i. Og hvad er topologi i det hele taget? Topologi er en gammel tradition i Danmark, gående tilbage til Poul Heegaard (1871–1948) og Jakob Nielsen (1890–1959). De var, ligesom jeg, intereserede i geometriske objekter som for eksempel flader. Flader er klassificerede ved hvor mange "huller" de har: hver lukket orienterbar flade er enten en sfære (genus 0), en donut, eller torus, (genus 1), en "dobbelt donut" (genus 2), en "tripel donut", osv.



Denne klassifikation af flader er kun det første skridt i vores (delvise) forståelse af flader. Et spørgsmål som jeg allerede blev interesseret i under min PhD er en sammenhæng mellem flader og løkkerum.

Givet et topologisk rum X med udvalgt punkt $*$, er *løkkerummet* ΩX "rummet af alle løkker i X baseret i $*$", det vil siger rummet af alle afbildninger $S^1 \to X$

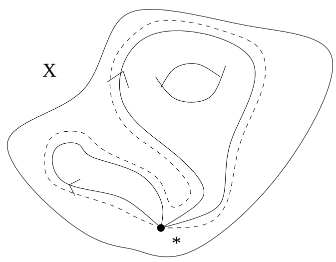
som tager $1 \in S^1$ til $* \in X$. Det kan ligeledes beskrives som rummet af alle afbildninger

$$f : [0,1] \to X \quad \text{med} \quad f(0) = * = f(1).$$

En interessant egenskab ved løkkerum er at de kommer med en multiplikation:

$$\mu : \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$$

hvor $\mu(f,g)$ er den løkke som først følger f og derefter g, det vil sige $\mu(f,g)(t) = f(2t)$ når $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ og $\mu(f,g)(t) = g(2t-1)$ når $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Multiplikationen er ikke helt associativ, men den er *homotopi associativ*, idet løkken $\mu(f,\mu(g,h))$ er homotop (kan deformeres) til $\mu(\mu(f,g),h)$. Og da forskellen bare er reparametriseringen, kan disse homotopier vælges så de passer sammen også når man ganger flere løkker sammen, noget som man, hvis man er med på noderne, kalder en A_∞-multiplikation.

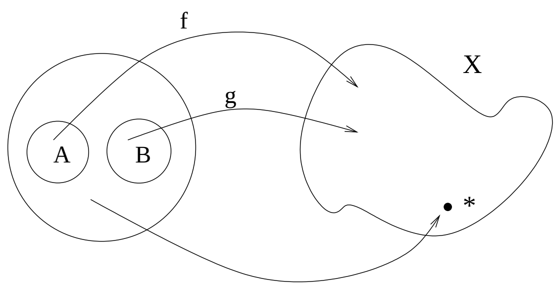


Topologer i 60erne viste faktisk at man kan genkende løkkerum ved egenskaben at der findes en sådan multiplikation: Hvis et sammenhængende topologiske rum Y har en A_∞-multiplikation $\mu : Y \times Y \to Y$, så eksisterer der et rum X sådan at Y er homotopt til ΩX.

Hvad med et dobbelt løkkerum $\Omega^2 X = \Omega(\Omega X)$? Et element i $\Omega^2 X$ kan beskrives som en afbildning fra en cirkelskive

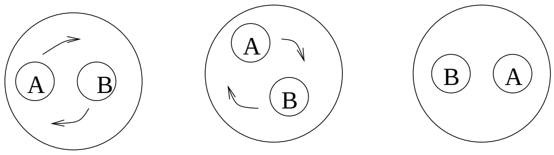
$$f : D^2 \to X \quad \text{med} \quad f(\partial D^2) = *$$

og multiplikationen (som eksisterer fordi $\Omega^2 X$ er et løkkerum) kan nu beskrives med følgende billede:



$\mu(f,g)$ er defineret på D^2 ved at bruge f på A, g på B, og sende resten af cirkelskiven til $* \in X$. Dette beskriver en multiplikation, men det er klart at jeg kunne have valgt andre del-cirkelskiver i D^2, større eller mindre, og placeret anderledes. Når der er for mange muligheder at vælge imellem i matematik, er en god løsning at tage dem alle sammen. I dette her tilfælde, har vi et topologisk rum af multiplikationer: rummet $\mathcal{D}(2)$ af alle indlejringer $D^2 \coprod D^2 \hookrightarrow D^2$. Hvert punkt $\mu \in \mathcal{D}(2)$ kan bruges som en multiplikation på et dobbelt løkkerum.

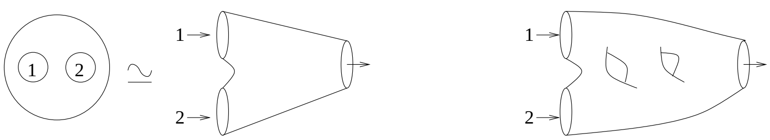
Multiplikationen μ er homotopi associativ ligesom før og følgende billede viser at μ også er homotopi kommutativ, det vil sige at $\mu(f,g) \neq \mu(g,f)$ men den ene kan deformeres til den anden for enhver f, g (og enhver μ).



Altså vores multiplikation på dobbelte løkkerum er homotopi kommutativ på grund af en symmetri af cirkelskiven!

Ligesom i én dimension (tilfældet Ω) eksisterer der også for Ω^2 en sætning som siger at et rum Y med en passende homotopi kommutativ A_∞-muliplikation er homotop til et dobbelt løkkerum. En cirkelskive med to huller —altså et element i $\mathcal{D}(2)$ ovenfor— kan også opfattes som en genus 0 flade hvor randen er forening af tre cirkler. Mere generelt er en genus 0 flade med rand $k+1$ cirkler et element i $\mathcal{D}(k)$, rummet af indlejringer af k disjunkte cirkelskiver i en cirkelskive, som vi også kan opfatte som måder at gange k elementer i et dobbelt løkkerum sammen på. Samlingen af elementer i $\{\mathcal{D}(k)\}_{k\geq 0}$ består altså af "alle genus 0 flader med et virkårligt antal rande", men er også lig med "alle måder at gange et vilkårligt antal elementer sammen i $\Omega^2 X$". (Og den rigtige måde at udtrykke det jeg hentydede til ved "passende homotopi kommutativ A_∞" er at sige at *operad*'en $\{\mathcal{D}(k)\}_{k\geq 0}$ virker på Y...)

Højere genus flader med rand kan også tænkes som multiplikationer. Jeg vil ikke forklare detaljerne, men ideen kommer frem i følgende billede, hvor man tænker på en multiplikation som noget med to inputs og et output:



Og hvorfor skulle man holde sig til 1 dimension (linier, enkelte løkkerum) og 2 dimensioner (flader, dobbelte løkkerum), når man kan gøre dette for et vilkårligt Ω^n, ja endog for $n = \infty$, alså et *uendeligt løkkerum*, hvis man opfatter dette passende.

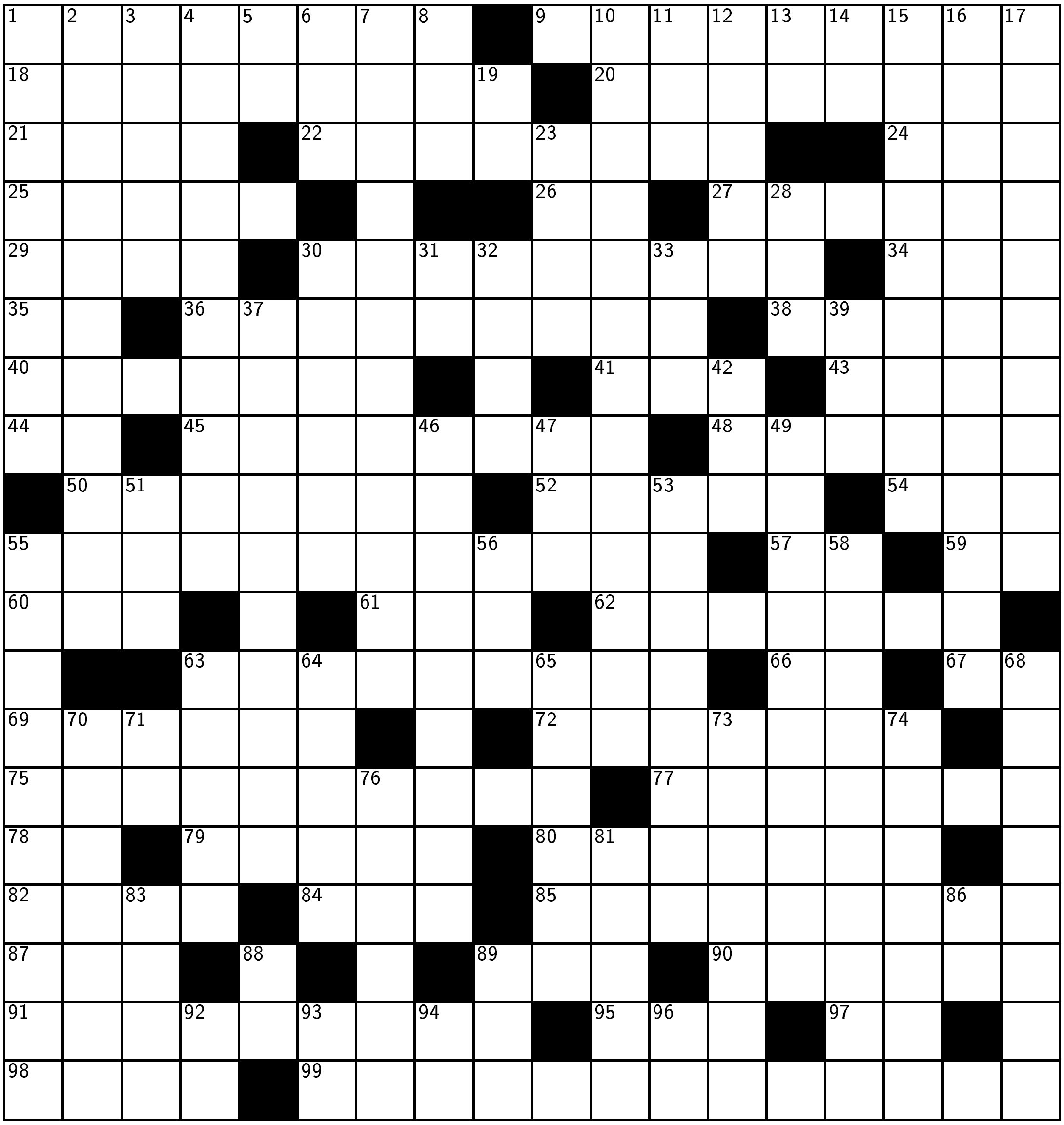
Puha, jeg har nu snakket en del om løkkerum, som jo er spændende nok i sig selv, men hvad har det at gøre med de der afbildningsklassegrupper?? Afbildningsklassegruppen af en flade er simpelthen dens gruppe af symmetrier! Og det er denne gruppe man skal forstå hvis man virkeligt vil forstå flader. (Her må jeg desvære indrømme at en googlesøgning af denne danske oversættelse af det engelske ord "mapping class group" kun gav to hits, hvorimod det engelske ord gav 66.300, hvoraf det første er en definition fra Wikipedia!)

Da jeg kom til Oxford i 1998, havde Tillmann lige vist at den "stabile afbildningsklassegruppe", løst sagt gruppen af symmetrier af en flade af uendelig genus, efter at man anvender Quillen's magiske "plus konstruktion" (den som man også bruger til at definere højere algebraisk K-teori) giver én et *uendeligt* løkkerum. Folk var meget overraskede over dette resultat, og hun blev inviteret til den prestigefulde *International Congress of Mathematicians* i Kina i 2002, for at fortælle om det. Grunden til at topologer var så overraskede var at der faktisk var én der havde vist at det ikke kunne være rigtig! —en forkert konklusion fra korrekte udregninger. Tillmann havde faktisk to beviser for sin sætning som hver bestod i at give en multiplikation. En af de ting jeg viste i min PhD afhandling var at begge disse to multiplikationer faktisk er ækvivalente! Dette resultat publicerede jeg i det kendte topologitidskrift *Topology*. Det er her i historien at Århus kommer ind i billedet: Ib Madsen fra Århus blev straks interesseret i Tillmanns resultater og efter samarbejde med Tillmann, beviste han sammen med Michael Weiss fra Aberdeen en generalisering af Mumfords formodning, en formodning om kohomologi af afbildningsklassegrupper som kom fra algebraisk geometri. Det giver altid meget opmærksomhed når man viser formodninger uden for sit eget fagområde, og Madsen-Weiss resultatet udkommer da også snart i det mest prestigefyldte tidsskrift af dem alle: *Annals of Mathematics*. Det var derfor naturligt at tage til Århus for at snakke med Ib, og min tid der førte blandt andet til at jeg fandt et bevis for Mumfords formodning for *ikke-orienterbare* flader, altså sådanne nogle som det to-dimensionelle reelle projektive rum, og Klein flasker, en artikel som jeg i februar i år sendte på ArXiv'et (`www.arxiv.org`), der hvor matematikere sender deres artikler før de udkommer i et tidskrift, og mit bevis er nu ved at blive gennemlæst af eksperter.

Men hvordan kom jeg så til København? Denne spændende historie går helt tilbage til en sommerkonference i Stanford, Californien i 1999, og indeholder også ikke-matematiske aspekter. Men den vil jeg lade læseren have til gode. Til slut vil jeg blot fortælle at en god start til at lære mere om topologi er at følge Jesper Michael's introduktionskursus i Blok 1 til næste efterår. Ja, den utålmodige læser kan faktisk tyvstarte ved at kigge i lærebogen Algebraic Topology af Allen Hatcher fra Cornell (som jeg iøvrigt også har skrevet artikler med...). Bogen kan downloadedes fra `www.math.cornell.edu/~hatcher`. Kurset bliver fulgt op i Blok 2 med kurset "Topics in Algebraic Topology", som Jesper G. og jeg afholder. Vi ses!

Feriekryds

Martin "Damskur" Damhus



Vandret:

1: Kort sammendrag
9: (På vejrkort) Linie gennem alle steder med ens trykforandringer i en vis periode
18: Victor Hugo-protagonist
20: Danne mikstur af egentligt ikke-blandbare stoffer (fx olie og vand)
21: Rovfugl
22: Majuskelskriften
24: Enhed (= 10^7 joule)
25: Bortgive
26: Levnedsbeskrivelse
27: Fransk pigenavn (og hovedpersonens navn i filmen „Den fabelagtige ****** fra Montmartre")
29: Fordom
30: (I retssag) Fremføre et forsvarsindlæg for sagsøgt
34: Meditationsform
35: Knap
36: Græsk tragiker (480 — 406 f.Kr.)
38: Mindre forældet
40: Indtages
41: (Indenfor datalogi) Kompleksitetsklassen af NP-fuldstændige afgørlighedsproblemer
43: (Bibelsk) Forfader til Abraham, hvis oldefar var Noah
44: Betragt
45: Juridisk stridighed
48: Ikke-eksisterende ord, der dog sagtens kunne have eksisteret, og hvis det havde, kunne ordforklaringen til det have været: „Gøre rent igen vha. støvsuger"
50: Rulle af mønter pakket ind i stift papir, forekommer fx i kasseapparater.
52: (Lidelse) Ophobning af urinstof i blodet ved nyresygdomme
54: Værtshus
55: Myggelampe
57: Sine anno: udgivelsesdato ukendt; fransk bøjningsform af „elle"
59: Tone; almindeligt præfiks i den latinske sprogstamme
60: Drillede
61: *** Grenland B.K.: Norsk fodboldhold; engelsk for usædvanlig, tilfældig eller ulige.
62: Typisk element i bedre frokost
63: Det afsmeltede oksefedt (fast og let gulligt)
66: Provins i Fiji; fil-endelse for RealAudio-filer; radium; navn på primitiv Thor Heyerdahl-båd
67: Initialerne for den britiske poprock- og blues-guitarist, sanger og komponist, kendt med blandt andet „Cocaine," „Lay down Sally" og „Layla"
69: Urimelig
72: Lavt
75: Velstillet bybefolkning
77: Hanhjorte
78: 11'te måned i den hebraiske kalender; smertenshyl; audio-visuel
79: Skibsende
80: ******* Bassey: Sangerinde, der bl.a. har stået for titelmelodierne til James Bond-filmene *"Goldfinger"* og *"Diamonds are forever"*
82: Påstand
84: Boldkasteri og hinken
85: Ikke vurderet efter fortjeneste
87: Grundstof
89: Kammerat
90: Stof i knogler
91: Vækst, der symboliserer Grækenland
95: Portal
97: Iridium (atomnummer 77)
98: Flod i Skt. Petersborg
99: Desserterne

Lodret:

1: Rapperen og DJ'en René Dif kunne snildt betegnes som en sådan
2: Fiskenes pendant til baglemmerne hos pattedyr
3: Hot sovs
4: Frygtet bidende afrikansk insekt, hvis navn på dansk faktisk er „dobbelt konfekt“
5: Sy
6: Enhed for atomvægt
7: Erobrer
8: Selskab
10: Optaget af egen person
11: Afprøve båds bæreevne
12: Vedr. måne
13: Midt i Dallas
14: $0 ** 0 = 0 ** 1 = 1 ** 0 = 0, 1 ** 1 = 1$
15: Dæmon eller endda selve Satan
16: Bagtrop
17: Blive gendannet
19: Er i memoirer
23: Syre
28: Forbehold
30: Disken
31: 2 ens
32: Pigenavn
33: Træ
37: Elitært
39: Amerikansk enigheds-tilkendegivelse
42: Hyppigt forekommende internetadresseendelse
46: Prisoverslag
47: Del-
49: Les $**********$: Victor Hugo-roman fra 1862 (modulo accenter)
51: Et cetera
53: Slægt i maskeblomstfamilien med ca. 180 arter af urter og buske, ofte blåblomstrede og med hjulformet krone
55: Sygdomsudvikling i tiden fra infektion til de første symptomer
56: Sat til livs uden særlig mange manerer
58: Videnskabeligt uddannet medhjælper
63: Godt på en æggemad
64: Område
65: Gudetro
68: Indianernation med betydelige folketal i fx Montana og Oklahoma
70: Litterær frembringelse
71: Kung $**$: Kampsport
73: Letpåklædt
74: Revolvere
76: (To ord) „ >2“
81: Religiøs person
83: Fast
86: Grafregner-producent-akronym (folkene bag fx $**$-89); Titanium (atomnummer 22)
88: Ædelgas (atomnummer 54)
89: Murstensanordning, der fx holder regn ude
92: Landekode for Vatikanstaten; amerikansk postkode for staten Virginia
93: Moderne; New York
94: Ruthenium; landekode for Rusland
96: Bimmelims

Tid til forandring

Sara Arklint

Til september er der fire år siden jeg gik ind i FAMØS' redaktionsgruppe, og jeg er nu nået der til i mit studium hvor jeg hellere vil skrive speciale end være klistret ind i FAMØS.

Og flere af de andre i redaktionsgruppen befinder sig i tilsvarende situationer.

I løbet af de fire år der er gået, har jeg indset at FAMØS ikke sætter sig selv op, og jeg forstår derfor nu at der er brug for at nye træder til og hjælper Mikkel og Nikolaj med at føre FAMØS videre.

Jeg ville finde det meget ærgerligt hvis FAMØS døde hen nu. Ikke kun fordi jeg planlægger at skrive en formidlingsaktivitet og derfor har brug for et sted den kan publiceres, men også fordi jeg er kommet til at holde af FAMØS.

For jeg anerkender FAMØS som værende en lille brik i det puslespil der udgør vores fælles identitet som studerende her på IMF.

Men at jeg holder af FAMØS, skyldes mest af alt det arbejde jeg sammen med de andre i redaktionsgruppen har lagt i bladet.

Da jeg og fem andre overtog FAMØS for fire år siden, havde vi store planer om at forny FAMØS. Vi ville gøre det mere poppet.

Vi har sidenhen bragt tegneserier og krydsogtværser og artikelserier om kvindelige matematikere, vi har bragt debatindlæg og artikelserier om krigsmatematikere, og vi har artikelserien *Hvad forsker jeg i?*. Sammenlignet med hvordan FAMØS ville se ud hvis vi kun bragte formidlingsaktiviteter, er det faktisk ganske poppet nu.

Men roder man arkiverne igennem, vil man opdage at FAMØS aldrig har været ment som et tørt blad. Faktisk opstod FAMØS med det ene formål at vi igen skulle have et studenterblad der bragte tegninger og tegneserier.

Så da vi overtog FAMØS for fire år siden, førte vi overordnet set blot traditionen videre. Men vi har selvfølgelig bidraget med nye idéer, og det er rart at vide.

Selvom det således har været en fornøjelse at lave FAMØS, ser jeg frem til nu at læse FAMØS udelukkende som et blad og ikke som noget jeg skal sætte pænt op og skaffe artikler til og læse korrektur på.

Så jeg håber der vil være et blad til oktober.

Mullineux-afbildningen og Mullineux's formodning

Rikke Eie

Jeg vil her præsentere Mullineux-afbildningen, som er en bijektiv afbildning på mængden af p-regulære partitioner. Afbildningen bruges i repræsentationsteorien for de symmetriske grupper S_n, og kan ses som en p-analog til den almindelige transponering af partitioner.

Lad os starte med at forstå motivationen for at definere denne afbildning. En **repræsentation** over legemet K af en endelig gruppe G, er en homomorfi

$$T: \quad G \longrightarrow GL(n, K)$$

fra gruppen G ind i gruppen af invertible $n \times n$ matricer med koefficienter fra legemet K. T kaldes en K-repræsentation af G af dimension (eller grad) n.

Karakteren χ_T for repræsentationen T er en afbildning $\chi_T : G \to K$. For eksempel har vi, når K har karakteristik 0, at χ_T er givet ved $\chi_T(g) = \mathrm{tr}(T(g))$.

Vi vil her se nærmere på repræsentationer af S_n, og i første omgang arbejde over et legeme K med karakteristik 0. I dette tilfælde gælder der:

> Antallet af ikke-ækvivalente, irreducible K-repræsentationer af G er lig antallet af konjugationsklasser for G.
> K-repræsentationerne af G er, op til isomorfi, entydigt bestemt ved deres karakter.

Sammen med en række andre egenskaber gør dette, at vi her kan nøjes med at betragte de irreducible karakterer, dvs. karaktererne for hver ækvivalensklasse af irreducible repræsentationer.

Allerede tidligt i repræsentationsteoriens historie blev karaktererne for de symmetriske grupper beregnet af Frobenius, og det viste sig, at partitioner var et godt kombinatorisk værktøj at benytte sig af.

En **partition** λ af $n \in \mathbb{N}$ er en sekvens af tal $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{N}$, kaldet λ's dele, for hvilke der gælder $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_r$ og $l_1 + l_2 + \ldots + l_r = n$. Vi skriver

$$\lambda = (l_1, l_2, \ldots, l_r).$$

For den symmetriske gruppe S_n har vi således, når K har karakteristik 0, at antallet af irreducible karakterer er lig antallet af partitioner af n, da konjugationsklasserne for S_n er bestemt ved cykeltyperne, og da disse oplagt svarer til partitioner af n (jf. Mat 2AL).

Et resultat af Frobenius siger nu, at man på en *naturlig* måde kan indeksere de irreducible karakterer for S_n ved hjælp af partitionerne. Vi lader derfor $[\lambda]$ betegne den irreducible karakter der indekseres med partitionen λ.

Med denne "naturlige" indeksering gives karaktererne for repræsentationerne $\mathbb{1} : S_n \to GL(1, \mathbb{Q})$ givet ved $\sigma \mapsto 1$ og $\operatorname{sgn} : S_n \to GL(1, \mathbb{Q})$ givet ved $\sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$ henholdsvis indeksene (n) og (1^n) (partitionen med n dele af længde 1), og vi skriver

$$\mathbb{1} = [n] \quad \text{og} \quad \operatorname{sgn} = [1^n].$$

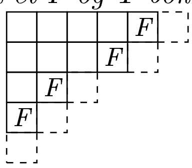
For nemt at kunne udregne karaktererne for repræsentationerne, har det vist sig nyttigt at se på en partition grafisk, i det der kaldes et Young-diagram. Givet en partition $\lambda = (l_1, l_2, \ldots, l_r)$, da er **Young-diagrammet** for λ, $\mathcal{Y}(\lambda)$, defineret som mængden

$$\mathcal{Y}(\lambda) = \{\, (i, j) \,|\, 1 \le i \le r, 1 \le j \le l_i\}.$$

Young-diagrammet illustreres i et diagram med r rækker, hvor række i indeholder l_i bokse. Den j'te boks i den i'te række kaldes den (i, j)'te boks.

En boks $A \in \mathcal{Y}(\lambda)$ er en **F-boks** (fjernelig boks), hvis $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus A$ er et Young-diagram for en partition af $n - 1$, og en boks B er en **T-boks** (tilføjelig boks) hvis $\mathcal{Y}(\lambda) \cup B$ er et Young-diagram for en partition af $n + 1$.

Eksempel 1. *Partition $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ kan illustreres ved nedenstående Young-diagram. F-bokse er markeret med et F og T-bokse er optegnet med stiplede linier.*

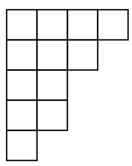


Lad partitionen λ=$(l_1, l_2, \ldots, l_r)$ være givet. Denne kan ved **transponering** sendes over i en anden partition, λ^T, kaldet den transponerede til λ. λ^T er partitionen

$$\lambda^T = (n_1, n_2, \ldots, n_{l_1}),$$

hvor n_i er antallet af dele i λ med længden i eller mere.

Eksempel 2. *For partition $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ er $\lambda^T = (4, 3, 2^2, 1)$. λ^T er illustreret i nedenstående Young-diagram.*



Transponering er altså grafisk set en spejling i diagonalen. Dette gælder altid.

Naturligheden af Frobenius' indeksering ses blandt andet, da vi får følgende rekursive metode til at udregne de irreducible karakterer for S_n, ved hjælp af de irreducible karakterer for S_{n-1}:

Forgreningsegenskaben: Lad $[\lambda]$ være en irreducibel karakter for S_n. Da er

$$[\lambda]\Big|_{S_{n-1}} = \sum_{\text{F-boks } A \,\in\, \lambda} [\lambda \setminus A].$$

Desuden får vi, at tensorering med fortegnsrepræsentationen har følgende enkle effekt på karakteren:
Tensorering med sgn:
Lad $[\lambda]$ være en irreducibel karakter for S_n. Da er

$$[\lambda] \otimes \mathrm{sgn} = [\lambda^T].$$

Lad os nu se nærmere på hvad der tilsvarende sker, når K har primtalskarakteristik p. Også i dette tilfælde er der en række egenskaber for repræsentationerne, der gør, at vi kan nøjes med at se på de irreducible karakterer. En af egenskaberne er:

> Antallet af irreducible karakterer er lig antallet af p-regulære konjugationsklasser for G, altså de konjugationsklasser af G, hvor elementernes orden *ikke* er delelig med p.

For S_n har vi altså, at antallet af irreducible karakterer er lig antallet af p-regulære konjugationsklasser for S_n, som igen er lig antallet af partitioner af n, hvor ingen del er delelig med p. Ifølge et resultat af Glaisher er dette lig antallet af p-regulære partitioner.

Her kaldes en partition ***p*-regulær**, hvis den ikke indeholder p eller flere dele af samme længde.

Vi kan altså, når K har primtalskarakteristik p, indeksere de irreducible karakterer for S_n med p-regulære partitioner af n, og det interessante er nu, om dette kan gøres på en ligeså "naturlig" måde som i tilfældet fra før.

Lad igen $[\lambda]$ betegne den irreducible karakter der indekseres med den p-regulære partition λ. Da viser det sig, at vi kan indeksere således at der gælder:

En p-analog til forgreningsegenskaben:
Lad $[\lambda]$ være en irreducibel karakter for S_n. Da gælder

$$[\lambda]\Big|_{S_{n-1}} \supseteq \sum_{A} [\lambda \setminus A],$$

hvor der summeres over alle gode bokse, A, i λ. En god boks er en speciel F-boks med nogen ekstra egenskaber, som vi kommer nærmere ind på senere.

Tensorering med sgn:
Lad $[\lambda]$ være en irreducibel karakter for S_n. Da er

$$[\lambda] \otimes \mathrm{sgn} = [\lambda^P],$$

hvor λ^P angiver en anden p-regulær partition.

Det store spørgsmål er nu, hvad sammenhængen mellem λ og λ^P er.

Det er tydeligt, at afbildningen $\lambda \to \lambda^P$ ikke er lig afbildningen $\lambda \to \lambda^T$, da der for en p-regulær partition λ ikke nødvendigvis gælder, at λ^T er p-regulær. For eksempel har vi, at $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ fra Eksempel 1 er 2-regulær, mens λ^T ikke er 2-regulær.

Først i 1979, da Mullineux definerede det vi idag kalder Mullineux-afbildningen $\lambda \mapsto \lambda^M$, fik man en ide om sammenhængen mellem λ og λ^P. Han fremsatte nemlig samtidig en formodning om, at Mullineux-afbildningen $\lambda \mapsto \lambda^M$ faktisk var lig afbildningen $\lambda \mapsto \lambda^P$. Denne formodning viste sig at være rigtig, og det er derfor, at vi betragter Mullineux-afbildningen som en (temmelig kompliceret) form for p-analog til transponering.

Mullineux's formodning viste sig dog at være en svær påstand at bevise, og det lykkedes først i 1995 for Kleschev og Ford, efter at Kleschev havde vist, at Mullineux´s formodning kunne reduceres til følgende kombinatoriske resultat:

Sætning 3. *Lad den p-regulære partition λ have en god boks A af restklassen i. Da har den Mullineux-konjugerede, λ^M en god boks B af restklassen $-i$, og der gælder:*

$$(\lambda \setminus A)^M = \lambda^M \setminus B.$$

Det skal bemærkes, at p i denne sætning ikke behøver at være et primtal, da resultatet som sagt er rent kombinatorisk. I det efterfølgende har vi derfor $p \in \mathbb{N}$, hvis ikke andet er nævnt.

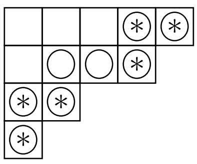
For at kunne definere Mullineux-afbildningen og forstå Sætning 3 har vi brug for en masse definitioner, så lad os starte fra en ende af.

For en partition λ er **randen** defineret som mængden af bokse $(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)$, for hvilke der gælder $(i + 1, j + 1) \notin \mathcal{Y}(\lambda)$.

En delmængde af randen kaldes ***p*-randen**. Denne delmængde består af et antal segmenter af længde p, og/eller et enkelt segment af en mindre længde. Det korte segment opstår, hvis der ikke er nok bokse tilbage på randen til at danne et helt p-segment. Det første segment indeholder de første p bokse på randen startende med boks $(1, l_1)$. Antag at det forrige segment slutter i række r, da starter det næste segment i række $r + 1$ med boks $(r + 1, l_{r+1})$ og indeholder de næste p bokse på randen. Sådan fortsættes der, indtil randen ikke er længere.

For en partition λ lader vi $e(\lambda)$ betegne længden af p-randen, og $I(\lambda)$ betegne den partition der fremkommer når p-randen fjernes fra λ.

Eksempel 4. *For den 3-regulære partition $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ er randen angivet med ◯ og 3-randen angivet med $*$ i nedenstående Young-diagram.*



For $p = 3$ er altså $e(\lambda) = 6$ og $I(\lambda) = (3^2)$.

For en boks $A = (i, j)$ i et Young-diagram for en partition λ er ***p*-restklassen** defineret som restklassen af $j - i$ modulo p. Et ***p*-restklassediagram** for en partition λ fås ved at skrive p-restklassen for hver boks ind i Young-diagrammet for λ.

Eksempel 5. *Partitionen $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ har følgende 3-restklassediagram, hvor et tal med fodtegnet T eller F indikerer, at den pågældende boks er henholdsvis en T-boks eller en F-boks.*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|l}
\hline
0 & 1 & 2 & 0 & 1_F & 2_T \\
\hline
2 & 0 & 1 & 2_F & \multicolumn{2}{l}{0_T} \\
\cline{1-4}
1 & 2_F & \multicolumn{4}{l}{0_T} \\
\cline{1-2}
0_F & \multicolumn{5}{l}{1_T} \\
\cline{1-1}
\multicolumn{6}{l}{2_T}
\end{array}$$

Jeg vil nu introducere generelle p-signaturfølger, da den, efter min mening, mest overskuelige definition af en god boks for en partition λ benytter sig af boksfølgen, som er en p-signaturfølge.

En ***p*-signatur** er et par $c\varepsilon$, hvor c er en restklasse modulo p og ε er et fortegn. En følge $X : \ c_1\varepsilon_1 \ c_2\varepsilon_2 \ \ldots \ c_t\varepsilon_t$ af p-signaturer kaldes en ***p*-signaturfølge**.

Givet en p-signaturfølge $X : \ c_1\varepsilon_1 \ c_2\varepsilon_2 \ \ldots \ c_t\varepsilon_t$, da definerer vi for $0 \leq i \leq p-1$ og $1 \leq j \leq t$

$$\sigma(i, j) = \sum_{k \leq j, \, c_k = i} \varepsilon_k$$

hvor hvert plus i summen sættes lig $+1$, hvert minus sættes lig -1 og den tomme sum sættes lig 0.

For en restklasse i modulo p defineres den i'te **peakværdi** $\pi_i(X)$ for p-signaturfølgen $X : \ c_1\varepsilon_1 \ c_2\varepsilon_2 \ \ldots \ c_t\varepsilon_t$, som

$$\pi_i(X) = \max\{0, \sigma(i, j) \mid 1 \leq j \leq t\},$$

og den i'te **slutværdi** $\omega_i(X)$ for X, defineres som

$$\omega_i(X) = \sigma(i, t).$$

En restklasse i modulo p kales en **god restklasse** for p-signaturfølgen X hvis $\pi_i(X) > 0$, og for $k = \min\{j \mid \sigma(i, j) = \pi_i(X) > 0\}$ kalder vi restklassen c_k ***i*-god** for X. Vi kalder desuden restklassen c_j, $j \leq t$, ***i*-normal** for X, hvis c_j er i-god for delfølgen $c_1\varepsilon_1 \ \ldots \ c_j\varepsilon_j$ af X.

Eksempel 6. *Lad 4-signaturfølgen X være givet ved*

$X: 2+\ 3-\ 1+\ 2-\ 1+\ 0+\ 3+\ 1-\ 2+\ 2-\ 1+\ 0-\ 3-\ 0+\ 0+\ 2-\ 3-\ 1+\ 0-\ 3+\,.$

Ved udregning af $\sigma(i,j)$ for $i \in \{0,\dots,3\}$ og $j \in \{1,\dots,20\}$, ses det, at vi har

$$\pi_0(X) = 2, \quad \pi_1(X) = 3, \quad \pi_2(X) = 1 \quad \textit{og} \quad \pi_3(X) = 0$$

og $$\omega_0(X) = 1, \quad \omega_1(X) = 3, \quad \omega_2(X) = -1 \quad \textit{og} \quad \omega_3(X) = -1.$$

Restklasserne $0, 1$ og 2 er altså gode restklasser for X. Desuden ser vi at

c_6 *og* c_{15} *er 0-normale*	c_{15} *er 0-god*
c_3, c_5 *og* c_{18} *er 1-normale*	c_{18} *er 1-god*
c_1 *er 2-normal*	c_1 *er 2-god.*

Boksfølgen $N(\lambda)$ for en partition λ består af restklasserne for T-boksene og F-boksene i restklassediagrammet for den pågældende partition, læst fra øverst til højre mod venstre og nedad. T-bokse indgår med fortegnet $-$, og F-bokse indgår med fortegnet $+$. En boksfølge er således altid alternerende.

En F-boks med restklassen i i restklassediagrammet for partitionen λ, er en **god boks**, hvis den tilsvarende signatur i boksfølgen $N(\lambda)$ er i-god.

Eksempel 7. *Boksfølgen for partitionen λ fra Eksempel 5 er*

$$N(\lambda): \quad 2-\ 1+\ 0-\ 2+\ 0-\ 2+\ 1-\ 0+\ 2-\,.$$

Ved for $i \in \{0,\dots,2\}$ og $j \in \{1,\dots,9\}$ at udregne $\sigma(i,j)$ og peakværdierne ses det, at 1 og 2 er gode restklasser for $N(\lambda)$. Det ses også, at c_2 er 1-normal og 1-god, samt at c_6 er 2-normal og 2-god. Vi har altså, at boksene $(1,5)$ og $(3,2)$ i Young-diagrammet for λ er gode bokse.

Lad nu λ være en p-regulær partition og betragt følgen af partitioner $\lambda_1,\dots,\lambda_{\alpha+1}$ givet ved:

$$\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = I(\lambda_1),\dots,\ \lambda_{i+1} = I(\lambda_i),\dots,\ \lambda_{\alpha+1} = I(\lambda_\alpha) = \emptyset.$$

Da er **Mullineux-symbolet** for λ defineret som

$$G_p(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_\alpha \\ r_1 & r_2 & \dots & r_\alpha \end{pmatrix},$$

hvor $a_i = e(\lambda_i)$ dvs. længden af p-randen for λ_i og r_i er antallet af dele i λ_i.

Da p-randen for en partition er entydig, har vi, at Mullineux-symbolet for en partition er entydigt bestemt. Omvendt har vi også, at de to følger $(a_1,\dots,a_\alpha)$ og $(r_1,\dots,r_\alpha)$ entydigt bestemmer λ, da der kun findes én måde, hvorpå man kan tilføje hver af de α p-rande til den foregående partition. Det er således muligt at gendanne en partition ud fra dens Mullineux-symbol.

Vi har desuden, at hver af λ_i'erne er p-regulære, da λ p-regulær medfører at $I(\lambda)$ er p-regulær osv.

Følgende sætning giver nogle betingelser som skal være opfyldt, for at der findes en p-regulær partition λ, som opfylder $I(\lambda) = \lambda'$.

Sætning 8. *Antag at λ' er en p-regulær partition med r' dele og $e(\lambda') = a'$. Så findes der en p-regulær partition λ med r dele, $e(\lambda) = a$ og $I(\lambda) = \lambda'$ hvis og kun hvis følgende betingelser alle er opfyldt:*

i) $0 \leq r - r' \leq p$.
ii) *For $m = a' + r - r' + \varepsilon'$ gælder $m \leq a < m + p$, hvor $\varepsilon' = 0$ hvis $p \mid a'$ og 1 ellers.*
iii) *Hvis $r = r'$ så gælder $p \mid a$.*
iv) *Hvis $r - r' = p$ så gælder $p \nmid a$.*

Dette giver nogle restriktioner på indgangene i Mullineux-symbolet, hvorfor to tilfældige følger $(a_1, \ldots, a_\alpha)$ og $(r_1, \ldots, r_\alpha)$ ikke nødvendigvis bestemmer en p-regulær partition.

Har vi til gengæld to følger $(a_1, \ldots, a_\alpha)$ og $(r_1, \ldots, r_\alpha)$ som overholder restriktionerne, så siger sætningen os, at der findes en partition λ med Mullineux-symbol $G_p(\lambda) = \binom{a_1\ a_2\ \ldots\ a_\alpha}{r_1\ r_2\ \ldots\ r_\alpha}$.
Vi er nu langt om længe klar til at beskrive Mullineux-afbildningen.
Lad λ være en p-regulær partition med Mullineux-symbol $G_p(\lambda) = \binom{a_1\ a_2\ \ldots\ a_\alpha}{r_1\ r_2\ \ldots\ r_\alpha}$ og lad følgen $(s_1, \ldots, s_\alpha)$ være givet ved

$$s_i = a_i - r_i + \varepsilon_i,$$

hvor $\varepsilon_i = 0$ hvis $p \mid a_i$ og $\varepsilon_i = 1$ ellers. Da gælder:

Sætning 9. *Følgerne $(a_1, \ldots, a_\alpha)$ og $(s_1, \ldots, s_\alpha)$ givet ovenfor, bestemmer entydigt en følge af p-regulære partitioner λ'_i for $i = 1, 2, \ldots, \alpha$, således at hver λ'_i har s_i dele, $e(\lambda'_i) = a_i$ og $I(\lambda'_i) = \lambda'_{i+1}$.*
Dette vises ved at vise, at betingelserne i)-iv) fra Sætning 8 er opfyldt.
Med oventående notation defineres **Mullineux-afbildningen**, som den afbildning der sender den p-regulære partition λ med Mullineux-symbol

$$G_p(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_\alpha \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_\alpha \end{pmatrix}$$

over i den entydigt bestemte partition, λ^M ($= \lambda'_1$ fra sætning 9), med Mullineux-symbol

$$G_p(\lambda^M) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_\alpha \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_\alpha \end{pmatrix}.$$

Vi kalder λ^M for den **Mullineux-konjugerede** til λ.

Eksempler på Mullineux-afbildningen og Sætning 3

Lad os igen betragte partitionen $\lambda = (5, 4, 2, 1)$. Denne partition er specielt 3-regulær, hvorfor vi kan sætte $p = 3$. I nedenstående Young-diagram er hver af 3-randene for partitionerne $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = I(\lambda_1)$ og $\lambda_3 = I(\lambda_2)$ angivet med et i svarende til den partition den tilhører.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 2 & 1 \\ \cline{1-4} 1 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Vi ser altså, at Mullineux-symbolet for λ er $G_3(\lambda) = \binom{6\,3\,3}{4\,2\,2}$, og finder heraf at Mullineux-symbolet for λ^M er $G_3(\lambda^M) = \binom{6\,3\,3}{2\,1\,1}$.

Vi kan nu opbygge λ^M ved at tilføje de tre 3-rande:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \cline{1-3}\end{array}$$

og finder således $\lambda^M = (9, 3)$.

Fra Eksempel 7 ved vi, at λ har to gode bokse, nemlig boks $(1, 5)$ med restklassen 1 og boks $(3, 2)$ med restklassen 2. Vi vil nu finde de tilsvarende gode bokse for λ^M.

Lad $A = (3, 2) \in \mathcal{Y}(\lambda)$. Vi skal nu finde $(\lambda \setminus A)^M$. Dertil finder vi først Mullineux-symbolet for $\lambda \setminus A$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 2 & 1 \\ \cline{1-4} 1 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

dvs. vi har $G_3(\lambda \setminus A) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Heraf finder vi $G_3((\lambda \setminus A)^M) = \binom{5\,3\,3}{2\,1\,1}$, hvilket giver os

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Vi har altså $(\lambda \setminus A)^M = (9, 2)$.

Det viser sig altså, at fjernelsen af den gode boks A fra λ og derefter Mullineux-konjugering, svarer til først at Mullineux-konjugere og derefter fjerne boks $(2, 3)$ fra λ^M. Da A er en god boks med restklassen 2, giver Sætning 3, at boks $(2, 3)$ er en god boks for λ^M med restklasse $-2 = 1$. At dette rent faktisk er tilfældet, konstateres nemt ved hjælp af Boksfølgen for λ^M.

På samme måde kan vi se, at der gælder

$$(\lambda \setminus \text{boks } (1, 5))^M = \lambda^M \setminus \text{boks } (1, 9).$$

Vi har altså nu defineret Mullineux-afbildningen $\lambda \to \lambda^M$, og set hvordan den virker på partitionen $\lambda = (5, 4, 2, 1)$. Desuden har vi benyttet Sætning 3, til at se hvordan gode bokse i λ hænger sammen med gode bokse i λ^M.

Litteraturliste

[1] C. Bessenrodt: *Representations of the symmetric groups.* In: Proceedings 8. General EWM Meeting at the International Centre for Theoretical Physics, Trieste/Italy 1997 (1999), 123-134. Eds.: Laura Fainsilber, Catherine Hobbs, Hindawi Publ. Corp.

[2] C. Bessenrodt and J.B. Olsson: *On Mullineux symbols.* J. Comb. Theory (A) 68 (1994), 340-360.

[3] C. Bessenrodt and J.B. Olsson: *On residue symbols and the Mullineux conjecture.* J. Algebraic Comb. 7 (1998), 227-251.

[4] G. Mullineux: *Bijections of p-regular partitions and p-modular irreducibles of the symmetric groups.* J. London Math. Soc. 20(2) (1979), 60-66.

[5] J.B. Olsson: *Noter fra faget Kombinatorik og Repræsentationsteori.* MA (2004).

Famøs juni 2006.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-,
Økonomi- og Statistikstuderende ved
Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:
Mikkel Abrahamsen
Sara Arklint (ansvh.)
Tarje Bargheer
Ulrik Buchholtz

Deadline for næste nummer:
Onsdag den 4. oktober 2006

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til famos@math.ku.dk – meget gerne
skrevet i LaTeX.

Famøs er et internt fagblad.

Fagbladet Famøs
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.math.ku.dk/famos/

Oplag: 500 stk.
ISSN 1395-2145

Sommerskole 2006

Dansk Matematisk Forening har tradition for at afholde sommerskole, og i år har sommerskolen for første gang til huse i København på HCØ.

Arrangementet finder sted 18.-21. august, og programmet er følgende:

- Ian Kiming, KU: Bag Fermats sidste sætning
- Søren Eilers, KU: Symbolsk dynamik
- Bjarne Toft, SDU: Uløste kombinatoriske problemer

Sommerskolen henvender sig til matematikstuderende i den sidste halvdel af deres studium. Ph.d.-studerende er også meget velkomne.

Et mere detaljeret program findes på `math.ku.dk/conf/sommerskole06/`.

Der er et deltagergebyr på 750 kroner som går til mad, store mængder kaffe, indkvartering for ikke-københavnere, samt en enkelt fest. Der er heldigvis tradition for at de enkelte institutter dækker store dele af deltagergebyret for deres egne studerende.

Tilmelding foregår hos Søren Eilers på `eilers@math.ku.dk` frem til d. 14. juli.