

Mullineux-afbildningen og Mullineux's formodning

Rikke Eie

Jeg vil her præsentere Mullineux-afbildningen, som er en bijektiv afbildning på mængden af p -regulære partitioner. Afbildningen bruges i repræsentationsteorien for de symmetriske grupper S_n , og kan ses som en p -analog til den almindelige transponering af partitioner.

Lad os starte med at forstå motivationen for at definere denne afbildning. En **repræsentation** over legemet K af en endelig gruppe G , er en homomorfi

$$T : G \longrightarrow GL(n, K)$$

fra gruppen G ind i gruppen af invertible $n \times n$ matricer med koefficienter fra legemet K . T kaldes en K -repræsentation af G af dimension (eller grad) n .

Karakteren χ_T for repræsentationen T er en afbildning $\chi_T : G \rightarrow K$. For eksempel har vi, når K har karakteristisk 0, at χ_T er givet ved $\chi_T(g) = \text{tr}(T(g))$.

Vi vil her se nærmere på repræsentationer af S_n , og i første omgang arbejde over et legeme K med karakteristisk 0. I dette tilfælde gælder der:

Antallet af ikke-ækvivalente, irreducible K -repræsentationer af G er lig antallet af konjugationsklasser for G .

K -repræsentationerne af G er, op til isomorfi, entydigt bestemt ved deres karakter.

Sammen med en række andre egenskaber gør dette, at vi her kan nøjes med at betragte de irreducible karakterer, dvs. karaktererne for hver ækvivalensklasse af irreducible repræsentationer.

Allerede tidligt i repræsentationsteoriens historie blev karaktererne for de symmetriske grupper beregnet af Frobenius, og det viste sig, at partitioner var et godt kombinatorisk værktøj at benytte sig af.

En **partition** λ af $n \in \mathbb{N}$ er en sekvens af tal $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$, kaldet λ 's dele, for hvilke der gælder $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_r$ og $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$. Vi skriver

$$\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_r).$$

For den symmetriske gruppe S_n har vi således, når K har karakteristisk 0, at antallet af irreducible karakterer er lig antallet af partitioner af n , da konjugationsklasserne for S_n er bestemt ved cykeltyperne, og da disse oplagt svarer til partitioner af n (jf. Mat 2AL).

Et resultat af Frobenius siger nu, at man på en *naturlig* måde kan indeksere de irreducible karakterer for S_n ved hjælp af partitionerne. Vi lader derfor $[\lambda]$ betegne den irreducible karakter der indekseres med partitionen λ .

Med denne "naturlige" indeksering gives karaktererne for repræsentationerne $\mathbb{1} : S_n \rightarrow GL(1, \mathbb{Q})$ givet ved $\sigma \mapsto 1$ og $\text{sgn} : S_n \rightarrow GL(1, \mathbb{Q})$ givet ved $\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$ henholdsvis indeksene (n) og (1^n) (partitionen med n dele af længde 1), og vi skriver

$$\mathbb{1} = [n] \quad \text{og} \quad \text{sgn} = [1^n].$$

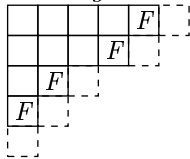
For nemt at kunne udregne karaktererne for repræsentationerne, har det vist sig nyttigt at se på en partition grafisk, i det der kaldes et Young-diagram. Givet en partition $\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_r)$, da er **Young-diagrammet** for λ , $\mathcal{Y}(\lambda)$, defineret som mængden

$$\mathcal{Y}(\lambda) = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq l_i\}.$$

Young-diagrammet illustreres i et diagram med r rækker, hvor række i indeholder l_i bokse. Den j 'te boks i den i 'te række kaldes den (i, j) 'te boks.

En boks $A \in \mathcal{Y}(\lambda)$ er en **F-boks** (fjernelig boks), hvis $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus A$ er et Young-diagram for en partition af $n - 1$, og en boks B er en **T-boks** (tilføjelig boks) hvis $\mathcal{Y}(\lambda) \cup B$ er et Young-diagram for en partition af $n + 1$.

Eksempel 1. Partition $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ kan illustreres ved nedenstående Young-diagram. F-bokse er markeret med et F og T-bokse er optegnet med stiplede linier.

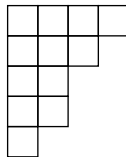


Lad partitionen $\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_r)$ være givet. Denne kan ved **transponering** sendes over i en anden partition, λ^T , kaldet den transponerede til λ . λ^T er partitionen

$$\lambda^T = (n_1, n_2, \dots, n_{l_1}),$$

hvor n_i er antallet af dele i λ med længden i eller mere.

Eksempel 2. For partition $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ er $\lambda^T = (4, 3, 2^2, 1)$. λ^T er illustreret i nedenstående Young-diagram.



Transponering er altså grafisk set en spejling i diagonalen. Dette gælder altid.

Naturligheden af Frobenius' indeksering ses blandt andet, da vi får følgende rekursive metode til at udregne de irreducible karakterer for S_n , ved hjælp af de irreducible karakterer for S_{n-1} :

Forgreningssegenskaben: Lad $[\lambda]$ være en irreducibel karakter for S_n . Da er

$$[\lambda] \Big|_{S_{n-1}} = \sum_{F\text{-boks } A \in \lambda} [\lambda \setminus A].$$

Desuden får vi, at tensorering med fortegnrepræsentationen har følgende enkle effekt på karakteren:

Tensorering med sgn:

Lad $[\lambda]$ være en irreducibel karakter for S_n . Da er

$$[\lambda] \otimes \text{sgn} = [\lambda^T].$$

Lad os nu se nærmere på hvad der tilsvarende sker, når K har primtalskarakteristik p . Også i dette tilfælde er der en række egenskaber for repræsentationerne, der gør, at vi kan nøjes med at se på de irreducible karakterer. En af egenskaberne er:

Antallet af irreducible karakterer er lig antallet af p -regulære konjugationsklasser for G , altså de konjugationsklasser af G , hvor elementernes orden *ikke* er delelig med p .

For S_n har vi altså, at antallet af irreducible karakterer er lig antallet af p -regulære konjugationsklasser for S_n , som igen er lig antallet af partitioner af n , hvor ingen del er delelig med p . Ifølge et resultat af Glaisher er dette lig antallet af p -regulære partitioner.

Her kaldes en partition **p -regulær**, hvis den ikke indeholder p eller flere dele af samme længde.

Vi kan altså, når K har primtalskarakteristik p , indeksere de irreducible karakterer for S_n med p -regulære partitioner af n , og det interessante er nu, om dette kan gøres på en ligeså "naturlig" måde som i tilfældet fra før.

Lad igen $[\lambda]$ betegne den irreducible karakter der indekseres med den p -regulære partition λ . Da viser det sig, at vi kan indekseres således at der gælder:

En p -analog til forgreningssegenskaben:

Lad $[\lambda]$ være en irreducibel karakter for S_n . Da gælder

$$[\lambda] \Big|_{S_{n-1}} \supseteq \sum_A [\lambda \setminus A],$$

hvor der summeres over alle gode bokse, A , i λ . En god boks er en speciel F -boks med nogen ekstra egenskaber, som vi kommer nærmere ind på senere.

Tensorering med sgn:

Lad $[\lambda]$ være en irreducibel karakter for S_n . Da er

$$[\lambda] \otimes \text{sgn} = [\lambda^P],$$

hvor λ^P angiver en anden p -regulær partition.

Det store spørgsmål er nu, hvad sammenhængen mellem λ og λ^P er.

Det er tydeligt, at afbildningen $\lambda \rightarrow \lambda^P$ ikke er lig afbildningen $\lambda \rightarrow \lambda^T$, da der for en p -regulær partition λ ikke nødvendigvis gælder, at λ^T er p -regulær. For eksempel har vi, at $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ fra Eksempel 1 er 2-regulær, mens λ^T ikke er 2-regulær.

Først i 1979, da Mullineux definerede det vi idag kalder Mullineux-afbildningen $\lambda \mapsto \lambda^M$, fik man en ide om sammenhængen mellem λ og λ^P . Han fremsatte nemlig samtidig en formodning om, at Mullineux-afbildningen $\lambda \mapsto \lambda^M$ faktisk var lig afbildningen $\lambda \mapsto \lambda^P$. Denne formodning viste sig at være rigtig, og det er derfor, at vi betragter Mullineux-afbildningen som en (temmelig kompliceret) form for p -analog til transponering.

Mullineux's formodning viste sig dog at være en svær påstand at bevise, og det lykkedes først i 1995 for Kleschev og Ford, efter at Kleschev havde vist, at Mullineux's formodning kunne reduceres til følgende kombinatoriske resultat:

Sætning 3. *Lad den p -regulære partition λ have en god boks A af restklassen i . Da har den Mullineux-konjugerede, λ^M en god boks B af restklassen $-i$, og der gælder:*

$$(\lambda \setminus A)^M = \lambda^M \setminus B.$$

Det skal bemærkes, at p i denne sætning ikke behøver at være et primtal, da resultatet som sagt er rent kombinatorisk. I det efterfølgende har vi derfor $p \in \mathbb{N}$, hvis ikke andet er nævnt.

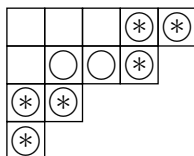
For at kunne definere Mullineux-afbildningen og forstå Sætning 3 har vi brug for en masse definitioner, så lad os starte fra en ende af.

For en partition λ er **randen** defineret som mængden af bokse $(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)$, for hvilke der gælder $(i + 1, j + 1) \notin \mathcal{Y}(\lambda)$.

En delmængde af randen kaldes **p -randen**. Denne delmængde består af et antal segmenter af længde p , og/eller et enkelt segment af en mindre længde. Det korte segment opstår, hvis der ikke er nok bokse tilbage på randen til at danne et helt p -segment. Det første segment indeholder de første p bokse på randen startende med boks $(1, l_1)$. Antag at det forrige segment slutter i række r , da starter det næste segment i række $r + 1$ med boks $(r + 1, l_{r+1})$ og indeholder de næste p bokse på randen. Sådan fortsættes der, indtil randen ikke er længere.

For en partition λ lader vi $e(\lambda)$ betegne længden af p -randen, og $I(\lambda)$ betegne den partition der fremkommer når p -randen fjernes fra λ .

Eksempel 4. *For den 3-regulære partition $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ er randen angivet med \circ og 3-randen angivet med $*$ i nedenstående Young-diagram.*



For $p = 3$ er altså $e(\lambda) = 6$ og $I(\lambda) = (3^2)$.

For en boks $A = (i, j)$ i et Young-diagram for en partition λ er **p -restklassen** defineret som restklassen af $j - i$ modulo p . Et **p -restklassediagram** for en partition λ fås ved at skrive p -restklassen for hver boks ind i Young-diagrammet for λ .

Eksempel 5. Partitionen $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ har følgende 3-restklassediagram, hvor et tal med fodtegnet T eller F indikerer, at den pågældende boks er henholdsvis en T -boks eller en F -boks.

0	1	2	0	1 _F	2_T
2	0	1	2 _F	0_T	
1	2 _F	0_T			
0 _F	1 _T				
	2_T				

Jeg vil nu introducere generelle p -signaturfølger, da den, efter min mening, mest overskuelige definition af en god boks for en partition λ benytter sig af boksfølgen, som er en p -signaturfølge.

En **p -signatur** er et par $c\varepsilon$, hvor c er en restklasse modulo p og ε er et fortegn. En følge $X : c_1\varepsilon_1 c_2\varepsilon_2 \dots c_t\varepsilon_t$ af p -signaturer kaldes en **p -signaturfølge**.

Givet en p -signaturfølge $X : c_1\varepsilon_1 c_2\varepsilon_2 \dots c_t\varepsilon_t$, da definerer vi for $0 \leq i \leq p-1$ og $1 \leq j \leq t$

$$\sigma(i, j) = \sum_{k \leq j, c_k = i} \varepsilon_k$$

hvor hvert plus i summen sættes lig $+1$, hvert minus sættes lig -1 og den tomme sum sættes lig 0 .

For en restklasse i modulo p defineres den i 'te **peakværdi** $\pi_i(X)$ for p -signaturfølgen $X : c_1\varepsilon_1 c_2\varepsilon_2 \dots c_t\varepsilon_t$, som

$$\pi_i(X) = \max\{0, \sigma(i, j) \mid 1 \leq j \leq t\},$$

og den i 'te **slutværdi** $\omega_i(X)$ for X , defineres som

$$\omega_i(X) = \sigma(i, t).$$

En restklasse i modulo p kaldes en **god restklasse** for p -signaturfølgen X hvis $\pi_i(X) > 0$, og for $k = \min\{j \mid \sigma(i, j) = \pi_i(X) > 0\}$ kalder vi restklassen c_k **i -god** for X . Vi kalder desuden restklassen c_j , $j \leq t$, **i -normal** for X , hvis c_j er i -god for delfølgen $c_1\varepsilon_1 \dots c_j\varepsilon_j$ af X .

Eksempel 6. Lad 4-signaturfølgen X være givet ved

$$X : 2+ 3- 1+ 2- 1+ 0+ 3+ 1- 2+ 2- 1+ 0- 3- 0+ 0+ 2- 3- 1+ 0- 3+ .$$

Ved udregning af $\sigma(i, j)$ for $i \in \{0, \dots, 3\}$ og $j \in \{1, \dots, 20\}$, ses det, at vi har

$$\pi_0(X) = 2, \quad \pi_1(X) = 3, \quad \pi_2(X) = 1 \quad \text{og} \quad \pi_3(X) = 0$$

og
$$\omega_0(X) = 1, \quad \omega_1(X) = 3, \quad \omega_2(X) = -1 \quad \text{og} \quad \omega_3(X) = -1.$$

Restklasserne 0, 1 og 2 er altså gode restklasser for X . Desuden ser vi at

$$\begin{array}{ll} c_6 \text{ og } c_{15} \text{ er } 0\text{-normale} & c_{15} \text{ er } 0\text{-god} \\ c_3, c_5 \text{ og } c_{18} \text{ er } 1\text{-normale} & c_{18} \text{ er } 1\text{-god} \\ c_1 \text{ er } 2\text{-normal} & c_1 \text{ er } 2\text{-god.} \end{array}$$

Boksfølgen $N(\lambda)$ for en partition λ består af restklasserne for T-boksene og F-boksene i restklassediagrammet for den pågældende partition, læst fra øverst til højre mod venstre og nedad. T-bokse indgår med fortegnet $-$, og F-bokse indgår med fortegnet $+$. En boksfølge er således altid alternerende.

En F-boks med restklassen i i restklassediagrammet for partitionen λ , er en **god boks**, hvis den tilsvarende signatur i boksfølgen $N(\lambda)$ er i -god.

Eksempel 7. Boksfølgen for partitionen λ fra Eksempel 5 er

$$N(\lambda) : 2- 1+ 0- 2+ 0- 2+ 1- 0+ 2- .$$

Ved for $i \in \{0, \dots, 2\}$ og $j \in \{1, \dots, 9\}$ at udregne $\sigma(i, j)$ og peakværdierne ses det, at 1 og 2 er gode restklasser for $N(\lambda)$. Det ses også, at c_2 er 1-normal og 1-god, samt at c_6 er 2-normal og 2-god. Vi har altså, at boksene $(1, 5)$ og $(3, 2)$ i Young-diagrammet for λ er gode bokse.

Lad nu λ være en p -regulær partition og betragt følgen af partitioner $\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha+1}$ givet ved:

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = I(\lambda_1), \dots, \lambda_{i+1} = I(\lambda_i), \dots, \lambda_{\alpha+1} = I(\lambda_\alpha) = \emptyset.$$

Da er **Mullineux-symbolet** for λ defineret som

$$G_p(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_\alpha \\ r_1 & r_2 & \dots & r_\alpha \end{pmatrix},$$

hvor $a_i = e(\lambda_i)$ dvs. længden af p -randen for λ_i og r_i er antallet af dele i λ_i .

Da p -randen for en partition er entydig, har vi, at Mullineux-symbolet for en partition er entydigt bestemt. Omvendt har vi også, at de to følger (a_1, \dots, a_α) og (r_1, \dots, r_α) entydigt bestemmer λ , da der kun findes én måde, hvorpå man kan tilføje hver af de α p -rande til den foregående partition. Det er således muligt at gendanne en partition ud fra dens Mullineux-symbol.

Vi har desuden, at hver af λ_i 'erne er p -regulære, da λ p -regulær medfører at $I(\lambda)$ er p -regulær osv.

Følgende sætning giver nogle betingelser som skal være opfyldt, for at der findes en p -regulær partition λ , som opfylder $I(\lambda) = \lambda'$.

Sætning 8. Antag at λ' er en p -regulær partition med r' dele og $e(\lambda') = a'$. Så findes der en p -regulær partition λ med r dele, $e(\lambda) = a$ og $I(\lambda) = \lambda'$ hvis og kun hvis følgende betingelser alle er opfyldt:

- i) $0 \leq r - r' \leq p$.
- ii) For $m = a' + r - r' + \varepsilon'$ gælder $m \leq a < m + p$, hvor $\varepsilon' = 0$ hvis $p \mid a'$ og 1 ellers.
- iii) Hvis $r = r'$ så gælder $p \mid a$.
- iv) Hvis $r - r' = p$ så gælder $p \nmid a$.

Dette giver nogle restriktioner på indgangene i Mullineux-symbolet, hvorfor to tilfældige følger (a_1, \dots, a_α) og (r_1, \dots, r_α) ikke nødvendigvis bestemmer en p -regulær partition.

Har vi til gengæld to følger (a_1, \dots, a_α) og (r_1, \dots, r_α) som overholder restriktionerne, så siger sætningen os, at der findes en partition λ med Mullineux-symbol $G_p(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_\alpha \\ r_1 & r_2 & \dots & r_\alpha \end{pmatrix}$.

Vi er nu langt om længe klar til at beskrive Mullineux-afbildningen.

Lad λ være en p -regulær partition med Mullineux-symbol $G_p(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_\alpha \\ r_1 & r_2 & \dots & r_\alpha \end{pmatrix}$ og lad følgen (s_1, \dots, s_α) være givet ved

$$s_i = a_i - r_i + \varepsilon_i,$$

hvor $\varepsilon_i = 0$ hvis $p \mid a_i$ og $\varepsilon_i = 1$ ellers. Da gælder:

Sætning 9. Følgerne (a_1, \dots, a_α) og (s_1, \dots, s_α) givet ovenfor, bestemmer entydigt en følge af p -regulære partitioner λ'_i for $i = 1, 2, \dots, \alpha$, således at hver λ'_i har s_i dele, $e(\lambda'_i) = a_i$ og $I(\lambda'_i) = \lambda'_{i+1}$.

Dette vises ved at vise, at betingelserne i)-iv) fra Sætning 8 er opfyldt.

Med oventående notation defineres **Mullineux-afbildningen**, som den afbildning der sender den p -regulære partition λ med Mullineux-symbol

$$G_p(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_\alpha \\ r_1 & r_2 & \dots & r_\alpha \end{pmatrix}$$

over i den entydigt bestemte partition, λ^M ($= \lambda'_1$ fra sætning 9), med Mullineux-symbol

$$G_p(\lambda^M) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_\alpha \\ s_1 & s_2 & \dots & s_\alpha \end{pmatrix}.$$

Vi kalder λ^M for den **Mullineux-konjugerede** til λ .

Eksempler på Mullineux-afbildningen og Sætning 3

Lad os igen betragte partitionen $\lambda = (5, 4, 2, 1)$. Denne partition er specielt 3-regulær, hvorfor vi kan sætte $p = 3$. I nedenstående Young-diagram er hver af 3-randene for partitionerne $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = I(\lambda_1)$ og $\lambda_3 = I(\lambda_2)$ angivet med et i svarende til den partition den tilhører.

3	3	2	1	1
3	2	2	1	
1	1			
1				

Vi ser altså, at Mullineux-symbolet for λ er $G_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, og finder heraf at Mullineux-symbolet for λ^M er $G_3(\lambda^M) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vi kan nu opbygge λ^M ved at tilføje de tre 3-rande:

3	3	3	2	2	2	1	1	1
1	1	1						

og finder således $\lambda^M = (9, 3)$.

Fra Eksempel 7 ved vi, at λ har to gode bokse, nemlig boks $(1, 5)$ med restklassen 1 og boks $(3, 2)$ med restklassen 2. Vi vil nu finde de tilsvarende gode bokse for λ^M .

Lad $A = (3, 2) \in \mathcal{Y}(\lambda)$. Vi skal nu finde $(\lambda \setminus A)^M$. Dertil finder vi først Mullineux-symbolet for $\lambda \setminus A$:

3	3	2	1	1
3	2	2	1	
1				
1				

dvs. vi har $G_3(\lambda \setminus A) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Heraf finder vi $G_3((\lambda \setminus A)^M) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hvilket giver os

3	3	2	2	2	1	1	1	1
1	1							

Vi har altså $(\lambda \setminus A)^M = (9, 2)$.

Det viser sig altså, at fjernelsen af den gode boks A fra λ og derefter Mullineux-konjugering, svarer til først at Mullineux-konjugere og derefter fjerne boks $(2, 3)$ fra λ^M . Da A er en god boks med restklassen 2, giver Sætning 3, at boks $(2, 3)$ er en god boks for λ^M med restklasse $-2 = 1$. At dette rent faktisk er tilfældet, konstateres nemt ved hjælp af Boksfølgen for λ^M .

På samme måde kan vi se, at der gælder

$$(\lambda \setminus \text{boks } (1, 5))^M = \lambda^M \setminus \text{boks } (1, 9).$$

Vi har altså nu defineret Mullineux-afbildningen $\lambda \rightarrow \lambda^M$, og set hvordan den

virker på partitionen $\lambda = (5, 4, 2, 1)$. Desuden har vi benyttet Sætning 3, til at se hvordan gode bokse i λ hænger sammen med gode bokse i λ^M .

Litteraturliste

- [1] C. Bessenrodt: *Representations of the symmetric groups*. In: Proceedings 8. General EWM Meeting at the International Centre for Theoretical Physics, Trieste/Italy 1997 (1999), 123-134. Eds.: Laura Fainsilber, Catherine Hobbs, Hindawi Publ. Corp.
- [2] C. Bessenrodt and J.B. Olsson: *On Mullineux symbols*. J. Comb. Theory (A) 68 (1994), 340-360.
- [3] C. Bessenrodt and J.B. Olsson: *On residue symbols and the Mullineux conjecture*. J. Algebraic Comb. 7 (1998), 227-251.
- [4] G. Mullineux: *Bijections of p -regular partitions and p -modular irreducibles of the symmetric groups*. J. London Math. Soc. 20(2) (1979), 60-66.
- [5] J.B. Olsson: *Noter fra faget Kombinatorik og Repræsentationsteori*. MA (2004).