

Poincarés formodning

– Perelmans bevis og det efterfølgende cirkus

Morten Jacob Nesgaard og Julian Tosev

Det er ikke hver dag, at en matematisk formodning kommer i nyhederne, men det er lige præcis, hvad der er sket. Nyhedsbureauer som *The New Yorker*, *TV2* og *Politiken* har for nylig vist stor interesse i en sær russer. Sensationen, som har fanget nyhedsbureauernes opmærksomhed er, at Grigori Perelman har løst Poincarés formodning.

Poincarés formodning blev stillet af Henri Poincaré i 1904 og lyder således: Enhver lukket, enkelt sammenhængende 3-mangfoldighed af endelig udstrækning er homeomorf med en kugleflade.

Formodningen går i alt sin enkelthed ud på følgende: Forestil dig, at du kommer ind i slutningen af en formningstime i 4. klasse, og alle eleverne har lavet nogle lerfigurer. En person har lavet en kaffekop med hank, en anden har lavet en pølse, en tredje en fingerring, en fjerde et askebæger osv. Betragt nu overfladen af disse lerfigurer, så vil pølsen kunne deformeres om til en bold ved blot at trykke enderne sammen. Hvorimod dette ikke er muligt for en fingerring, da der er hul i den (den er ikke enkelt sammenhængende). Tilsvarende kan et askebæger deformeres om til en bold, men en kaffekop med hank kan ikke. På samme måde kan man betragte alle lerfigurerne i klassen og se om de med topologiske briller på kan deformeres om til en bold.

Formodningen, som er blevet verdenskendt, handler dog ikke om overfladen på en bold, som Stig Tøfting og Jesper Grønkjær render rundt og sparker til, men derimod en mere visuel-problematisk bold. Hvis vi ser på overfladen af en bold i 2 dimensioner, så svarer dette til cirklen med cirkelperiferi $x^2 + y^2 = r^2$. I tre dimensioner er vores kugleoverfladen givet ved $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Poincarés formodning omhandler overflader i en dimension højere,

nemlig i fire dimensioner, hvor en kugleoverflade vil have ligning $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$. Denne kugleoverflade er selvfølgelig svær at tegne, da vi kun har 3 rum-dimensioner at gøre godt med. Ikke desto mindre er det netop kugleoverflade i fire dimensioner, som Poincarés formodning handler om. Gennem tiden har flere matematikere forsøgt at løse Poincarés formodning, bl.a. J. H. C. Whitehead, Bing, Haken, Moise, og Papakyriakopoulos (og her kræves grundig mundmotorisk træning for korrekt udtale!), men alle har de måtte sande, at det var for stor en mundfuld. På denne liste skal der desuden stå Poincaré selv, der kom med et ukorrekt bevis, som han dog selv senere fandt et modeksempel på.

Der blev hurtigt formuleret en generaliseret udgave af Poincarés formodning, som spørger om en deformeret bold i n dimensioner uden huller, set med topologiske briller på, stadig blot er en bold. For $n = 1$, som svarer til cirkelperiferien, har løsningen været kendt længe, for $n = 2$ fandt Henri Poincaré selv et bevis. For $n = 3$ har ingen, indtil nu, løst formodningen og netop denne formodning for $n = 3$, har stået ubesvaret i ca. 100 år. For $n = 4$ fandt Freedman en løsning i 1982, for hvilket han fik en Fieldsmedalje, som svarer til Nobelprisen inden for matematik. $n = 5$ blev løst i 1961 af Zeeman, $n = 6$ blev løst af Stallings i 1962, og for $n \geq 7$ fandt Smale en løsning i 1961. Smale udvidede senere sin løsning, så den gjaldt for $n \geq 5$. Smale modtog en Fields medalje for dette bevis. Det bemærkelsesværdige er, at for $n > 3$, har man kunnet finde et bevis, men lige præcis $n = 3$, har voldt utrolige mange problemer.

Poincarés formodning er en af Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts Millennium Prize Problems. The Millennium Prize Problems er 7 matematiske problemer, som blev stillet den 24. maj 2000, for at fejre matematik i det nye årtusinde. Clay Mathematics Institute tildeler \$1.000.000 til vedkommende, som løser en af The Millennium Prize Problems.

Nu tilbage til hovedpersonen: Grigori Perelman blev født i Leningrad (nu St. Petersburg) den 13. juni 1966 af jødiske forældre. Han startede sin tidlige matematiske uddannelse ved Leningrad Secondary School – en skole med særlig fokus på matematik og fysik. I 1982 stillede han op for USSR ved Matematik-OL. Her opnåede han den højeste score, man kunne få, og vandt en guldmedalje, bemærk at på dette tidspunkt var han kun 16 år gammel. I slutningen af 80'erne tog han sin Ph.D.-grad ved statsuniversitetet i Leningrad. Hans afhandling omhandlede sadelflader i det euklidiske rum. Herefter blev han ansat ved Steklov Institute of Mathematics i St. Petersburg. Indtil 1996 var han også løbende ansat ved forskellige universiteter i USA.

Før 2002 var Perelman bedst kendt for sit arbejde vedrørende „comparison theorems“ i riemannsk geometri. Men efter november 2002 ændrede Perelmans liv sig radikalt. Han udgav den første elektroniske artikel af en serie af artikler på arXiv.org, hvori han ud fra amerikaneren Richard Hamiltons idé omkring „Ricci flow“ i hovedtræk beviser Thurstons geometriske formodning, hvoraf Poincarés formodning kan udledes som et specielt tilfælde. Disse artikler skabte røre i det matematiske miljø; havde Perelman virkelig bevist Poincarés formodning? I april 2003 blev han inviteret til USA for at give en række forelæsninger om sit arbejde vedrørende formodningerne (bl.a. på Columbia University, Princeton University og Harvard University). Da han efterfølgende kommer tilbage til Rusland er berømmtheden nok steget ham lidt til hoved, for han gider ikke længere svare på sine kollegiers emails.

I sommeren 2006 tager tingene fart

I maj 2006 udgiver Bruce Kleiner og John Lott, begge fra The University of Michigan, en artikel på arXiv.org, som indeholder de

manglende detaljer i Perelmans bevis for Thurstons geometriske formodning.

I juni 2006 publicerer Asian Journal of Mathematic en artikel af Xi-Ping Zhu fra Sun Yat-sen University i Kina og Huai-Dong Cao fra Lehigh University i Pennsylvania. I artiklen angives et fuldstændigt bevis for Thurstons og Poincarés formodninger. Chefredaktøren for Asian Journal of Mathematic er den tidligere Fields Medal-modtager Shing-Tung Yau, som også er Caos doktorgradsvejleder. Denne dobbeltrolle har skabt en del rygter. Bl.a. at Yau har ønsket direkte eller indirekte at være forbundet til beviset for Poincarés formodning, og derfor har han presset sine redaktører til unaturligt hurtigt at have accepteret Zhus og Caos artikel.

I juli 2006 udgiver John Morgan fra Columbia University og Gang Tian fra Massachusetts Institute of Technology en artikel på [arXiv.org](http://arxiv.org) med titlen „Ricci Flow and the Poincaré Conjecture.“ I artiklen giver de et detaljeret bevis for Poincarés formodning. Den 24. august 2006 holder Morgan en forelæsning ved ICM (International Congress of Mathematicians) i Madrid, omhandlende Poincarés formodning.

I maj 2006 beslutter en komite bestående af 9 personer, at Perelman skal modtage Fieldsmedaljen for sit arbejde vedrørende Poincarés formodning. Herefter besøger Sir John Ball, som er præsident for den internationale matematik sammenslutning, Perelman i håb om at kunne overtale ham til at modtage prisen. Efter to dage giver Ball op og rejser hjem. Perelman opsummerer deres konversation:¹

*„He proposed to me three alternatives: accept and come;
accept and don't come, and we will send you the medal*

¹De følgende citater er fra http://en.wikipedia.org/wiki/Grigori_Perelman.

later; third, I don't accept the prize. From the very beginning, I told him I have chosen the third one."

Videre fortæller Perelman at prisen

„was completely irrelevant for me. Everybody understood that if the proof is correct then no other recognition is needed."

Perelman har også afvist at modtage sin andel af the Millennium Prize på \$1.000.000 fra Clay Mathematics Institute.

Perelman er i øjeblikket arbejdsløs, bor hos sin mor i St. Petersburg og ernærer sig af hendes pension. Hans venner har fortalt, at han i øjeblikket synes, at matematik er alt for smertefuldt et emne at diskutere. Videre er han meget skuffet over matematikeres etiske standart – specielt Yaus bestræbelser på at nedtone hans rolle i beviserne for formodningerne og i stedet fremhæve Caos og Zhus. Perelman har direkte sagt:

„I can't say I'm outraged. Other people do worse. Of course, there are many mathematicians who are more or less honest. But almost all of them are conformists. They are more or less honest, but they tolerate those who are not honest."

Han har også sagt:

„As long as I was not conspicuous, I had a choice. Either to make some ugly thing" (a fuss about the mathematics community's lack of integrity) „or, if I didn't do this kind of thing, to be treated as a pet. Now, when I become a very conspicuous person, I cannot stay a pet and say nothing. That is why I had to quit."

Perelman har garanteret været under en del pres, efter hans bevis er kommet ud til alle verdenshjørner. Alle medier har været efter ham for at få et interview med denne bemærkelsesværdig russer, som har løst Poincarés 100 år gamle formodning. Men at sige nej

til Fieldsmedaljen, som er den største anerkendelse, man kan få inde for matematikken, og nej til \$1.000.000 fra the Clay Institute virker ikke som noget, et normalt menneske vil gøre. Hvis man beder børn om at tegne et billede af en matematiker, som man har gjort i en række internationale undersøgelser, så får man typisk et billede af en distræt vildmand med skæg, briller og kittel. Perelman har åbenbart ikke været med til at ændre dette stereotype billede af matematikere, som lader til at være dominerende uden for det matematiske miljø. På den anden side, hvis man kan løse Poincarés formodning, så gør det måske ikke noget, at man er lidt aparte?