# Max Power: En pæn(t) simpel invariant

Jacob Thamsborg, jacob@thamsborg.dk

## Om at gå (Klods) Søren i bedene

I sidste års sidste udgave af FAMØS fortalte Søren Eilers om sit arbejde med at klassificere skiftrum genereret af visse substitutioner op til strømningsækvivalens. Denne klassifikation foregår ved snedig – og ret overraskende – brug af operatoralgebra. Jeg selv er i skrivende stund i gang med speciale hos Søren om netop dette emne, men min vinkel er mere direkte, da min viden om operatoralgebra ikke er stor.

Dette skal dog ikke holde os tilbage. Vi vil med lidt løs viden om metriske rum og almindelig dødelig magi – men helt uden operatoralgebra – reproducere et konkret resultat fra en af Sørens nyeste artikler, nemlig at de to substitutioner over alfabetet $\{a, b, c, d\}$ defineret ved

$$a \mapsto accdadbb, \quad b \mapsto acdcbadb, \quad c \mapsto aacdcdbb, \quad d \mapsto accbdadb$$

hhv.

$$a \mapsto accbbadd, \quad b \mapsto accdbabd, \quad c \mapsto aacbbcdd, \quad d \mapsto acbcdabd$$

genererer skiftrum som ikke er strømningsækvivalente. Og således demonstrere at man kan leve et næsten normalt liv som matematiker, uden at vide hvad en $C^*$-algebra er. Men først skal vi vist have lidt styr på begreberne.

Jeg har tilstræbt at gøre denne artikel uafhængig af Sørens artikel, men udbyttet vil naturligvis være større hvis man læser begge. Jeg beklager notationsforskelle, man graver sig forbløffende hurtigt ned. Kontakt mig endelig hvis du har spørgsmål, savner referencer eller lignende.

## Symboler, sekvenser, skiftrum og substitutioner

Lad os tage det fra begyndelsen. Først skal vi have os et *alfabet*, det er en ikke-tom, endelig mængde af symboler, vi benævner det gerne $\mathcal{A}$. Et godt eksempel kunne være $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$. Når vi har symboler kan vi danne *ord* ved at sætte dem ved siden ad hinanden, f.eks. er *dab* og *adbad* helt fine ord. Mere præcist laver vi ord ved at sætte 0 eller flere, men dog kun endeligt mange, symboler efter hinanden. Da ordet bestående af nul symboler er notorisk svært at få øje på betegner vi det med $\epsilon$, og vi sætter $\mathcal{A}^*$ til at være mængden af ord lavet med symboler fra alfabetet $\mathcal{A}$.

Da vi er matematikere kan vi sagtens håndtere uendelighed uden hovedpine, så vi kan selvfølgelig også betragte uendeligt lange ord. Disse, som vi kalder *sekvenser*, er mere præcist følger af symboler indekseret over mængden af heltal. Et (i sagens natur) ufuldstændigt eksempel er

$$\ldots dabdabbadab.adbadaadbad\ldots$$

idet vi aftaler at symbolet svarende til heltallet 0 står lige til højre for punktummet og så går det ellers derudaf i begge retninger. Tænk dog ikke så meget på disse heltal, tænk hellere på en sekvens som et punktum og så uendeligt mange symboler i begge retninger. Alle sekvenserne lavet med symboler fra alfabetet $\mathcal{A}$ betegner vi $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Vi er nu klar til at bygge skiftrum, vores første milepæl. Et *skiftrum* over alfabetet $\mathcal{A}$ er en samling af nogle, men sjældent alle, sekvenserne fra $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Under visse betingelser. Først definerer vi *skiftafbildningen*. Det er let, for det er bare afbildingen $T : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ defineret ved at rykke punktummet en gang til højre. Mere formelt er $T$ defineret ved at vi har $(T(x))_i = x_{i+1}$ for $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ og $i \in \mathbb{Z}$ men tænk hellere på at flytte punktummet. Vi kan nu formulere kravene til et skiftrum, den dyreste version lyder at det er en delmængde $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ med $T(X) = X$ som er lukket i produkttopologien på $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ induceret af den diskrete topologi på $\mathcal{A}$. I den billigere ende kan vi definere en naturlig metrik på $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ som placerer sekvenser tæt dersom de stemmer overens på mange symboler omkring punktummet. Vi kan så kræve lukkethed under denne metrik, stadig kombineret med invarians under skiftafbildningen. Da metrikken faktisk inducerer produkttopologien, er definitionerne ækvivalente, men kompakthed følger gratis med den dyre.

Aftenens andet højdepunkt, definition af substitutioner: En *substitution* $\tau$ over alfabetet $\mathcal{A}$ er blot en afbildning $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$. Ved at sætte funktionsværdier ved siden af hverandre og definere $\tau(\epsilon) = \epsilon$ kan vi udvide til $\tau : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$, så giver det også mening at sammensætte $\tau$ med sig selv. Vi kræver ydermere primitivitet af vores substitutioner, et simpelt kriterium som udelukker visse degenererede substitutioner, det skøjter vi elegant henover her. Man kan på flere ævkivalente metoder knytte et skiftrum $X_\tau$ til en primitiv substitution $\tau$. Den letteste er at definere substitutionens sprog $\mathcal{L}(\tau)$ som alle ord, der forekommer som delord af $\tau^n(\alpha)$ for $n \in \mathbb{N}$ og $\alpha \in \mathcal{A}$. Vi kan nu bygge $X_\tau$ ved at plukke de sekvenser fra $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ hvis delord alle er i $\mathcal{L}(\tau)$.

Lad os slutte med et lille eksempel, vi definerer Morse substitutionen $\tau_M$ over alfabetet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ ved

$$a \mapsto ab, \quad b \mapsto ba.$$

Prøv her om du kan finde et fixpunkt i $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ for $\tau_M$ eller – hvis det ikke kan lade sig gøre – så måske et $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ med $\tau_M^2(x) = x$? Kan vi så slutte at $x \in X_{\tau_M}$? Vi definerer $\tau_M : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ved at lade punktummet stå og anvende $\tau_M$ på hvert enkelt symbol. Hvad så med at finde et et ord på formen $uu$ for $u \in \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$ i $\mathcal{L}(\tau_M)$? Eller måske et på formen $uuu$?

## At være ens på forskellige måder og forskellige måder at være ens på samme måde

Lad os nu forestille os at vi har to skiftrum, $X$ og $Y$. Man kan naturligt spørge om de er ens, og dette er selvfølgelig tilfældet hvis vi faktisk har $X = Y$. Men også hvis vi har $X \neq Y$ kan vi i visse tilfælde opleve at de – betragtet som skiftrum – opfører sig helt identisk. Denne, lidt svagere form for lighed, fanges i følgende definition:

**Definition 1.** *To skiftrum $X$ og $Y$ kaldes* konjugerede *dersom der findes en homeomorfi $\varphi : X \to Y$ med $\varphi \circ T = T \circ \varphi$.*

Konjugerethed er naturlig, idet den essentielt fordrer bevarelse af skiftrummets struktur, både den topologiske og den dynamiske. Men det er stadig for stærkt for os og vi må svække yderligere. For at gøre det er vi nødt til at trylle lidt: Vi tager et skiftrum $X$, putter det i en sort hat og – abracadabra – ud trækker vi $\Sigma X$, et nyt topologisk rum, der indeholder $X$, men hvor vi for hvert element $x \in \Sigma X$ tillægger $T^r(x)$ mening for alle $r \in \mathbb{R}$, ikke bare for heltal. Tænk på det som muligheden for at flytte punktummet til et vilkårligt sted i sekvensen, også inde i selve symbolerne. Vi kan nu definere:

**Definition 2.** *To skiftrum $X$ og $Y$ kaldes* strømningsækvivalente *dersom der findes en homeomorfi $\varphi : \Sigma X \to \Sigma Y$ således at der for hver $x \in \Sigma X$ findes $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voksende med $\varphi(T^r(x)) = T^{f_x(r)}(\varphi(x))$ for alle $r \in \mathbb{R}$.*

Intuitionen er her, at man kan strække hver sekvens som man lyster, dog skal retningen opretholdes, derfor kravet om at være voksende. Man kan begribeligvis definere $\Sigma X$ uden magi, se f.eks. definition 2 i Sørens tidligere artikel i Famøs, her er vi mere dog mere interesserede i intuitionen.

Lad os parallelt med disse lighedsovervejelser introducere en simpel måde at konstruere nye skiftrum ud fra gamle:

**Definition 3.** *Lad $X$ være et skiftrum over alfabetet $\mathcal{A}$ og lad $\alpha \in \mathcal{A}$ og $\bullet \notin \mathcal{A}$ være symboler. Lad $s : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to (\mathcal{A} \cup \{\bullet\})^{\mathbb{Z}}$ være den afbilding som erstatter alle forekomster af $\alpha$ med $\alpha\bullet$. Vi definerer da et nyt skiftrum ved* symbolekstension *som følger:*

$$X^{\alpha\bullet} = s(X) \cup T(s(X)).$$

Man bør som ansvarlig matematiker tjekke at der faktisk er tale om et skiftrum, bemærk at vi er nødt til at forene med $T(s(x))$ for at undgå huller i sekvenserne. Intuitionen er at vi strækker hver forekomst af $\alpha$ til dobbelt længde, og ganske rigtigt, vi får at $X$ og $X^{\alpha\bullet}$ er strømningsækvivalente. Mere spændende er dog at denne konstruktion sammen med konjugerethed faktisk genererer strømningsækvivalens. Det betyder at to skiftrum $X$ og $Y$ er strømningsækvivalente netop hvis der findes en endelig følge af skiftrum

$$X = X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n = Y$$

således at vi for hver $1 \leq i < n$ har at $X_i$ og $X_{i+1}$ er konjugerede eller at den ene af de to kan opnås fra den anden ved symbolekstension. Dette er bekvemt at vide men ubekvemt at vise, især den ene vej rundt. Man kan næsten fornemme det problematiske i at skifte fra den kontinuerte / reelle definition til den diskrete / heltallige version.

## At være eller ikke at være strømningsækvivalent

Vi har nu overstået den nødvendige men også lidt kedelige del, nemlig at få styr på begreberne, og vi er klar til at gå i kast med selve opgaven: At vise at skiftrummene genereret af de to substitutioner i indledningen ikke er strømningsækvivalente. Det er bare ikke så let. Kan vi hitte en måde at bevæge os fra det ene skiftrum til det andet ved konjugation og symbolekspansion er de strømningsækvivalente, men kan vi ikke, kan det jo skyldes manglende opfindsomhed snarere end manglende strømningsækvivalens.

Hvad gør vi så? Hvad nu hvis vi kunne knytte et magisk tal til hvert af de to skiftrum og så vise at *hvis* skiftrummene er strømningsækvivalente *så* er tallene de samme? Og hvis så tallene faktisk ikke var de samme? Jamen så ville vi jo have vist det ønskede, det lyder som en besnærende ide. Vi kalder det lovede magiske tal en *invariant* fordi det ikke ændres under strømningsækvivalens. Ideen er tyvstjålet fra Sørens arbejde, hans invarianter er dog snedige grupper. Mere generelt anvendes ideen om invarianter under forskellige former for lighed i klassifikationsspørgsmål bl.a. i algebraisk topologi og operatoralgebra. Husk dog på en ting inden vi starter: Hvis de magiske tal skulle vise sig at være ens, ja så er vi ikke nået en dyt videre. Vores invariant er nemlig ikke komplet, så vi kan ikke slutte den anden vej, identiske magiske tal implicerer ikke nødvendigvis strømningsækvivalens. Så magisk er det desværre heller ikke.

## Det magiske tal: Max Power

Hvad er det så, dette magiske tal, dette lys for enden af tunellen som skal løse vores problemer? Det er faktisk ikke så kompliceret. Et ord, som består af gentagelser af et andet ord, kalder vi en *periode*, længden af dette andet ord bliver periodens *længde* og længden af selve ordet divideret med periodens længde er periodens *power*. Det lyder nu engang bedre på engelsk. Bemærk at den sidste gentagelse ikke behøver være fuldstændig, eksempler på perioder er $a$ med længde og power 1 og ordene $ababa$ og $abcdabcdab$ der har længde 2 henholdsvis 4 men begge power på $2\frac{1}{2}$. Det magiske tal er så den største power vi kan finde, hvis vi leder blandt alle perioder i substitutionens sprog, vi kalder det *Max Power*. Nåja, det største tal i en potentielt uendelig mængde er måske lidt vovet, så lad os nøjes med supremum. Og, nåja igen, hvis vi gerne vil have et reelt tal som supremum må vi hellere sørge for en øvre grænse. Heldigvis har en klog kvinde vist, at holder vi os til *aperiodiske* primitive substitutioner så er det i orden. De aperiodiske er dem som genererer uendelige skiftrum, og det er også de interessante, så der er ingen skade sket ved at nøjes med dem. Vi kan nu præcist definere:

**Definition 4.** *Til en aperiodisk primitiv substitution $\tau$ knytter vi en reel* Max Power *defineret ved*

$$\mathrm{MP}(\tau) = \sup\{p \mid p \text{ er power for en periode i } \mathcal{L}(\tau)\}$$

og vi postulerer at dersom de to indledningsvis definerede substitutioner – som lykkeligvis er både primitive og aperiodiske – genererer strømningsækvivalente skiftrum, ja så har de samme Max Power.

Lad os lige tage en pause til et eksempel. Vi definerede Morse substitutionen ovenfor, og jeg lover at den er både primitiv og aperiodisk. Faktisk kan man let undersøge dette – helt uden at kende definitionerne – for det program som Søren har udviklet og som han omtalte i sin artikel kan, blandt mange andre ting, tjekke dette. Programmet kan dog ikke udregne Max Power, men jeg postulerer at $\mathrm{MP}(\tau_M) = 2$. Det er ikke svært at vise $\mathrm{MP}(\tau_M) \geq 2$ men den anden vej er er ikke så let. Prøv det, som de siger i reklamerne.

Nu tilbage til hovedopgaven og vores postulat: Hvordan Søren viser vi det? Ja, det er jo spørgsmålet, lad os se hvad vi kan finde på. Først kalder vi substitutionerne $\tau$ og $\upsilon$ for at få hold på tingene, skiftrummene genereret af substitutionerne bliver så $X_\tau$ og $X_\upsilon$. Vi antager nu at de faktisk er strømningsækvivalente, det er rimeligt nok, for det er under den antagelse vi ønsker at vise $\mathrm{MP}(\tau) = \mathrm{MP}(\upsilon)$. Lad os så tage en periode i $\mathcal{L}(\tau)$, en god vilkårlig en. Den har jo så en tilhørende power. Hvad nu hvis vi ud fra den kunne bygge os en periode i $\mathcal{L}(\upsilon)$ med samme power? Ja så kunne vi faktisk udelukke $\mathrm{MP}(\tau) > \mathrm{MP}(\upsilon)$ og den anden vej kan sikkert klares med et symmetriargument og lidt armviften. Så vi har allerede en god – omend lidt løs – plan.

Lad os uddybe den lidt ved hjælp af det vi allerede har lært. For vi ved nemlig at vi kan komme fra $X_\tau$ til $X_\upsilon$ ved konjugation, symbolekstension og, nåja, omvendt symbolekstension. Så måske vi kan betragte perioders opførsel under disse konstruktioner? Der går dog lidt ged i det, for vi kan ikke være sikre på at eventuelle mellemliggende skiftrum er genereret af substitutioner, så hvordan kan vi tale om perioder i dem? Vi definerer hurtigt sproget for et vilkårligt skiftrum $X$ til at være alle ord som forekommer i rummets sekvenser, vi betegner det $\mathcal{L}(X)$. Så er det i orden at tale om perioder i vilkårlige skiftrum, de skal bare ligge i skiftrummets sprog. Og da vi har $\mathcal{L}(\tau) = \mathcal{L}(X_\tau)$ og tilsvarende for $\upsilon$ – ja faktisk for alle primitive substitutioner – har vi ikke klodset i det. Og så er planen klar: Vi skal argumentere for at perioder kan krydse konjugationer, symbolekspansioner og omvendte symbolekspansioner uden tab af power. Så er det bare at komme i gang med detaljerne.

Vi starter med konjugationer, de er gerne venlige. Fat to vilkårlige konjugerede skiftrum, $X$ og $Y$, vi kan vælge en homeomorfi $\varphi : X \to Y$ med $T \circ \varphi = \varphi \circ T$. Det viser sig, at hvis vi tager en sekvens $x \in X$ og gerne vil gætte symbolet

$\varphi(x)_{[i]}$ for et $i \in \mathbb{Z}$ så behøver vi ikke kigge på hele $x$ men kun på symbolerne i omegnen af $x_{[i]}$. Dette resultat kaldes Curtis-Lyndon-Hedlunds Theorem, mere præcist findes et $n \in \mathbb{N}_0$ og en afbildning $\Phi$ fra mængden af ord af længde $2n+1$ i $\mathcal{L}(X)$ til mængden af symboler i $Y$ således at vi har $\phi(x)_{[i]} = \Phi(x_{[i-n,i+n]})$. Vi vil blindt stole på dette. Men prøv at overveje kort: Det er faktisk en rimelig konsekvens af kontinuiteten kombineret med kommutativitet af homeomorfien og skiftafbildningen, idet vi husker at metrikken placerer sekvenser tættere på hinanden desto mere de stemmer overens omkring punktummet.

Det er tid til handling. Hvis nu det omtalte $n$ var, ja, lad os bare sige 2. Og kanhænde at *abcdabcdabcd* er en periode i $X$, det giver, tælle tælle tælle, længde 4 og power 3. Så findes $x \in X$ med perioden som delord, vi har altså $x_{[i,i+11]} = abcdabcdabcd$ for et eller andet $i \in \mathbb{Z}$. Monstro vi kunne finde en god periode et eller andet sted i $Y$? Vi får

$$\varphi(x)_{[i,i+11]} = ??\alpha\beta\gamma\delta\alpha\beta\gamma\delta??$$

idet vi indfører følgende symbolbetegnelser

$$\alpha = \Phi(abcda),\ \beta = \Phi(bcdab),\ \gamma = \Phi(cdabc),\ \delta = \Phi(dabcd)$$

og et spørgsmålstegn betyder at vi ikke rigtig kender symbolet. Er det så godt eller skidt? På den ene side er det jo godt, vi har lavet os en ny periode, endda med samme længde. Men på den anden side er det skidt, for der er røget et par symboler i begge ender så vi er nede på power 2. Vi kan altså ikke krydse en konjugation helt uden tab af power – men vi kan faktisk gøre noget der er ligeså godt. For bemærk at faldet i power er lig 4 divideret med længden af perioden, og det uanset hvor lang perioden er. Så hvad nu hvis den var meget lang? Vi generaliserer og konkluderer i et hug:

**Proposition 5.** *Vi kan krydse en konjugation med vilkårligt lille tab af power ved at betragte perioder der er tilstrækkeligt lange.*

Hvis man kan rumme det, kan man tænke på at en periode af uendelig længde kan krydse en konjugation helt uden tab af power. Det er godt nok lidt uklart hvordan en sådan periode skulle se ud, men tanken giver intuition.

Nu hastigt videre til symbolekspansioner, tag skiftrummet $X$, lad os f.eks. sige at det er over alfabetet $\{a, b\}$, og byg skiftrummet $X^{ac}$. Måske vi i $X$ har perioden *bbabbabb* med længde 3 og power $2\frac{2}{3}$, måske den ligger i sekvensen $x \in X$, og hvis vi kigger i sekvensen $s(x) \in X^{ac}$ kan vi – måske – finde perioden

$$s(bbabbabb) = bbacbbacbb$$

som har længde 4 men desværre power på $2\frac{1}{2}$. Ak, tænkte matematikeren, og ve, skæbnen er mig bestemt ikke venligt stemt, endnu en gang bliver der skåret salamiskiver af min periode. Hvad gør vi? Problemet er, at antallet, eller rettere frekvensen, af forekomster af $a$ i den ufuldstændige ende $bb$ er mindre end i selve det gentagne ord $bba$, derfor bliver $bb$ ikke forlænget med samme faktor som $bba$ og vi oplever tab af power. Og denne gang går det ikke at vælge perioden meget lang, for vort tab er ikke opadtil begrænset af et fast antal symboler. Og så alligevel...

Magi må der til, og magi er hvad vi har, vi har nemlig snydt lidt hjemmefra, ligesom i TV køkkenet: I skiftrum genereret af primitive substitutioner har hvert symbol en grænsefrekvens, således at hvis vi betragter ord i sproget som er tilstrækkeligt lange, så kommer frekvensen af hvert symbol vilkårligt tæt på symbolets grænsesekvens. Jeg skal ikke redegøre for dette resultat her, blot påberåbe mig Perron-Frobenius' sætning og haste videre, men den skulle være god nok. Vi kan nu regne, eller måske snarere pseudo-regne: Hvis perioden har uendelig længde, og den har en kort ufuldstændig ende, f.eks. en med $n \in \mathbb{N}_0$ symboler, ja så taber vi højst hele den ufuldstændige ende dvs. højst $\frac{n}{\infty}$ i power, det kan vi godt leve med. Og hvis nu der er tale om en lang ufuldstændig ende, f.eks. en som er uendelig lang, ja så er frekvensen af det symbol vi forlænger lig grænsefrekvensen både i den ufuldstændige ende og i det gentagne ord hvorfor de forlænges med samme faktor og der er intet tab af power.

Det var nok lovlig løssluppent, og de fleste vil nok – som en slags tømmermænd – insistere på mere præcise overvejelser. Men den underliggende intuition synes klar, så vi vil lade det ligge her. Et andet problem er mere presserende, for hvordan ved vi egentlig at de omtalte grænsesekvenser findes i de mellemliggende skiftrum som vi møder på vores tur fra $X_\tau$ til $X_\upsilon$? De findes i $X_\tau$ og $X_\upsilon$ da disse er genereret af primitive substitutioner, men faktisk er vi nødt til at vise at eksistensen af grænsefrekvenser bevares under konjugation og begge veje over symbolekspansion. Er det rimeligt at dette skulle være sandt? Bestemt ja. Er det svært at vise? Nej. Men er det så besværligt at vise? Ja, lidt besværligt er det. Er det noget vi ønsker at gå dybere ind i her? Bestemt nej! I stedet skynder vi os videre med endnu en delkonklusion:

**Proposition 6.** *Vi kan krydse de symbolekspansioner, som vi møder, med vilkårligt lille tab af power ved at betragte perioder der er tilstrækkeligt lange. Og det begge veje.*

Nåja, vi har faktisk slet ikke betragtet den anden vej, men problemstilling og løsning er de samme. Og nu, selvom det måske ikke er helt klart, er vi faktisk meget tæt på målet.

## Den Store Finale

Lad os opsummere: Vi kan bevæge os fra $X_\tau$ til $X_\upsilon$ i trin bestående af konjugation, symbolekspansion og omvendt symbolekspansion. Og hvert af disse trin kan foretages med vilkårligt lille tab af power hvis vi betragter perioder som er tilstrækkeligt lange. Men hvis vi nu starter med en tilfældig periode i $X_\tau$ er den jo ikke nødvendigvis lang, den kan såmænd være ganske kort? Dette løses ved at anvende $\tau$ på den, dette giver en ny periode med samme power men otte gange den oprindelige længde. Vi kan naturligvis gentage dette indtil den ønskede længde er nået. Men hvad så når vi har krydset et par trin, kan vi ikke risikere at forkorte perioderne undervejs, i de mellemliggende skiftrum er der jo ikke nogen substitution som vi kan forlænge med? Dette løser vi ved at observere, at vi under alle tre former for trin ikke alene kan opnå nye perioder med vilkårligt lille tab af power men *også* med vilkårlig stor længde når blot vi vælger den oprindelige periode tilstrækkeligt lang. Det er ikke svært at se, vi undlod at diskutere det ovenfor for ikke at forplumre argumentationen. Så vi har vist – eller i hvert fald argumenteret for – at hvis vi tager en hvilken som helst periode i $X_\tau$ så kan vi bygge en periode i $X_\upsilon$ med vilkårligt lille tab af power. Og så er postulatet faktisk vist, for vi kan naturligvis flytte perioder den anden vej også.

Og så er vi hjemme. Eller er vi nu også det – for hvad var målet egentlig? Det var jo at vise $X_\tau$ og $X_\upsilon$ ikke strømningsækvivalente. Og hvad har vi vist? Ja vi har vist at *hvis* de faktisk er det, ja, så har vi $\mathrm{MP}(\tau) = \mathrm{MP}(\upsilon)$. Og hvad så? Ja, så håber vi godtnok meget på at sidstnævnte lighed ikke holder. Men hvad er så $\mathrm{MP}(\tau)$ og $\mathrm{MP}(\upsilon)$? Se det er spørgsmålet, for jeg ved stadig ikke hvordan man beregner disse eksakt. Men trylle kan vi jo altid, så jeg gav min computer nogle timer til at finde alle de perioder den kunne, og disse udregninger indikerer – bemærk den bevidst forsigtige sprogbrug – at vi har

$$\mathrm{MP}(\tau) \simeq 2,69 \quad \text{og} \quad \mathrm{MP}(\upsilon) \simeq 2,58.$$

Disse indikationer er dog tilstrækkeligt præcise til at jeg godt tør vædde en stor is på at de to værdier faktisk er forskellige. Og så har vi faktisk nået vores mål. Afslutnigsvis vil jeg udlodde to yderligere store is for bestemmelse af de eksakte værdier af $\mathrm{MP}(\tau)$ og $\mathrm{MP}(\upsilon)$.