FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
20. årgang, nr. 1, november 2006

Grigori Perelman blev tildelt en Fieldsmedalje i år, men han nægtede at modtage den. Læs mere på side 3.

Velkommen

Redaktionen

Velkommen til et nyt og bedre FAMØS. Vi tager nu hul på årgang nummer 20, og der er sket en del siden sidste nummer:

- vi har forynget redaktionen,
- vi har forbedret typografien,
- vi har forbedret hjemmesiden,
- og Demokraterne har ved midtvejsvalget i USA fået flertal i begge kamre i Kongressen.

Men dermed er det selvfølgelig ikke sagt at det hele ikke kan blive meget bedre endnu!

Som noget nyt finder du nu indholdsfortegnelsen på bagsiden hvor den er mere tilgængelig. I dette nummer finder du udover artiklen om balladen om Perelman en beretning fra en af årets rusture på vers, en krydsogtværs samt en formidlende artikel om matroider.

Det er ikke med vores gode vilje at der ikke er en side 9-sætning i dette nummer, men vi kunne ikke lige komme på en god en. Hvis du har en god ide til en side 9-sætning er du selvfølgelig meget velkommen til at kontakte os. Vi modtager i det hele taget nyt materiale med kyshånd.

Vi har desuden heller ikke nogen ny opgave idet vi ikke har fået tilfredsstillende svar på Mikkel Abrahamsens opgave fra sidste nummer:

> Definér et indre hul i en LEGO-bygning til at være et område der ikke indeholder nogen klodser og som er helt afgrænset af klodser. Opgaven lyder nu: Bestem det mindste antal 2×4-LEGO-klodser med hvilket man kan bygge en bygning med tre indre huller.

Vi udlover stadig en præmie for en god besvarelse.

Poincarés formodning

– Perelmans bevis og det efterfølgende cirkus

Morten Jacob Nesgaard og Julian Tosev

Det er ikke hver dag, at en matematisk formodning kommer i nyhederne, men det er lige præcis, hvad der er sket. Nyhedsbureauer som *The New Yorker, TV2* og *Politiken* har for nylig vist stor interesse i en sær russer. Sensationen, som har fanget nyhedsbureauernes opmærksomhed er, at Grigori Perelman har løst Poincarés formodning.

Poincarés formodning blev stillet af Henri Poincaré i 1904 og lyder således: Enhver lukket, enkeltsammenhængende 3-mangfoldighed af endelig udstrækning er homeomorf med en kugleflade.

Formodningen går i alt sin enkelthed ud på følgende: Forestil dig, at du kommer ind i slutningen af en formningstime i 4. klasse, og alle eleverne har lavet nogle lerfigurer. En person har lavet en kaffekop med hank, en anden har lavet en pølse, en tredje en fingerring, en fjerde et askebæger osv. Betragt nu overfladen af disse lerfigurer, så vil pølsen kunne deformeres om til en bold ved blot at trykke enderne sammen. Hvorimod dette ikke er muligt for en fingerring, da der er hul i den (den er ikke enkelsammenhængende). Tilsvarende kan et askebæger deformeres om til en bold, men en kaffekop med hank kan ikke. På samme måde kan man betragte alle lerfigurerne i klassen og se om de med topologiske briller på kan deformeres om til en bold.

Formodningen, som er blevet verdenskendt, handler dog ikke om overfladen på en bold, som Stig Tøfting og Jesper Grønkjær render rundt og sparker til, men derimod en mere visuel-problematisk bold. Hvis vi ser på overfladen af en bold i 2 dimensioner, så svarer dette til cirklen med cirkelperiferi $x^2 + y^2 = r^2$. I tre dimensioner er vores kugleoverfladen givet ved $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Poincarés formodning omhandler overflader i en dimension højere, nemlig i fire dimensioner, hvor en kugleoverflade vil have ligning $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$. Denne kugleoverflade er selvfølgelig svær at tegne, da vi kun har 3 rum-dimensioner at gøre godt med. Ikke desto mindre er det netop kugleoverflade i fire dimensioner, som Poincarés formodning handler om. Gennem tiden har flere matematikere forsøgt at løse Poincarés formodning, bl.a. J. H. C. Whitehead, Bing, Haken, Moise, og Papakyriakopoulos (og her kræves grundig mundmotorisk træning for korrekt udtale!), men alle har de måtte sande, at det var for stor en mundfuld. På denne liste skal der desuden stå Poincaré selv, der kom med et ukorrekt bevis, som han dog selv senere fandt et modeksempel på.

Der blev hurtigt formuleret en generaliseret udgave af Poincarés formodning, som spørger om en deformeret bold i n dimensioner uden huller, set med topologiske briller på, stadig blot er en bold. For $n = 1$, som svarer til cirkelperiferien, har løsningen været kendt længe, for $n = 2$ fandt Henri Poincaré selv et bevis. For $n = 3$ har ingen, indtil nu, løst formodningen og netop denne formodning for $n = 3$, har stået ubesvaret i ca. 100 år. For $n = 4$ fandt Freedman en løsning i 1982, for hvilket han fik en Fieldsmedalje, som svarer til Nobelprisen inden for matematik. $n = 5$ blev løst i 1961 af Zeeman, $n = 6$ blev løst af Stallings i 1962, og for $n \geq 7$ fandt Smale en løsning i 1961. Smale udvidede senere sin løsning, så den gjaldt for $n \geq 5$. Smale modtog en Fields medalje for dette bevis. Det bemærkelsesværdige er, at for $n > 3$, har man kunnet finde et bevis, men lige præcis $n = 3$, har voldt utrolige mange problemer.

Poincarés formodning er en af Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts Millennium Prize Problems. The Millennium Prize Problems er 7 matematiske problemer, som blev stillet den 24. maj 2000, for at fejre matematik i det nye årtusinde. Clay Mathematics Institute tildeler \$1.000.000 til vedkommende, som løser en af The Millennium Prize Problems.

Nu tilbage til hovedpersonen: Grigori Perelman blev født i Leningrad (nu St. Petersborg) den 13. juni 1966 af jødiske forældre. Han startede sin tidlige matematiske uddannelse ved Leningrad Secondary School – en skole med særlig fokus på matematik og fysik. I 1982 stillede han op for USSR ved Matematik-OL. Her opnåede han den højeste score, man kunne få, og vandt en guldmedalje, bemærk at på dette tidspunkt var han kun 16 år gammel. I slutningen af 80'erne tog han sin Ph.D.-grad ved statsuniversitetet i Leningrad. Hans afhandling omhandlede sadelflader i det euklidiske rum. Herefter blev han ansat ved Steklov Institute of Mathematics i St. Petersborg. Indtil 1996 var han også løbende ansat ved forskellige universiteter i USA.

Før 2002 var Perelman bedst kendt for sit arbejde vedrørende „comparison theorems" i riemannsk geometri. Men efter november 2002 ændrede Perelmans liv sig radikalt. Han udgav den første elektroniske artikel af en serie af artikler på `arXiv.org`, hvori han ud fra amerikaneren Richard Hamiltons idé omkring „Ricci flow" i hovedtræk beviser Thurstons geometriske formodning, hvoraf Poincarés formodning kan udledes som et specielt tilfælde. Disse artikler skabte røre i det matematiske miljø; havde Perelman virkelig bevist Poincarés formodning? I april 2003 blev han inviteret til USA for at give en række forelæsninger om sit arbejde vedrørende formodningerne (bl.a. på Columbia University, Princeton University og Harvard University). Da han efterfølgende kommer tilbage til Rusland er berømtheden nok steget ham lidt til hoved, for han gider ikke længere svare på sine kollegiers emails.

I sommeren 2006 tager tingene fart

I maj 2006 udgiver Bruce Kleiner og John Lott, begge fra The University of Michigan, en artikel på `arXiv.org`, som indeholder de manglende detaljer i Perelmans bevis for Thurstons geometriske formodning.

I juni 2006 publicerer Asian Journal of Mathematic en artikel af Xi-Ping Zhu fra Sun Yat-sen University i Kina og Huai-Dong Cao fra Lehigh University i Pennsylvania. I artiklen angives et fuldstændigt bevis for Thurstons og Poincarés formodninger. Chefredaktøren for Asian Journal of Mathematic er den tidligere Fields Medal-modtager Shing-Tung Yau, som også er Caos doktorgradsvejleder. Denne dobbeltrolle har skabt en del rygter. Bl.a. at Yau har ønsket direkte eller indirekte at være forbundet til beviset for Poincarés formodning, og derfor har han presset sine redaktører til unaturligt hurtigt at have accepteret Zhus og Caos artikel.

I juli 2006 udgiver John Morgan fra Columbia University og Gang Tian fra Massachusetts Institute of Technology en artikel på `arXiv.org` med titlen „Ricci Flow and the Poincaré Conjecture." I artiklen giver de et detaljeret bevis for Poincarés formodning. Den 24. august 2006 holder Morgan en forelæsning ved ICM (International Congress of Mathematicians) i Madrid, omhandlende Poincarés formodning.

I maj 2006 beslutter en komite bestående af 9 personer, at Perelman skal modtage Fieldsmedaljen for sit arbejde vedrørende Poincarés formodning. Herefter besøger Sir John Ball, som er præsident for den internationale matematik sammenslutning, Perelman i håb om at kunne overtale ham til at modtage prisen. Efter to dage giver Ball op og rejser hjem. Perelman opsumerer deres konversation:[1]

> *„He proposed to me three alternatives: accept and come; accept and don't come, and we will send you the medal*

[1]De følgende citater er fra `http://en.wikipedia.org/wiki/Grigori_Perelman`.

> *later; third, I don't accept the prize. From the very beginning, I told him I have chosen the third one.“*

Videre fortæller Perelman at prisen

> *„was completely irrelevant for me. Everybody understood that if the proof is correct then no other recognition is needed.“*

Perelman har også afvist at modtage sin andel af the Millennium Prize på $1.000.000 fra Clay Mathematics Institute.

Perelman er i øjeblikket arbejdsløs, bor hos sin mor i St. Petersborg og ernærer sig af hendes pension. Hans venner har fortalt, at han i øjeblikket synes, at matematik er alt for smertefuldt et emne at diskutere. Videre er han meget skuffet over matematikeres etiske standart – specielt Yaus bestræbelser på at nedtone hans rolle i beviserne for formodningerne og i stedet fremhæve Caos og Zhus. Perelman har direkte sagt:

> *„I can't say I'm outraged. Other people do worse. Of course, there are many mathematicians who are more or less honest. But almost all of them are conformists. They are more or less honest, but they tolerate those who are not honest.“*

Han har også sagt:

> *„As long as I was not conspicuous, I had a choice. Either to make some ugly thing“* (a fuss about the mathematics community's lack of integrity) *„or, if I didn't do this kind of thing, to be treated as a pet. Now, when I become a very conspicuous person, I cannot stay a pet and say nothing. That is why I had to quit.“*

Perelman har garanteret været under en del pres, efter hans bevis er kommet ud til alle verdenshjørner. Alle medier har været efter ham for at få et interview med denne bemærkelsesværdig russer, som har løst Poincarés 100 år gamle formodning. Men at sige nej til Fieldsmedaljen, som er den største anerkendelse, man kan få inde for matematikken, og nej til $1.000.000 fra the Clay Institute virker ikke som noget, et normalt menneske vil gøre. Hvis man beder børn om at tegne et billede af en matematiker, som man har gjort i en række internationale undersøgelser, så får man typisk et billede af en distræt vildmand med skæg, briller og kittel. Perelman har åbenbart ikke været med til at ændre dette stereotype billede af matematikere, som lader til at være dominerende uden for det matematiske miljø. På den anden side, hvis man kan løse Poincarés formodning, så gør det måske ikke noget, at man er lidt aparte?

Rustursdigt

– Lyrisk fortælling fra en matematisk rustur

Jonas „Næbdyr“ Kyhnæb

Det var i august at russere engang,
begyndte at drikke dagen lang
og ej at forglemme – fælles sang.
Turen gik nemlig til Gotham City,
en lækker hytte med plads til øl i.

Vi delte os straks i to,
dem der var onde og dem der var go’,
for pludselig skulle man sove jo.
I køkkenet måtte vi lære at enes,
for her skulle alle forenes,
ifølge en plan om opvask og mad,
sørgede vi for at alle blev glad’.

Vejlederne underholdt med foredrag og lege,
hele tiden var de seje.
Natløbet onsdag er et godt eksempel,
for her sagde man pludselig farvel,
blev kørt væk i en bil
og så var man i gang,
konkurrencer i bedste stil
så man brød ud i sang.
Præmien var berygtede wonderkex,
så gode at man fik lyst til *mange* af dem.

Efter hjemkost fra natteløb,
lavede nogen en tour de køkkenet for pølser i svøb,
for man mente at man vel egentlig burde,
kunne tage hvad som helst og bare spurte.
Dog var øl og Sun Lolly de bedste bud,
som kom ned i halsen natten ud.

Næste dag præsenteredes nye lege
og russerne måtte igen stege.
Hvor velrutinerede vejledere viste snilde,
var vi vist virkelig vældig vilde.
Ølkroket var sløvt men morsomt,
tilskuere blev dog fulde lidt mere prompt'.

Så var der legen Alien,
kun for de bedste gentlemen,
her kunne ingen slå 202,
vi var vist ikke helt så go'.

Til ølvolley blokerede en åndssvag kvist,
som bare skulle væk bestemte Kris,
dog var han ikke alt for skrap,
grenen blev hængende,
for han var for slap.

Ølbowl og kongespil er også gentlemansport,
mens ølagurk er gentlemankort.
Inden dagens ølympiade,
skulle en vejleder ryge og bade,
et vejledermøde han beretter,
det er selvfølgelig vejleder Pedder.

Ved turens store aften med skuespil,
skulle selvklart øller til.
Aftenens vært var Spar Bonde,
med fjernbetjening styrede han det nogenlunde,
men da aftenen på et tidspunkt sku’ afrunde,
fik vi ham ikke til at bunde.

Senere blev Kira dækket i tusch,
med navne fra hver enkelt vejleder og rus,
dog ikke sovende Rasmus.

Fredag skulle være ugens fest,
dresscode for hver en gæst,
ikke til at sige hvem var bedst,
men konkurrencer skulle vise det næst.

Hytten oppyntet med guirlander,
med farver som rød, gul, blå og lilla,
man skulle tro at intet kunne være pæner’
– men ind ad døren træder Pernilla.

Skurke og helte ved bord for sig,
kongemiddagen var på vej.
Selv drinksene var lavet specielt til dagen,
med sjove navne var bare sagen.
Kørevagten gik til Lasse,
så vi andre kunne drikke en masse.

Festlige matematikersange blev hyppigt brugt,
de kunne jage enhver humanist på flugt,
måske på grund af „Dø, dø, dø“
som vi også synger på HCØ.
Andre sange vi måtte ha',
for eksempel den der med Mona.

Under maden skulle vi finde,
hvem af bordene skulle vinde?
Festkomitéen havde lavet konkurrencer,
for at se hvem havde de største kompetencer.

Limbo gjorde stillingen uafgjort,
så alle samledes nu om bordet.
Dette måtte afgøres straks,
heltene vandt i sten, papir, saks.

Musikken kørte hele natten,
Spar Bonde kørte rigtig med klatten,
da han skulle vise at man sagtens kan slå,
en vejrmølle uden bukser på.

Efter at have slået hovedet i gulvet,
så han at med ham var ikke heldet,
han lagde sig og sov på en madras,
for måske havde han drukket helt tilpas.

Folk var trætte men skulle jo hjælpe,
vise hvem der egentlig var helte.
Nogen sku' feje, skrubbe og skure,
toilettet var kun for dem der turde.

Bussen kom og vi skulle hjem,
men inden da kom manden frem,
én ville Lynet generobre,
ølspurten var langt fra ovre.

Men hjem kom vi og vi glæder os allerede,
til vejledere og russere igen vil lade,
øl og sprut i halsen glide,
endnu engang må alle slide,
for denne uge var alt for blæret,
og vi blev ekstra velernæret.

Husk at holde os ajour,
for alle skal med på follow-up rustur!

Krydsogtværs

Martin „Damskur“ Damhus

Vandret

1: Del af det menneskelige øjes optiske system
9: Tidligt styresystem, hvis navn forkorter „Disk Operating System“
12: Kong Minos-datter i græsk mytologi
13: Trille rundt med en metaltønde, der er halvt fyldt med brosten
15: Mas
16: Kunstnerisk lokation
18: By i kommune af samme navn i det kommende eks-Ringkøbing Amt
20: Materiale med suggestivt navn
22: Jordede
24: Udenlandsk forkortelse for time; HTML-tag, der kreerer en horisontal linie
25: Free-ware operativsystem bestående af kerne, biblioteker, programmer mm.; afrikansk dyr med hang til bissen
26: Afgørende test
28: Spillested
29: Forkortelse, der indgår i dampskibsnavne (og betyder „Steam ship“)
30: Titel (i fordansket/ forvansket udgave)
32: Sted, der peges på
33: Livsklog
36: Knap
38: Musiksymbol
40: Kahytsgulv
42: Klassificere
44: Latterliggøre
45: Fesen
47: Tordenindikator
50: Navn
52: Rødder
53: Kombination af to bogsta- ver fra det danske alfabet
55: Del ud
56: Dumdristig og lidt ligeglad med det hele
58: Ophavsekstern entitet, hvori fosterudvikling kan tilendebringes
59: Landekode for den aldeles ukendte ørepublik Saint Kitts & Nevis i de små Antiller; symbol for den kroatiske valuta kuna
60: Se bedre ud
61: Ganske vist
65: Navn for musikudgivelse på CD eller LP, hvis spilletid er længere end en singles, men

kortere end et typisk albums
66: Kategorier
67: Endvidere
69: Baseret på subjektiv vurdering
71: Oplagt fejlstavning af berømt designer-efternavn; Xerox ∗∗∗∗: Computer fra 70'erne (muligvis den første med virtuel desktop)
73: Persisk suffix med betydning „-hjem"; tropisk cyklon i 2005; engelsk navn
74: Steneri
76: Denne krydsords forfatters initialier; mendelevium (atomnr. 101)
77: Fødselssmerte-ejefald
78: Lydord, der tilkendegiver undren
79: Nem at løbe om hjørner med
81: Fra en ø i N-Europa
83: Livlig / fresh
85: Triatomiske molekyler, hvis tilstedeværelse i den øvre atmosfære bremser solens UV-stråling
86: Som eksisterer uden at være synlig

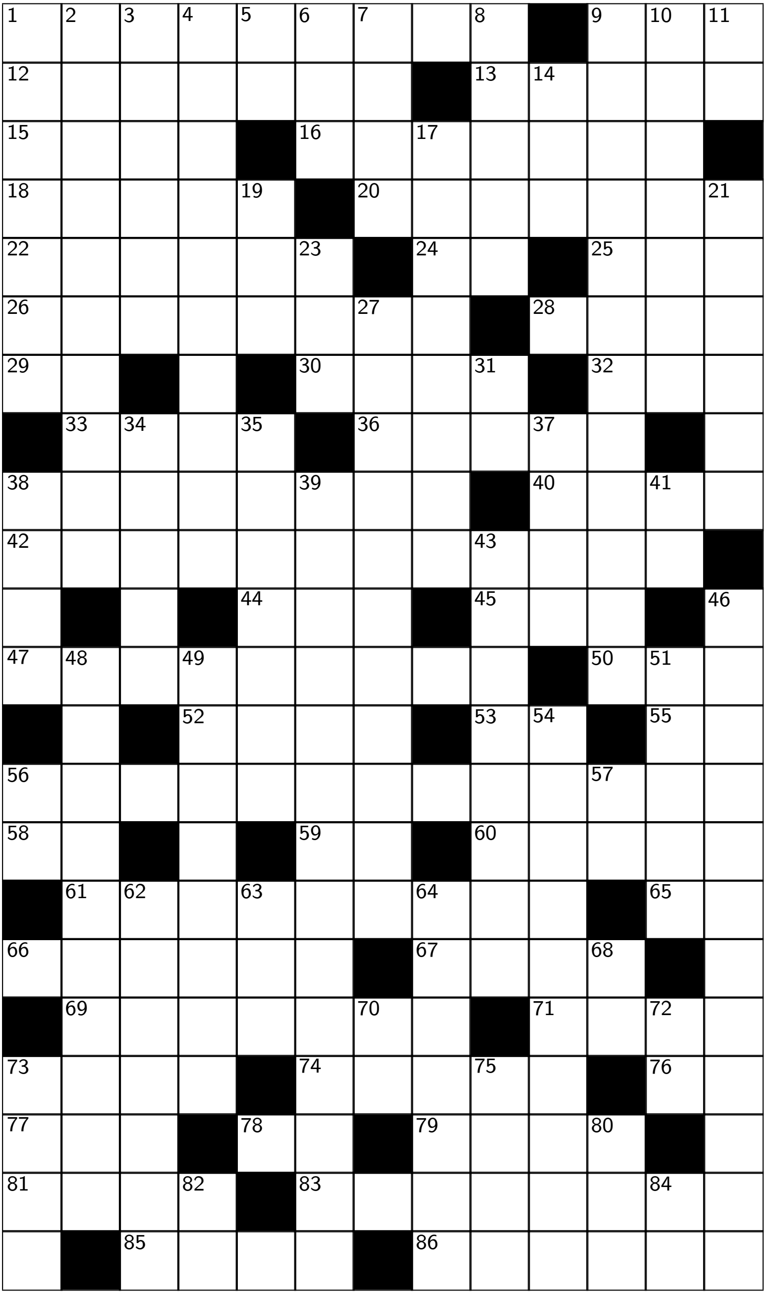
Lodret

1: Homo ∗∗∗∗∗∗∗: Fortidsmenneske og Homo Erectus-forgænger, hvis latinske navn betyder „talentfulde mand"
2: Horoskoplignende, delvist uforståelige udtalelser fremsat af synske medier
3: Navn
4: Snylter
5: ∗∗ Chi Minh: Kommunist og præsident af N-Vietnam 1955–1969
6: Pigenavn
7: Pigenavn
8: Logisk konnektiv
9: Barndomsønsker
10: Fange
11: Beskue
14: Fransk electronica-duo med albums som *Premiers Symptômes* og *Moon Safari*
17: Netværksteknologi
19: Velegnet forkortelse for den hyppigt forekommende frase „tiarmet druides rubinlager"
21: Vestafrikansk nomade
23: Det Europæiske Økonomi- ske Samarbejdsområde, en samlebetegnelse for EU-landene samt EFTA-landene Norge, Island og Lichtenstein
27: Gave
31: Antal (op til skalarmultiplikation) translationsinvari- ante venstre Haar-mål på en

forelagt topologisk gruppe
34: Landtange
35: Sejlende
37: Navn
38: Hovedstad
39: Tysk by i staten Nordrhein-Westfalen, hvori fodboldklubben FC Schalke 04 har til huse
41: Tone
43: Specialist i ords oprindelse
46: Torskerogn på dåse
48: Sunkent skib
49: Farve
51: Knappe op
54: Sørgeligt
57: Atomtegn for det super- tunge og ukendte darmstadtium, der aldrig er set, men enkelte atomer er blevet skabt ved at bombardere bly med nikkelisotoper i en stor ionaccelerator
62: Inddrivelse af skyldigt beløb
63: Farligt spinde-remedie (spørg selv søvnige eventyrprinsesser)
64: Bankord, betyder „pålydende"
68: Spise
70: Udbrud, fx erkendelses-
72: Trade Mark; landekode for Turkmenistan
73: Ballade
75: ∗∗∗∗ Croft: Tomb Raider-hovedperson
80: C'est la ∗∗∗: Fransk talemåde
82: Koncentrationslejr; Landekode for Kazakhstan
84: Atomtegn for tin (der jo hedder „stannum" på latin)

Kodeord

13 54 82 61 55 48 8 64
76 12 40 11 38 18 3 82 24 2 75 53 !


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
12 13 14
15 16 17
18 19 20 21
22 23 24 25
26 27 28
29 30 31 32
33 34 35 36 37
38 39 40 41
42 43
44 45 46
47 48 49 50 51
52 53 54 55
56 57
58 59 60
61 62 63 64 65
66 67 68
69 70 71 72
73 74 75 76
77 78 79 80
81 82 83 84
85 86

Matroider

Majbritt Felleki

Den amerikanske matematiker Hassler Whitney fandt i 1935 sammenhænge mellem sætninger i grafteori og sætninger i lineær algebra. Dette førte til definitionen af *matroider*, matematiske objekter som afspejler disse fælles egenskaber. Jeg stødte ind i matroider på Victoria University of Wellington, New Zealand, hvor jeg var takket være Rejselegat for matematikere. Teorien for matroider starter i den lette ende, også hvis man aldrig har studeret grafteori. Sidenhen skal man ikke lade sig narre, der kommer rigeligt at fundere over. Det er min intention at alle som har læst lineær algebra modsvarende Mat1GA skal kunne forstå denne sammenfatning.

Der findes en hel del ekvivalente definitioner af matroider. Den som følger her angiver en matroid ud fra de *uafhængige mængder*.

Definition 1 En matroid M er et par $(E, \mathcal{I})$ bestående af en endelig mængde E og en samling $\mathcal{I}$ af delmængder af E som opfylder betingelserne

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.
(I2) Hvis $I \in \mathcal{I}$ og $I' \subseteq I$, så er $I' \in \mathcal{I}$.
(I3) Hvis I_1 og I_2 er i $\mathcal{I}$, og $|I_1| < |I_2|$, så findes et element e i $I_2 - I_1$ så $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

Mængderne i $\mathcal{I}$ kaldes uafhængige mængder.

Her betyder $I_2 - I_1$ mængden af elementer som tilhører I_2 men som ikke tilhører I_1. Dette skrives iblandt $I_2 \setminus I_1$, men ikke her.

Matroider er som sagt inspirerede af vektorrum. Det er derfor oplagt at se om definitionen stemmer overens med definitionen af lineært uafhængige vektorer.

Sætning 2 *Lad $V = (m, \mathbb{F})$ være det m-dimensionelle vektorrum over legemet $\mathbb{F}$. Lad E være en endelig mængde af vektorer fra V. Lad $\mathcal{I}$ bestå af de mængder I af vektorer fra E som er lineært uafhængige. Så er $(E, \mathcal{I})$ en matroid.*

Inden beviset for sætningen er det tid for et eksempel. Lad vektorrummet bestå af par $m = 2$ over de reelle tal $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, altså $\mathbb{R}^2$, og lad E være vektorerne

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dette skrives lettere som $E = \{1, 2, 3, 4\}$ hvor tallene korresponderer til søjlerne i matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Med disse symboler for elementerne i E er mængderne af lineært uafhængige vektorer

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}.$$

Det er hurtigt klaret at tjekke (I1), (I2) og (I3) og overbevise sig om at $(E, \mathcal{I})$ er en matroid.

Bevis for sætningen. Det skal tjekkes at $\mathcal{I}$ opfylder (I1), (I2) og (I3), hvor (I1) og (I2) følger direkte. Tilbage er at se at $\mathcal{I}$ opfylder (I3). Lad I_1 og I_2 være to lineært uafhængige delmængder af E og antag at $|I_1| < |I_2|$. Lad W være underrummet udspændt af $I_1 \cup I_2$. Så er dimensionen af W mindst $|I_2|$. Hvis $I_1 \cup \{e\}$ er lineært afhængig for alle e i $I_2 - I_1$, er W indeholdt i underrummet udspændt af I_1, og så er

$$|I_2| \leq \dim W \leq |I_1| < |I_2|,$$

hvilket er en modstrid. Altså findes et e i $I_2 - I_1$ så $I_1 \cup \{e\}$ er lineært uafhængig. $\square$

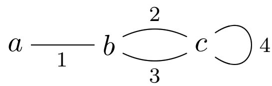
I grafteori findes ligesom i lineær algebra en form for uafhængighed. Denne uafhængighed beskrives her.

Definition 3 En *graf* G er et par (V, E) bestående af en ikke tom mængde V af knuder og en mængde E af kanter fra $\{\, \{u, v\} \mid u, v \in V \,\}$.

Et eksempel på en graf er

$$V = \{a, b, c\} \text{ og } E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, c\}, \{c, c\}\}.$$

Den er illustreret herunder med elementerne i E nummererede $\{1, 2, 3, 4\}$.



En *kreds* i en graf er en vej som starter og ender i samme knude og ikke passerer den samme knude to gange. I grafen oven findes altså to kredse. Nu defineres en *uafhængig del* til at være en del af en graf som ikke indeholder nogen kreds. Termen uafhængig del er det som på engelsk hedder *forest*. Jeg modtager gerne en mail med den korrekte danske oversættelse. Oversættelsen kan retfærdiggøres med at når der ikke findes nogen kreds, så er der højst en mulighed for at gå fra en knude til en anden.

Grafen i eksemplet omfatter de uafhængige dele

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}.$$

Det er ikke et tilfælde at denne samling har fået navnet $\mathcal{I}$, der er nemlig tale om en matroid $(E, \mathcal{I})$, og det er præcis den samme som i vektorrumseksemplet.

Sætning 4 *Lad $G = (V, E)$ være en graf. Lad $\mathcal{I}$ bestå af de delmængder I af E som er en uafhængig del i G. Så er $(E, \mathcal{I})$ en matroid.*

Beviset overspringes.

Grafer og mængder af vektorer giver ifølge sætningerne altid anledning til en matroid. Dette gælder ikke den anden vej rundt, det er let at finde en matroid som ikke kan illustreres som en graf på den måde det er beskrevet i sætningen.

Matroiden $M = (\{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{I})$, hvor

$$\mathcal{I} = \big\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \\ \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \big\}$$

er et eksempel på en sådan. To kanter skal danne en uafhængig del, men tre kanter skal danne en kreds. Derfor bliver den fjerde kant umulig at placere.

Hvis en matroid kan fås ud fra en mængde af vektorer over et givet legeme, siges det at den er *repræsenteret* over legemet. Det er muligt at finde en matroid som ikke kan fås ud fra en mængde af vektorer over noget som helst legeme, men også matroider som kun kan fås over visse legemer. Oftest ser man dog på det fra den anden side. Man forsøger at vise hvad som kræves for eksistensen af en repræsentation over et legeme. Blandt andet findes en sætning som siger at enhver matroid givet ved en graf kan repræsenteres over samtlige legemer, men den sætning er ikke specielt svær at vise. Derimod er der en del åbne problemer forbundet med netop repræsentationer over legemer, her iblandt Rota's formodning som vil blive beskrevet senere.

Først endnu to beskrivelser af matroider hvoraf den ene knytter sig til vektorrum mens den anden hænger stærkest sammen med grafer.

Definition 5 En *basis* for en matroid $(E, \mathcal{I})$ er en maksimal uafhængig delmængde af E. Samlingen af baser betegnes $\mathcal{B}$.

Definition 6 En *kreds* for en matroid $(E, \mathcal{I})$ er en minimal ikke-uafhængig delmængde af E. Samlingen af kredse betegnes $\mathcal{C}$.

I matroiden i eksemplerne er baserne $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$ og kredsene er $\mathcal{C} = \{\{2,3\},\{4\}\}$. Det ses at kredsene for matroiden modsvarer kredsene i grafen, og baserne korresponderer til vektorparrene

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\},\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

som er baser for $\mathbb{R}^2$.

Sætning 7 *En samling $\mathcal{B}$ er en samling af baser for en matroid hvis og kun hvis $\mathcal{B}$ opfylder*

(B1) *$\mathcal{B}$ er ikke tom.*

(B2) *Hvis B_1 og B_2 er i $\mathcal{B}$, og $x \in B_1 - B_2$, så findes et element $y \in B_2 - B_1$ så $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.*

Hvis $\mathcal{B}$ er en samling af baser, er $\mathcal{I}$ givet ved at $\mathcal{I}$ indeholder alle delmængder af mængder i $\mathcal{B}$.

Sætning 8 *En samling $\mathcal{C}$ er en samling af kredse for en matroid hvis og kun hvis $\mathcal{C}$ opfylder*

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C2) *Hvis C_1 og C_2 er i $\mathcal{C}$, og $C_1 \subseteq C_2$, så er $C_1 = C_2$.*

(C3) *Hvis C_1 og C_2 er to forskellige mængder i $\mathcal{C}$, og $e \in C_1 \cup C_2$, så findes C_3 i $\mathcal{C}$ så $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{e\}$.*

Hvis $\mathcal{C}$ er en samling af kredse, er $\mathcal{I}$ givet ved at $\mathcal{I}$ indeholder alle delmængder af E som ikke indeholder en mængde fra $\mathcal{C}$.

Beviserne overspringes.

Sætningerne er alternative definitioner af matroider, og der findes endnu flere definitioner. Disse er samlede på internetadressen `http://planetmath.org/encyclopedia/Matroid.html`. Det tager lidt tid men det er ikke en uoverskuelig opgave at vise at de alle er ækvivalente.

Tre operationer som kan udføres på matroider er dual-dannelse, kontrahering og sletning af et element. Alle tre er inspirerede af de tilsvarende operationer på grafer. En *plan graf* er en graf som kan tegnes uden at nogle kanter krydser hinanden. Den duale til en plan graf dannes ved at man sætter en knude på samtlige flader samt en udenfor grafen. Derefter tegnes linjer som krydser de oprindelige kanter og forbinder de nye knuder, en linje for hver kant. Dual-dannelse for grafer har nogle brister. En dual eksisterer ikke når grafen ikke kan tegnes plant, og desuden afhænger dualen af den givne tegning af grafen.

For matroider eksisterer den duale altid og den er givet som følger

Definition 9 Lad $\mathcal{B}$ være en samling af baser for en matroid $M = (E, \mathcal{I})$. Den duale matroid M^* er givet ved samlingen af baser

$$\mathcal{B}^* = \{\, E - B \mid B \in \mathcal{B} \,\}.$$

Det er ikke oplagt at $\mathcal{B}^*$ opfylder (B2), men det gør den. Trods bristerne i grafers dual-dannelse gælder sætningen

Sætning 10 *Hvis G^* er dualen af en plan graf G er*

$$M(G^*) = M^*(G).$$

Her betyder $M(G)$ matroiden genereret af G, og $M^*(G)$ betyder $(M(G))^*$. Lighedstegnet er i virkelighed en isomorfi, men isomorfier i matroide-verdenen betyder blot at bytte symboler på elementer.

Når et element e slettes fra en matroid $M = (E, \mathcal{I})$ fås matroiden $M \backslash e = (E - \{e\}, \mathcal{I}(M \backslash e))$, hvor

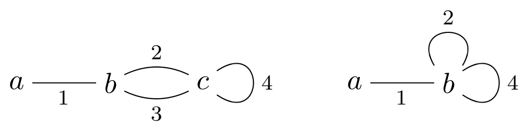
$$\mathcal{I}(M \backslash e) = \{\, I \subseteq (E - \{e\}) \mid I \in \mathcal{I} \,\}.$$

Operationen kontrahering med hensyn til et element e, som ikke er en kreds, er givet ved matroiden $M/e = (E - \{e\}, \mathcal{I}(M/e))$, hvor

$$\mathcal{I}(M/e) = \{\, I \subseteq (E - \{e\}) \mid I \cup \{e\} \in \mathcal{I} \,\}.$$

Kontrahering med hensyn til en kreds e er givet ved $M/e = M \backslash e$.

Det er ikke svært at vise at de to operationer at slette et element og kontrahering opfylder at $M \backslash x \backslash y = M \backslash y \backslash x$, $M/x/y = M/y/x$ og $M \backslash x/y = M/y \backslash x$, og således giver det mening at tale om $M \backslash X/Y$ når X og Y er to disjunkte delmængder af E. En *minor* af M er en matroid på denne form, hvor X og Y er to disjunkte og eventuelt tomme delmængder af E. En klasse af matroider kaldes *minor-afsluttet* hvis alle minor af matroider i klassen også ligger i klassen. Dette gælder for klassen af matroider som kan illustreres som en graf. I en graf er operationen at slette et element givet ved at den korresponderende kant slettes, og kontrahering er givet ved at grafen trækkes sammen som illustreret herunder hvor grafen til venstre bliver til grafen til højre efter kontrahering med hensyn til 3.



Der gælder at $M(G) \backslash e = M(G \backslash e)$ og at $M(G)/e = M(G/e)$, og det følger at hvis en matroid kan illustreres som en graf, så kan alle dens minor også illustreres som en graf. Matroider som kan illustreres som en graf kaldes *grafiske*. Klassen af grafiske matroider er altså minor-afsluttet.

Matroider som kan fås ud fra en mængde af vektorer over et givet legeme $\mathbb{F}$ kaldes $\mathbb{F}$-*repræsentable*.

Sætning 11 *Lad* $\mathbb{F}$ *være et legeme. Klassen af* $\mathbb{F}$-*repræsentable matroider er minor-afsluttet.*

Del af et bevis. Hvis $M = (E, \mathcal{I})$ er $\mathbb{F}$-repræsentabel findes en matrix A med søjler nummererede ved E, så mængder af lineært uafhængige søjler korresponderer med mængder i $\mathcal{I}$. Hvis $x \in E$ slettes fra M, er $M \backslash x$ repræsenteret af matricen A hvor søjlen x er slettet. Derfor er $M \backslash x$ $\mathbb{F}$-repræsentabel.

At M/x også er $\mathbb{F}$-repræsentabel bygger på to sætninger om dualer.

- Hvis M er $\mathbb{F}$-repræsentabel er også M^* $\mathbb{F}$-repræsentabel.
- $M^* \backslash x = (M/x)^*$.

Ifølge første sætning og ovenstående er $(M^* \backslash x)^*$ $\mathbb{F}$-repræsentabel, og ifølge anden sætning er $M/x = M^{**}/x = (M^* \backslash x)^*$. □

Det er nu påstået at hvis en matroid er grafisk, så er alle dens minor også grafiske, og hvis en matroid er $\mathbb{F}$-repræsentabel, så er alle dens minor også $\mathbb{F}$-repræsentable.

Det er et stort område indefor matroide-teori at gå den anden vej. Ud fra en matroids minor kan det afgøres om den er grafisk, og i nogle tilfælde om den er repræsentabel over et givet legeme. Rettere kan det vises hvilke minor en matroid ikke kan have hvis den til eksempel er grafisk. Matroiden bliver altså karakteriseret af de minor som den ikke har. Et eksempel på en sådan sætning er følgende med efterfølgende forklaringer.

Sætning 12 *En matroid er $GF(2)$-repræsentabel hvis og kun hvis den ikke har $U_{2,4}$ som en minor.*

Her er $GF(2)$ legemet med to elementer. For de som ikke er kommet til endelige legemer endnu og for os som har glemt det, findes et legeme $GF(q)$ med q elementer hvis og kun hvis q er en primtalspotens, $q = p^n$, og dette legeme er entydigt.

Matroiden $U_{2,4}$ er en matroid som er så populær at den har fået sit eget symbol. Den er givet ved $U_{2,4} = (\{1,2,3,4\}, \{I \subseteq \{1,2,3,4\} \mid |I| \leq 2\})$. Generelt er $U_{k,n}$, $0 \leq k \leq n$ givet ved $U_{k,n} = (\{1,\ldots,n\}, \{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \mid |I| \leq k\})$, og sådanne matroider kaldes uniforme. På side 21 blev $U_{2,4}$ brugt som et eksempel på en matroid som ikke er grafisk.

Når en minor-afsluttet klasse kan karakteriseres ved at en matroid findes i klassen netop når den ikke har en eller flere bestemte minor, kaldes disse for *udelukkede minor* for klassen. Matroiden $U_{2,4}$ er altså en udelukket minor for klassen af $GF(2)$-repræsentable matroider.

I tabel 1 ses udelukkede minor for forskellige minor-afsluttede klasser. Der er en hel del matroider med eget symbol, og konstruktionen af dem er en anelse omfattende. De symboler som optræder i tabellen er ikke det som er vigtigst, formålet er at se på klasserne og antallet af udelukkede minor.

Det ses at for de endelige legemer $GF(2)$, $GF(3)$ og $GF(4)$ findes kun endeligt mange udelukkede minor for repræsentabilitet over disse. I 1970 kom Rota med følgende formodning som er det mest berømte problem indenfor matroide-teori.

Rotas formodning Lad $GF(q)$ være et endeligt legeme. Der findes endeligt mange udelukkede minor for $GF(q)$-repræsentabilitet.

Klasse af matroider	Antal udelukkede minor	Hvilke minor er udelukkede	Årstal
Grafiske	5	$U_{2,4}, F_7, F_7^*, M^*(K_{3,3}), M^*(K_5)$	1958
Repræsentable over alle legemer	3	$U_{2,4}, F_7, F_7^*$	1958
Repræsentable over uendelige legemer	∞		1958
Repræsentable over $GF(2)$	1	$U_{2,4}$	1958
Repræsentable over $GF(3)$	4	$U_{2,5}, U_{3,5}, F_7, F_7^*$	1979
Repræsentable over $GF(4)$	7	$U_{2,6}, U_{4,6}, F_7^-, (F_7^-)^*, P_6, P_8, P_8''$	2000

Tabel 1 Udelukkede minor for forskellige minor-afsluttede klasser.

Eftersom der findes uendeligt mange udelukkede minor for klassen af matroider som kan repræsenteres over uendelige legemer, kan formodningen ikke udvides til alle legemer.

Årstallene i tabellen illustrerer hvor mange år det har taget at vise formodningen for legemerne med 2, 3 og 4 elementer. For endelige legemer med 5 eller flere elementer er problemet uløst.

Det her er selvfølgelig kun en kort og meget ufuldstændig introduktion til matroider. For videre læsning kan det anbefales at besøge James Oxleys hjemmeside `http://www.math.lsu.edu/~oxley/`. Der findes flere artikler at downloade som er overkommelige at forstå, blandt andet [4], [5] og [3]. En kortfattet historisk oversigt over vejen til bevis for Rotas formodning så langt er kapitel 5 i [1].

Litteratur

[1] Kristensen, Kasper Kabell. *Extremal Matroid Theory and the Erdös-Pósa Theorem*, 2005, `http://www.imf.au.dk/publications/phd/2006/imf-phd-2006-kkk.pdf`.

[2] Oxley, James. *Matroid Theory*, Oxford University Press, New York, 1992.

[3] Oxley, James. *On the interplay between graphs and matroids*, London Math. Soc. Lecture Notes 288, Cambridge Univ. Press, 2001, p.199–239, `http://www.math.lsu.edu/~oxley/jobcc.pdf`.

[4] Oxley, James. *What is a matroid?*, Cubo 5, 2003, p.179–218, `http://www.math.lsu.edu/~oxley/survey4.pdf`.

[5] Hobbs, Arthur M., Oxley, James. *William T. Tutte, 1917–2002*, Notices Amer. Math. Soc. 51, 2004, p. 320–330, `http://www.math.lsu.edu/~oxley/ahjo.pdf`.

[6] Whittle, Geoff. Lecture notes, Victoria University of Wellington.

FAMØS november 2006
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Tegner:
Marie Kiholm

Deadline for næste nummer:
4. december 2006

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til `famos@math.ku.dk` – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

FAMØS er et internt fagblad.
Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Sat ved hjælp af PDFLaTeX med
skrifttypefamilien Computer Modern
designet af Donald Knuth.

Fagbladet FAMØS
c/o Instistut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Oplag: 500 stk.
ISSN: 1395-2145

FAMØS

Indhold

Redaktion

Alexander Christian Fick, Bo Malling Christensen, Christian Dalbjerg, Christian Overgaard Lund, Mikkel Abrahamsen, Sebastian Paaske Tørholm, Sune Precht Reeh, Tarje Bargheer, Ulrik Buchholtz (ansvh.)

20. årgang, nr. 1, november 2006