Hilbertmatricen

Christian Berg

Indledning

I elementær matrixregning kan man støde på *Hilbert matricen*

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

hvis j,k'te element er $1/(j+k+1)$, når man nummererer de $n+1$ rækker og søjler med tallene $0,1,\ldots,n$. For små værdier af n kan man let udregne determinanten og den inverse matrix. For $n=1,2$ finder man $\det \mathcal{H}_1 = 1/12$, $\det \mathcal{H}_2 = 1/2160$ og

$$\mathcal{H}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

Det overraskende er, at de inverse matricer får heltallige elementer, og at determinanten $D_n = \det \mathcal{H}_n$ følgelig bliver en stambrøk, altså en brøk af formen $1/k$ for et naturligt tal k. Der gælder

$$\det \mathcal{H}_n = \frac{[(1!)(2!)\cdots(n!)]^4}{(1!)(2!)\cdots(2n+1)!}, \tag{2}$$

men hverken formlen eller at det er en stambrøk er oplagt. Beviset følger nedenfor.

Hilbertmatricen blev introduceret af Hilbert i [12], hvor (2) bevises.

Hilbertmatricen og dens Uendeligdimensionale variant $\mathcal{H}_\infty$ har en række interessante egenskaber, som findes behandlet i [9]. Hvis man ønsker at udregne den inverse matrix på computer og repræsenterer stambrøkerne ved decimalbrøker opdager man, at der kan ske betydelige afrundingsfejl.

Den kendsgerning, at

$$\frac{1}{j+k+1} = \int_0^1 x^{j+k}\,dx,$$

som kan udtrykkes, at Hilbertmatricen er Hankelmatricen (s_{j+k}) hørende til momenterne $s_n = 1/(n+1)$ for Lebesguemålet på enhedsintervallet, jfr. detaljerne nedenfor, fik mig til at spekulere på om ikke egenskaber ved de tilhørende ortogonale polynomier, nemlig *Legendre polynomierne*, skulle kunne forklare, at de reciprokke Hilbertmatricer er heltallige, og det viste sig at være tilfældet. Det er diskuteret i detaljer i [7]. Overraskende nok gælder noget tilsvarende hvis Hilbertmatricen erstattes af Filbertmatricen

$$\mathcal{F}_n = (1/F_{j+k+1}), 0 \le j,k \le n,$$

hvor $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \ge 1$ er følgen af Fibonacci tal, se [6] eller det mere generelle resultat i [3].

I de sidste 25 år har der været stor matematisk aktivitet i området ortogonale polynomier og specielle funktioner. Der kan fremhæves mange grunde til det og lad mig nævne nogle få:

Med de fantastiske beregningsmuligheder som computerne har givet, har der været behov for at raffinere de eksisterende teoretiske metoder. De klassiske ortogonale polynomier har altid spillet en vigtig rolle ved numeriske beregninger (Gauss kvadratur). Computerne har gjort det meget nemmere end tidligere at teste hypoteser om specielle funktioner.

Teorien for q-serier eller q-specielle funktioner, der går tilbage til Heine (1848), har fået en renæssance bl.a. på grund af fysiske teorier om kvantedeformation. Værket [11] har haft stor betydning og kan opfattes som en statusrapport over vores viden på området.

Det blev observeret, at adskillige af Ramanujans opdagelser kunne forstås i et nyt lys ved teorien for ortogonale polynomier. Her skal henvises til R. Askeys vidunderlige artikel [4], hvor han bl. a. påpeger, at flere af Ramanujans besynderlige formler kan fortolkes som løsninger til indeterminerede momentproblemer, som er momentproblemer, hvor der er forskellige sandsynlighedsmål med de samme momenter.

Nyere talteoretiske resultater har kunnet bevises på elegant måde ved inddragelse af polynomial approksimation via ortogonale polynomier. F.eks. kan Apéry's sensationelle resultat om irrationaliteten af værdien af Riemann's zeta-funktion for $x = 3$

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

bevises ved udnyttelse af Legendrepolynomierne for intervallet $]0, 1[$, se [5, Afsnit 7.7]. Det er de samme ortogonale polynomier vi skal udnytte i dette arbejde for at indse, at den inverse matrix til Hilbertmatricen har heltallige indgange.

Efter en kort introduktion til ortogonale polynomier i Sektion 2,3 studeres Legendrepolynomierne i Sektion 4 og endelig vises i Sektion 5, at den uendelige Hilbertmatrix $\mathcal{H}_\infty$ kan opfattes som en begrænset operator på Hilbertrummet ℓ^2.

Ortogonale Polynomier

Vi antager, at der er givet et sandsynlighedsmål μ på den reelle tallinje $\mathbb{R}$, og vi betragter målets *momenter*

$$s_n = s_n(\mu) = \int x^n \, d\mu(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

som antages at eksistere. Det er nu muligt at indføre et skalarprodukt på vektorrummet $\mathbb{P}$ af polynomier med komplekse koefficienter ved

$$\langle p, q\rangle = \int p(x)\overline{q(x)}\, d\mu(x), \quad p, q \in \mathbb{P}. \tag{4}$$

Med til kravet for et skalarprodukt hører, at $||p|| = \sqrt{\langle p, p\rangle} = 0$ kun er muligt, når p er nulpolynomiet. Af $\int |p(x)|^2\, d\mu(x) = 0$ skal altså følge, at p er nulpolynomiet. Da et egentligt polynomium kun har endeligt mange rødder, må vi kræve, at sandsynlighedsmålet μ ikke er koncentreret i endeligt mange punkter. Mængden af sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$ med vilkårlige momenter og som ikke er koncentreret i endeligt mange punkter betegnes $\mathcal{M}^*$.

Lad der nu være givet $\mu \in \mathcal{M}^*$. Gennemføres Gram-Schmidt ortonormalisering af monomierne $1, x, x^2, \ldots$ opnås en følge $(P_n)_{n\geq 0}$ kaldet de *ortonormale polynomier* knyttet til μ, og som er entydigt bestemt ved kravene

(i) P_n er et polynomium af grad n med positiv ledende koefficient,

(ii) $\int P_n(x)\overline{P_m(x)}\, d\mu(x) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{for } n = m \\ 0, & \text{for } n \neq m. \end{cases}$

Da μ har masse 1 må $P_0(x) = 1$. Man ser let, at P_n får reelle koefficienter, så konjugering over $P_m(x)$ er overflødig i ligningen ovenfor.

Hvis $(k_n)_{n\geq 0}$ er en følge af reelle tal så $k_0 = 1, k_n \neq 0$ for $n \geq 1$, så vil polynomierne $p_n = k_n P_n$ i stedet for (ii) opfylde

$$\int p_n(x)\overline{p_m(x)}\, d\mu(x) = k_n^2 \delta_{n,m}.$$

De ortonormale polynomier P_n er især nyttige ved teoretiske overvejelser, men de klassiske ortogonale polynomier, dvs Hermite, Laguerre, Legendre, Chebyshev og Jacobi polynomierne, er sædvanligvis givet som $p_n = k_n P_n$ med en passende følge k_n.

Vedrørende den generelle teori for ortogonale polynomier henvises til de klassiske værker af Szegő [14] og Akhiezer [1], til Chihara's bog [8] og til den ret nye monografi af Ismail [13]. De vigtigste ortogonale polynomier optræder i det såkaldte Askey skema eller dets q-version. Det er de polynomier der kan fremstilles som hypergeometriske funktioner eller q-hypergeometriske funktioner op til niveauet ${}_4F_3$ henholdsvis ${}_4\varphi_3$.

Det er værd at bemærke, at skalarproduktet (4) kun afhænger af momenterne, for hvis

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \tag{5}$$

så finder vi

$$\langle p, q \rangle = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} s_{j+k} a_j \overline{b_k}, \tag{6}$$

som fremhæver betydningen af matricerne

$$H_n = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

kaldet *Hankelmatricerne*. Læg mærke til at det j, k'te element i $(n+1) \times (n+1)$ matricen H_n er s_{j+k}, idet der er tradition for at nummerere rækker og søjler fra 0 til n. Matricen H_n er symmetrisk og den tilhørende kvadratiske form hænger sammen med skalar produktet

$$\langle p, q \rangle = (a_0, a_1, \ldots, a_n) H_n (\overline{b_0}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n})^t,$$

idet p, q er som i (5) og $(\overline{b_0}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n})^t$ er en søjlevektor. Her har vi for simpelheds skyld antaget, at begge polynomier har grad $\leq n$, hvilket altid er muligt ved at tilføje nulled.

Man ser, at matricen H_n er positivt definit, og dermed er $D_n := \det H_n > 0$ for hvert n.[7]

Det er iøvrigt en simpel øvelse i determinantteori at vise, at P_n kan udtrykkes på følgende måde (idet vi sætter $D_{-1} = 1$)

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1} D_n}} \det \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Ved at udvikle determinanten efter sidste række ser man nemlig, at formlen (7) definerer et polynomium P_n af n'te grad og den ledende koefficient er

$$\sqrt{D_{n-1}/D_n}, \tag{8}$$

så (i) er opfyldt. For at se (ii) udnyttes også udvikling af determinanten efter sidste række, så for $k \leq n$ er

$$\int P_n(x) x^k \, d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1} D_n}} \det \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-1} \\ s_k & s_{k+1} & \cdots & s_{k+n} \end{pmatrix},$$

[7] En berømt Sætning af Hamburger fra 1920 karakteriserer momentfølgerne ved disse egenskaber: *Lad (s_n) være en reel talfølge med egenskaberne $D_n := \det H_n > 0$ for alle $n \geq 0$ og antag $s_0 = 1$. Så er (s_n) momentfølge for et passende $\mu \in \mathcal{M}^*$.*

som er 0 for $k < n$ fordi to rækker er ens, og for $k = n$ er udtrykket lig med

$$\frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} D_n = \sqrt{D_n/D_{n-1}}.$$

Heraf fås altså, at P_n er ortogonal på alle monomier x^k med $k \leq n-1$ og dermed på alle polynomier af grad $\leq n-1$. Udnyttes dette kan vi skrive

$$\int P_n^2(x)\,d\mu(x) = \sqrt{D_{n-1}/D_n} \int P_n(x) x^n\,d\mu(x) = 1,$$

og vi har vist, at også (ii) gælder.

Christoffel-Darboux's summationsformel

I teorien for Fourierrækker spiller Dirichlets kerne en vigtig rolle, idet den tillader beregning af rækkens afsnit. I teorien for ortogonale polynomier spiller kernen

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) \tag{9}$$

en analog rolle. Ortogonaludviklingen for en funktion f med hensyn til (P_n) er den uendelige række

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x), \quad \text{hvor } c_k = \int f(x)P_k(x)\,d\mu(x).$$

Man ser let, at rækkens afsnit $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$ er bestemt ved formlen

$$S_n(x) = \int f(y)K_n(x,y)\,d\mu(y). \tag{10}$$

Heraf fås specielt, at der for et polynomium p af grad $\leq n$ gælder

$$p(x) = \int p(y) K_n(x, y) \, d\mu(y). \tag{11}$$

Man kalder derfor $K_n(x, y)$ den reproducerende kerne.

Der vides iøvrigt næsten intet om punktvis konvergens af ovenstående ortogonaludvikling i det generelle tilfælde.

Som optakt til Christoffel-Darboux's formel for kernen $K_n(x, y)$ skal vi først redegøre for et andet nøgleresultat om ortogonale polynomier. Ortogonaludviklingen for $xP_n(x)$ er den endelige sum

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c(n, k) P_k(x), \tag{12}$$

hvor

$$c(n, k) = \int xP_n(x) P_k(x) \, d\mu(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n + 1.$$

Polynomiet P_n er ortogonalt på alle polynomier af grad $\leq n - 1$ og specielt på $xP_k(x)$ for $k \leq n - 2$. Dette viser, at der er højst 3 led i summen (12). Sættes for $n = 0, 1, \ldots$

$$a_n = \int xP_n^2(x) \, d\mu(x), \quad b_n = \int xP_n(x) P_{n+1}(x) \, d\mu(x), \tag{13}$$

har vi klart $c(n, n) = a_n, c(n, n + 1) = b_n$ men også (for $n \geq 1$)

$$c(n, n - 1) = \int xP_n(x) P_{n-1}(x) \, d\mu(x) = b_{n-1}.$$

Udnyttes, at den ledende koefficient i $P_n(x)$ er givet ved (8), så ser man let af (13), at b_n er givet ved udtrykket i følgende hovedresultat:

Sætning 1 (Treleds-rekursionen) *Lad følgerne $(a_n),(b_n)$ være defineret ved (13). Så gælder*

$$xP_n(x) = b_nP_{n+1}(x) + a_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x),\ n \geq 1,$$
$$xP_0(x) = b_0P_1(x) + a_0P_0(x).$$

Videre gælder

$$b_n = \frac{\sqrt{D_{n-1}D_{n+1}}}{D_n} > 0,\ n \geq 0.$$

Ved at definere $P_{-1} = 0$ behøver man ikke huske specialtilfældet $n = 0$ i treleds-rekursionen. Ved at udnytte denne 2 gange finder man ved lidt regning

$$\begin{aligned}(x-y)P_k(x)P_k(y) = b_k(P_{k+1}(x)P_k(y) - P_k(x)P_{k+1}(y))\\ - b_{k-1}(P_k(x)P_{k-1}(y) - P_{k-1}(x)P_k(y).\end{aligned}$$

Summeres dette udtryk for $k = 0, 1, \ldots, n$ og udnyttes, at højresiden teleskoperer fås:

Sætning 2 (Christoffel-Darboux's summationsformel)

$$(x-y)K_n(x,y) = b_n\left(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)\right).$$

Vi skal nu give et andet udtryk for $K_n(x,y)$, som er afgørende for de talteoretiske aspekter af dette arbejde.

Det er uden videre klart, at vi kan skrive

$$K_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_{j,k}^{(n)} x^j y^k, \tag{14}$$

hvor tallene $a_{j,k}^{(n)}$ er entydigt bestemt og $a_{j,k}^{(n)} = a_{k,j}^{(n)}$. Samles disse tal i en $(n+1)\times(n+1)$-matrix $A_n = (a_{j,k}^{(n)})$, så er denne matrix den inverse til Hankel matricen H_n:

Sætning 3 *Der gælder*

$$A_n H_n = H_n A_n = E_n,$$

idet E_n *er enhedsmatricen af orden* $n+1$.

Bevis. For $0 \le l \le n$ giver den reproducerende egenskab (11) at

$$\int x^l K_n(x,y)\, d\mu(x) = y^l.$$

På den anden side har vi

$$\begin{aligned}\int x^l K_n(x,y)\, d\mu(x) &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_{j,k}^{(n)} \int x^{l+j} y^k \, d\mu(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^n s_{l+j} a_{j,k}^{(n)} \right) y^k,\end{aligned}$$

og derfor er

$$\sum_{j=0}^n s_{l+j} a_{j,k}^{(n)} = \delta_{l,k}.$$

□

Legendrepolynomier

Sætning 4 *Polynomierne*

$$p_n(x) = \frac{1}{n!} D^n \left[x(1-x)\right]^n, \quad n \ge 0 \tag{15}$$

er ortogonale med hensyn til målet $\mu = 1_{]0,1[}(x)\,dx$, *og de tilhørende ortonormale polynomier er givet ved*

$$P_n(x) = (-1)^n \sqrt{2n+1}\, p_n(x). \tag{16}$$

Polynomierne p_n *har heltallige koefficienter og er givet ved formlen*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} x^k. \tag{17}$$

Bevis. Formel (15) kaldes Rodrigues' formel efter den franske matematiker og bankier O. Rodrigues, om hvem der for nylig er udkommet en biografi [2].

Ved Leibniz' formel for den n'te afledede af et produkt af to funktioner følger straks, at polynomiet p_n givet ved (15) er af n'te grad og givet eksplicit ved (17). For en funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ som er n gange kontinuert differentiabel på intervallet $[0,1]$, finder man ved gentagen partiel integration

$$\int_0^1 f(x) p_n(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 [x(1-x)]^n f^{(n)}(x)\, dx.$$

Anvendes dette på $f(x) = x^k, k \le n$ får vi

$$\int_0^1 x^k p_n(x)\, dx = 0, \quad k < n;$$
$$\int_0^1 x^n p_n(x)\, dx = (-1)^n \int_0^1 [x(1-x)]^n\, dx,$$

men det sidste integral er let at regne ud til

$$\int_0^1 [x(1-x)]^n\, dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Da p_n har den ledende koefficient $(-1)^n\binom{2n}{n}$ følger, at de ortonormale polynomier er givet ved (16).

Bemærk, at $p_n(0) = 1$ for alle n. $\square$

Da momentfølgen er $s_n = 1/(n+1)$ ser vi, at Hankelmatricen H_n er en matrix af stambrøker

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix},$$

altså Hilbertmatricen fra indledningen. Den er positivt definit og der gælder

$$D_n = \frac{[(1!)(2!)\cdots(n!)]^4}{(1!)(2!)\cdots(2n+1)!}. \tag{18}$$

For at se (18) bemærker vi, at den ledende koefficient til P_n er

$$\sqrt{D_{n-1}/D_n} = \sqrt{2n+1}\binom{2n}{n}$$

ifølge (8), altså

$$\frac{D_{n-1}}{D_n} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2 = \frac{(2n+1)!(2n)!}{(n!)^4},$$

og heraf fremgår formel (18), som skyldes Hilbert, se [12]. Det fremgår også, at $1/D_n$ er et helt tal. Der gælder imidlertid meget mere som påvist i [10]:

Sætning 5 *Den inverse matrix til Hilbertmatricen har heltallige indgange.*

Bevis. Vi skal blot vise, at matricen A_n har heltallige indgange. Af (16) og (17) fremgår, at

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) p_k(x) p_k(y)$$

har heltallige koefficienter til $x^j y^k$, men det er netop indgangene i matricen A_n. □

Bemærkning 6 I Collars arbejde [10] kan man finde en eksplicit formel for elementerne i A_n, som klart viser, at de er hele tal:

$$a_{j,k}^{(n)} = (-1)^{j+k}(j+k+1)\binom{n+1+j}{n-k}\binom{n+1+k}{n-j}\binom{j+k}{j}^2. \tag{19}$$

Hvis vi indsætter formlen (17) i udtrykket ovenfor for $K_n(x,y)$ finder vi følgende udtryk:

$$a_{j,k}^{(n)} = (-1)^{j+k} \sum_{l=\max(j,k)}^{n} (2l+1)\binom{l}{j}\binom{l}{k}\binom{l+j}{l}\binom{l+k}{l}. \tag{20}$$

Den identitet, der fremgår ved at sammenholde (19) og (20), kan vises ved induktion i n. Kaldes den numeriske værdi af højresiden i (19) for R_n og leddet i summen (20) for C_k, så består induktionsskridtet i formlen $R_{n+1} - R_n = C_{n+1}$, hvis bevis overlades til læseren.

Hilbertmatricen $\mathcal{H}_\infty$ som operator på Hilbertrummet ℓ^2

Betragt Hilbertrummet ℓ^2, som består af alle kvadratisk summable komplekse talfølger, i.e.,

$$\ell^2 = \{\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 0} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}, \tag{21}$$

med skalarproduktet

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}. \tag{22}$$

Vektorerne $\mathbf{e}_0 = (1,0,0,\ldots), \mathbf{e}_1 = (0,1,0,0,\ldots),\ldots$ udgør en ortonormal basis for Hilbertrummet ℓ^2.

Til en begrænset operator A på ℓ^2 knyttes den uendelige matrix $\mathcal{A} = (a_{j,k}), 0 \leq j,k$ givet ved

$$a_{j,k} = \langle A\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle, \tag{23}$$

altså k'te søjle er koordinaterne til billedvektoren $A\mathbf{e}_k$ med hensyn til den ortonormale basis. Der gælder altså

$$A\mathbf{e}_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}\mathbf{e}_j, \quad ||A\mathbf{e}_k||^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_{j,k}|^2,$$

hvor den første række konvergerer i ℓ^2 og den anden rækkesum følger af Parseval's formel. Specielt har vi, at $\mathcal{A}$'s søjler tilhører Hilbertrummet.

Man ser let at matricen hørende til den adjungerede operator A^* er matricen $\mathcal{A}^*$, hvis (j,k)'te element er $\overline{a_{k,j}}$. Specielt følger, at operatoren A er hermitesk hvis og kun hvis $a_{j,k} = \overline{a_{k,j}}$ for alle j,k.

Spørgsmålet er nu om Hilbertmatricen $\mathcal{H}_\infty$ er matrix for en begrænset operator. At svaret er ja følger af

Sætning 7 (Hilberts ulighed) *For* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}, n \geq 0$ *gælder*

$$0 < \sum_{j,k=0}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k+1} < \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \tag{24}$$

Bevis. Til $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ betragtes polynomiet

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

som ikke er nulpolynomiet. Altså får vi

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^1 p(x)^2 \, dx = \\ \int_0^1 (\sum_{j=0}^{n} a_j x^j)(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) \, dx = \sum_{j,k=0}^{n} a_j a_k \int_0^1 x^{j+k} \, dx \\ = \sum_{j,k=0}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k+1}, \end{aligned} \tag{25}$$

hvilket giver den venstre del af uligheden (24).

Idet $\overline{p(e^{it})} = p(e^{-it})$ finder vi også

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |p(e^{it})|^2 \, dt = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |p(e^{it})|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_{j=0}^{n} a_j e^{ijt})(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-ikt}) \, dt = \\ \sum_{j,k=0}^{n} a_j a_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} \, dt = \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Bemærk, at ligningen overfor er et specialtilfælde af Parseval's ligning for Fourierrækker. Vi anvender nu Cauchys integralsætning og integrerer den hele holomorfe funktion $f(z) = p(z)^2, z \in \mathbb{C}$ over halvcirklen $[-1,1] \cup \{e^{it} \mid t \in [0,\pi]\}$ og får

$$0 = \int_{-1}^{1} p(t)^2\,dt + \int_0^\pi p(e^{it})^2 i e^{it}\,dt,$$

hvoraf

$$\int_0^1 p(t)^2\,dt < \int_{-1}^1 p(t)^2\,dt = \left| -i \int_0^\pi p(e^{it})^2 e^{it}\,dt \right| \le \int_0^\pi |p(e^{it})|^2\,dt.$$

Ved at kombinere denne ulighed med (25) og (26) følger højresiden i (24). □

Nærværende smarte bevis skyldes Toeplitz.

Bemærkning 8 Hilberts ulighed udvides let til komplekse tal: For $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, n \ge 0$ gælder

$$0 < \sum_{j,k=0}^{n} \frac{a_j \overline{a_k}}{j+k+1} < \pi \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2. \tag{27}$$

(Sæt $a_j = \alpha_j + i\beta_j$ og brug den reelle ulighed to gange.)

Definerer vi nu en operator H på $S = \mathrm{span}\{\mathbf{e}_j, j = 0, 1, \ldots\}$ ved linearitet og ved fastsættelsen

$$H\mathbf{e}_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+k+1} \mathbf{e}_j,$$

som har mening i ℓ^2 da $\sum_{j=0}^{\infty} (j+k+1)^{-2} < \infty$, ser $H : S \to \ell^2$ en tæt defineret operator, som opfylder

$$0 < \langle H\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < \pi ||x||^2, \quad \mathbf{x} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{28}$$

Udtrykket $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \langle H\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ er et indre produkt på vektorrummet S og altså gælder Cauchy-Schwarz's ulighed

$$|\langle H\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle|^2 \le \langle H\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle H\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle,$$

men kombineres det med (28) fås

$$|\langle H\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| \le \pi||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||, \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in S.$$

Ved denne ulighed ser man let, at H på entydig måde kan udvides til en begrænset operator i ℓ^2 med $||H|| \le \pi$. Af det foregående er det klart, at H er en positiv selvadjungeret operator.

Man kan vise, at normen er lig med π og at dens spektrum er intervallet $[0,\pi]$, men da operatoren ikke har nogen egenværdier er det et såkaldt rent kontinuert spektrum. Disse resultater er ikke lette at vise. Henvisninger og detaljer kan findes i [9].

Litteratur

[1] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem.* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965.

[2] S. Altmann, E.L. Ortiz, Editors, *Mathematics and social utopias in France. Olinde Rodrigues and His Times.* History of Mathematics **28**, American Mathematical Society 2005.

[3] J. E. Andersen and C. Berg, *Quantum Hilbert matrices and orthogonal polynomials.* J. Comput. Appl. Math. **233** (2009), 723–729. (ArXiv:math.CA/0703546)

[4] R. Askey, *Ramanujan's extension of the gamma and beta functions*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 346–359.

[5] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy, Special functions. Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[6] C. Berg, *Fibonacci numbers and orthogonal polynomials.* To appear in Arab Journal of Mathematical Sciences. (ArXiv:math.NT/0609283v2)

[7] C. Berg, *Ortogonale polynomier og Hilbertmatricen.* Normat **54** (2006), 116–133.

[8] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York-London-Paris, 1978.

[9] Man-Duen Choi, *Tricks or Treats with the Hilbert Matrix*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 301–312.

[10] A. R. Collar, *On the Reciprocation of Certain Matrices*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **59** (1939), 195–206.

[11] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, Cambridge 1990, second edition 2004.

[12] D. Hilbert, *Ein Beitrag zur Theorie des Legendreschen Polynoms*, Acta Math. **18** (1894), 155–159. (367–370 in "Gesammelte Abhandlungen II", Berlin 1933.)

[13] M. E. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Cambridge University Press, Cambridge 2005.

[14] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, fourth edition. American Mathematical Society, Providence, 1975.

Christian Berg, Institut for Matematiske Fag, Universitetsparken 5, DK 2100 København Ø, Danmark. email: berg@math.ku.dk