Side 9-sætning

Sara Arklint

Inden for algebra kaldes et element r i en ring for nilpotent såfremt der findes et $n \in \mathbb{N}$ så $r^n = 0$. Vi bemærker straks at 0 altid vil være nilpotent. Betragt nu en surjektiv ringhomomorfi $\varphi\colon R_1 \to R_2$ og et nilpotent element $r_2 \in R_2$. Findes der da et nilpotent element $r_1 \in R_1$ så $\varphi(r_1) = r_2$, dvs. kan vi løfte nilpotente elementer? Læseren opfordres til at finde på modeksempler. Den dovne læser må nøjes med mit kedelige modeksempel som er kvotientafbildningen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/512$.

Der gælder dog følgende sætning:

Side 9-sætningen. *Lad $\mathscr{A}$ og $\mathscr{B}$ være C^*-algebraer, og antag at vi har en surjektiv $*$-homomorfi $\varphi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Hvis $b \in \mathscr{B}$ opfylder at $b^n = 0$, da findes et $a \in \mathscr{A}$ så $\varphi(a) = b$ og $a^n = 0$.*

Beviset er lige så langt som det er teknisk, så jeg nøjes med at henvise til Catherine L. Olsen og Gert K. Pedersens artikel *Corona C^*-algebras and their applications to lifting problems.*[1] Jeg vil hellere fokusere på de indgående begreber.

Vi ved jo alle hvad en C^*-algebra er: et normeret vektorrum der desuden er en ring og udstyret med en involution $*$ således at samtlige algebraiske strukturer opfører sig pænt i forhold til hinanden og normen. Og en $*$-homomorfi er så en lineær ringhomomorfi som også samarbejder med involutionen $*$.

Hvad der forstås ved 'pænt', kan udtrykkes i omtrent sytten ligninger. Jeg vil dog hellere give eksempler på C^*-algebraer, og lad mig som det første nævne de komplekse tal $\mathbb{C}$. Læseren opfordres til at overveje eksemplet.

De komplekse tal er et særtilfælde af to mere generelle eksempler som også skal nævnes: algebraen $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ af $n \times n$-matricer over de komplekse tal $\mathbb{C}$, og algebraen $C(X)$ af kontinuerte funktioner fra et kompakt hausdorffrum X til de komplekse tal $\mathbb{C}$. Operationerne i $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ er de oplagte, og involutionen $*$ er givet ved kompleks konjugering af indgangene og dernæst transponering. I $C(X)$ er alle operationer blot de punktvise—fx definerer vi $f+g$ ved $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$—og normen er supremumsnormen $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$.

Et godt og meget tilgængeligt eksempel på en C^*-algebra er $C([0,1])$. I denne situation er det dog et meget dårligt eksempel da denne C^*-algebra kun har ét nilpotent element. Den opmærksomme læser kan ved op til flere fremgangsmåder overbevise sig om dette. Der findes dog ikke-kommutative C^*-algebraer med betydeligt flere nilpotente elementer, så Side 9-sætningen handler bestemt ikke kun om at man kan løfte elementet 0.

[1] Math. Scand. 64 (1989), no. 1, 63–86.