Matematik & filosofi
– et interview med Mikkel W. Johansen

Martin Patrick Speirs & Frederik Möllerström Lauridsen

Matematikken og filosofien har historisk set været tæt sammenknyttet og genstand for megen frugtbar udveksling. Der findes endda en gren indenfor filosofien kaldet matematikkens filosofi. Her studerer man spørgsmål som ’hvad er tal?’, ’hvad er et bevis?’ og ’ hvad udgør matematikkens natur?’ For at høre nærmere om disse og ligende spørgsmål opsøgte vi cand.mag og Ph.D Mikkel Willum Johansen, som de fleste studerende ved IMF vil kende som underviser i kurset “VtMat”.

Vi spurgte ind til hans faglige baggrund, og om hvordan man kommer til at arbejde inden for matematikkens filosofi.

Min baggrund er, at jeg læste hovedfag i filosofi og bifag i matematik, og på matematik, tog jeg nogle af de fag der havde lidt mere filosofisk relevans, der var faktisk et overbygningskursus i matematikkens filosofi. Jeg tog også nogle af historiefagene – der er man måske lidt mere reflekterende over, hvad det er man gør end man er i de rene matematikfag. Min indfaldsvinkel på matematikfilosofi var, at jeg befandt mig meget på Center for Naturfilosofi [Center for Naturfilosofi og vidensstudie, ved Niels Bohr instituttet, red.], hvor man prøver at opsamle studerende og ansatte, på det naturvidenskablige fakultet, som har filosofiske interesser. På et tidspunkt manglede man så nogen til at lave videnskabsteori, og det var ret oplagt at jeg kom ind over, og så lavede jeg det kursus [Videnskabsteori for matematiske fag, (blok 3), red.]. Jeg blev så interesseret i det, at jeg søgte en Ph.d.

Mikkel gik videre og forklarede hvad sit forskningsprojekt gik ud på,

Min indfaldsvinkel var, nu da jeg havde denne her baggrund indenfor kunstig intelligens, hvor man havde fundet ud af, at det klassiske logik drevne paradigme havde spillet fallit, at spørge: hvad ville de her nye erkendelser om hvordan mennesket tænker, betyde for den måde man så på matematikken?

Mikkels forskning – naturalisme

Jeg tog udgangspunkt i naturalismen, hvor man beskriver et fænomen – i det her tilfælde matematikken – ved kun at tage udgangspunkt i videnskabelige teorier om mennesket og virkeligheden omkring os.

Mikkel forklarer, at naturalismen selvom den umiddelbart virker ukontroversiel, langt fra er det. F.eks. udelukker den en del klassisk matematik-filosofi, som f.eks. Platonismen.

Mit bidrag er at jeg har gjort op med en reduktionisme som typisk ligger i de naturalistiske beskrivelser af matematikken. Man ville altid forsøge at benytte én forklaringmodel til at reducere matematik til én type entiteter.

Mikkel forklarer, at der særligt var tre sådanne forklaringsmodeller indenfor naturalismen. Den evolutionsbiologiske model, hvor alt matematik kan forklares som et resultat af Darwinistisk evolution. Den kognitionsteoretiske model, hvor man forklarer matematikken ud fra de måder mennesket tænker på. Den tredje model, den socialkonstruktivistiske, vil forklare matematikken ud fra sociale forhold, f.eks. menneskelig interaktion, politiske magtforhold, osv.

Vi spurgte ham hvad matematikernes reaktion er på, at deres emnefelt gøres til genstand for sociologien, biologien, og kognitionsteorien.

Man møder både modstand, men også genkendelse. Der er nogle der ikke bryder sig om at man siger, at matematik blot er et udtryk for ens natur. At det ikke er evige sandheder, men er påvirket af vores kultur og vores biologi. Det er der mange matematikere, der tager anstød af, at matematikken ikke består af universelle sandheder.

Der hvor jeg for alvor møder modstand, det er blandt dem som ikke er forskningsmatematikere, f.eks. gymnasielærere – de bliver meget vrede. Jeg har skrevet nogle populærvidenskabelige artikler – f.eks. om at man ikke logisk fuldstændigt kan redegøre for matematikkens grundlag – hvor jeg har fået vrede e-mails fra gymnasielærere, der mener, at der godt kan være noget om snakken, men at det ikke er noget man skal fortælle offentligt. De vil godt bevare det billede af, at matematikken er noget helt særligt. De mener, at det blot komplicerer sagerne og, at det er meget lettere at undervise, hvis man bare kan komme med de der endegyldige sandheder.

Men de forskningsmatematikere som jeg har snakket med, de er klar over, at der er problemer og er interesserede i at finde ud at hvad matematik egentlig er. Mange matematikere er meget reflekterede og åbne, og er helt med på at matematik ikke blot er evige sandheder. De er interesserede i at få en mere brugbar matematik-filosofi.

Efter at have hørt lidt om matematikerenes reaktioner på matematik-filosofien, var vi også interesseret i at høre lidt om hans tanker vedrørende matematikkens og filosofiens sammenspil. Her forklarede Mikkel:

Der var en meget tæt sammenknytning mellem matematik og filosofi langt op i historien, også i de første årtier af 1900-tallet. Der var mange store filosoffer, der også var matematikere, og omvendt... man kan ikke sige hvad de var, om det var det ene eller det andet. Leibniz, Descartes, Hilbert, Gödel, Wittgenstein... I 1600- 1700-hundrede tallet skelnede man ikke mellem om man var filosof eller matematiker. Det stoppede i 1930'erne. Der blev matematikfilosofien – i hvert fald den som matematikere beskæftigede sig med – til matematisk logik som egentlig bare blev en underdisciplin af matematik. Der var selfølgelig nogle, som brød ud og filosoferede mere frit over hvad matematik var, udover den matematisk-logiske eller formalistiske ramme. F.eks. Ruben Hersh og Paolo Mancosu. De matematikfilosoffer vi har herhjemme er sådan nogle som Jessica Carter, og Henrik Kragh [begge matematikere, red.].

Mikkel forklarer, at der nu er flere folk med forskellige baggrunde, som bedriver matematik-filosofi, f.eks.

kognitionsteoretikere, biologer, og filosoffer, som slet ikke har en faglig baggrund indenfor matematik, men som betragter matematik, som objekt – de ser på matematik udefra.

Videnskabsteori – fagets relevans

Kurset "Videnskabsteori for de matematiske fag" som Mikkel underviser i er et specielt kursus, idet indholdet ikke som sådan er matematik, men bevæger sig på et metaniveau, hvor matematikken selv, er genstand for videnskabelige undersøgelser. Vi spurgte Mikkel hvad kursets formål er.

Det er en opfordring til at tænke selv. Det er en begyndelse, som skulle være nok til at folk selv kan komme videre, hvis de interesserer sig for videnskabsteori.

Vi spurgte om man kan risikere, at det tværfaglige kommer til at tage lidt af fagligheden ud af matematik uddannelsen. Eller omvendt, om man kan få et fagligt udbytte ud af Videnskabsteori-kurset.

Nu fylder matematik ret meget i det kursus, og jeg tror da, at folk får en større bevidsthed om hvad det er de laver, og det kan måske også i sidste ende gøre dem til bedre matematikere. Når man er færdig og skal være matematiker eller benytte matematik i forskellige sammenhænge, så håber jeg, at man kan få glæde af at have en større indsigt i hvad det er man egentlig gør. Jeg kan ikke huske citatet præcist, men Aristoteles siger noget i stil med: *'En person med erfaring kan godt vide hvad der sker, men ikke hvorfor. Han kan nok handle, men det sker på samme automatiske måde som fx. ild brænder. Mesteren derimod forstår også hvorfor tingene sker, og hvorfor han må handle som han gør, og det er det, der gør ham til mester'.*

Men, tilføjer Mikkel,

Det tværfaglige, og metaniveauet må heller ikke stå i vejen for den egentlige faglighed. Jeg er meget ydmyg over at jeg overhovedet får lov at tage et 1/8-årsværk af folks tid. Jeg synes ikke man kan forlange mere.

Hvad så med dem, der ikke skal være deciderede matematikere?

Dem der bliver gymnasielærere vil have en del glæde ud af at have metaniveauet med. Det vil gøre det lettere for undervisningen, hvis man selv har en lidt dybere forståelse af hvorfor man gør det man gør. Endeligt er der dem, som kommer ud i erhverv. De kan have mere glæde af nogle af de andre dele af kurset, etik delene, og delene om forholdet mellem universiteterne og erhvervslivet. Jeg tror, at der vil være noget at komme efter for de fleste, i hvertfald på lidt længere sigt.

Hvad er Matematik?

Vi ville høre om Mikkel, som en, der kommer udefra, kunne give en definition på hvad matematik er.

Det var et godt spørgsmål. Ja, det er faktisk utroligt svært at sige. Altså en klassisk definition tror jeg ville være at matematik er det der beskæftiger sig med antal og størrelser. Det vil så at sige være de to rødder matematik begynder med og så er der bygget ovenpå med lag på lag af abstraktion, nye inspirationskilder og behov fra videnskaberne omkring. Der har været et behov ikke bare for at beskrive antal og størrelser, men også - for at tage et af de helt store eksempler – for at beskrive bevægelser og dynamik og på den måde får man så klistret analysen på og så videre.

Det er en sjov definition du kommer med. Den handler om hvad der udgør objekterne, men siger ikke noget om metoden – beviset – som mange måske vil mene er kendetegnende for matematik.

Det kan I have ret i, men det er måske også fordi jeg har et udgangspunk, der siger, at man ikke må glemme rødderne, og det er måske den fejl man begår i den der meget hårdnæsede formalisme; hvor man så at sige sparker den stige, man selv er kravlet opad væk under sig. Beviset er for mig et argument for, at en bestemt sætning er rigtig. En klassisk definition på et bevis er, at det er en logisk gyldig slutning fra sikre præmisser som dermed gør en sætning sand – ubetvivlelig sand. Det vil jeg ikke sige. Jeg vil sige, at det er et argument, der gør at vi overbeviser os om, at en sætning holder i et eller andet omfang. Men så kommer spørgsmålet så: 'Jamen, hvad er så et argument?' og det er derfor jeg hellere vil sige et argument, for det kan være så mange ting. Nu har vi et bestemt syn på hvad et argument er; hvor det skal have en formel struktur, men det kunne være alle mulige andre ting og det har det været historisk set – det kunne være en tegning eller en figur.

Hvad med aksiomerne? Altså den aksiomatiske tilgang som vi kender helt tilbage fra Euklid, vil du mene, at den er en central og nødvendig del af matematikken?

Euklids geometri var aksiomatisk opbygget, og den stod som en monolit i matematikken, men man havde masser af matematik uden om som var opbygget ikke aksiomatisk, tag for eksempel analysen. Det var først i midten af 1800-tallet da man opdagede at det var noget værre rod man havde vovet sig ud i med uendelighed og alt det andet man ikke kunne styre, at man fik et enormt behov for at sige lad os gøre lige som Euklid, lad os få det på sikker grund og bygge det aksiomatisk op.

Nu er vi i en virkelighed, hvor matematikken er aksiomatisk opbygget og det spiller selvfølgelig en rolle, men måske ikke den rolle det var tiltænkt, hvor det skulle have givet absolut sikkerhed. Det giver selvfølgelig en nogenlunde sikkerhed, hvor der ikke er nogle åbenlyse inkonsistenser. Man får en forståelse af hvordan argumentsstrukturen er og man får klarlagt hvilke forudsætninger man har brug for at gøre sig. Nu står det jo lysende klart, at der er ting man ikke kan gøre unden at have udvalgsakisomet med.

Man kunne måske forstille sig at der i fremtiden ville opstå flere forskellige aksiomssystemer alt efter inden for hvilken del af matematikken man arbejder inden for, eller hvilke ønsker man ellers måtte have?

Det er stadig et meget rigt forskningsområde inden for den del af matematik filosofien jeg vil kalde for matematisk logik. Både i 1910'erne, 20'erne og 30'erne eksperimenterede man med en del forskellige aksiomssystemer, og i dag overvejer man meget om man skal tilføje aksiomer til ZFC [Zermelo-Fraenkel set theory with axiom of Choice, et aksiomssystem for matematikken, red.]

og hvilke konsekvenser det vil have. Der er en matematikfilosof som hedder Penelope Maddy, der har skrevet en hel del om det. Nu bygger ZFC jo på mængdelære, men der er også andre, der overvejer om man skulle tage udgangspunkt i nogle andre teorier; for eksempel kategoriteori.

Men tror du der vil være tale om, at man vil erstatte ZFC med for eksempel et kategoriteoretisk grundlag, eller vil vi måske se en pluralitet af aksiomssystemer [for hele matematikken], der eksisterer side om side på samme måde som den euklidiske og ikke euklidiske geometri gør idag?

Det er jo et sociologisk spørgsmål I stiller der, for det kommer an på hvordan matematik fungerer som paradigme. Historisk set har matematik været utroligt paradigme stærkt, hvor det har været ét paradigme, der har domineret. Det ligger måske blandt andet i den træning man får som matematikker, man bliver indsocialiseret meget effektivt i et bestemt paradigme. Man bruger al sin energi på at lære at gøre al ting sådan som læreren gør det. Hvis du kigger i matematikhistorien har der været meget få afvigende paradigmer. Et eksempel er intuitionismen. Der er stadig væk nogle få intuitionister tilbage, men det er ikke sådan at man har to forskellige skoler.

Mikkel nævner her computerens indtog i matematikken og den eksperimentelle matematik som et område, hvor man måske så småt kan se et opgør med, hvad der skal til før vi tror på en sætning, altså hvad der udgør et godt argument.

Det er præcist der [med hensyn til hvornår vi skal godtage en sætning] hvor matematikkerne har været forbløffende enige. Ikke over historisk tid, men hvis du tager det tværsnit på et givet tidspunkt så har der, måske ikke været 100% enighed, men en ret stor enighed. Hvis du for eksempel sammenligner med fysikken, hvor for eksempel Einstein ikke fik Nobel Prisen for relativitetsteorien, fordi der var mange, der ikke troede, at den var korrekt. Og blev ved med at tro at den ikke var korrekt helt indtil de døde. Så du ville finde folk der ikke troede på den i 50'erne og 60'erne. Man kan sikkert også finde eksempler i matematikken, men jeg tror, at det ligger i matematikkens natur, at der er en højere stræben efter konsensus end i de andre videnskaber, selvom det selvfølgelig ikke er sådan at der altid er konsensus. Jeg vil mene at der er en god forklaring på det. Hvis vi taler om det sociologiske niveau er matematik normativt på en måde som andre videnskaber ikke er. Hvis man overvejer hvad genstandsfeltet for matematik er, er det ikke på sammen måde et oplagt genstandsfelt, som man kan gå ud og lave en falsifikation på som i andre videnskaber; der er en virkelighed der ude, som man i et eller andet omfang kan holde teorierne op i mod. Det er der ikke på samme måde i matematikken, og derfor hviler matematikken på at vi er enige om, hvad der er rigtigt. Derfor mener jeg at der i sidste ende er en sociologisk funderet normativitet i matematik. Når vi siger at tingene er sande, så er det fordi vi er enige om, at det er det rigtige. Og i modsætning til socialkonstruktivisterne, der vil sige, at der kun er sociale årsager til, at vi er enige, vil jeg sige, at der kan være rigtige gode, biologiske funderede, grunde til at vi er enige.

Mikkel fortæller at årsagerne hertil skal findes i den måde vi er i verden på, samt den måde vi går til naturen på. Verden har dog ifølge Mikkel ikke en autoritet til at bestemme hvad resultatet af for eksempel "2+2" er. Denne autoritet ligger i sidste ende i det sociale fælleskab.

Indimellem når man til nogle punkter, hvor der ikke er vedtaget noget svar endnu. Det kan være, for at tage et historisk eksempel, hvis man har en uendelig række. Går man tilbage til 1800-tallet var der mange forskellige svar på hvad der var det rigtige at gøre. I sidste ende blev en af dem valgt ud af forskellige årsager, men her kommer den virkelige verden jo til kort, eftersom der ikke er uendelige mange objekter. Det skyldes altså alle mulige årsager om, hvad der passede bedst ind i den matematik man havde. Det svar som I får når I læser, det er en konsensus som man blot har besluttet. Man kunne gøre det på alle mulige andre måder, det vil der ikke være noget til hinder for udover at det ville blive lidt besværligt at regne, eller at man ikke ville kunne få de resultater man gerne ville. Det er altså en social konsensus som bliver indsocialiseret, når man studerer. Derfor mener jeg, at autoriteten til at sige hvad der er rigtigt eller forkert i højere grad ligger i det sociale fælleskab indenfor matematik, end den gør indenfor for eksempel et fag som fysik eller kemi. Der har vi en fysisk virkelighed, der i højere grad har autoritet til at sige hvad der er rigtigt og forkert. Det ligger i matematikkens natur, at der er sådan en høj grad af konsensus. Der bliver taget nogle beslutninger i de sociale fællesskaber af matematikere, som der ikke stilles spørgsmålstegn ved. Så hvis man vil lege det spil der hedder matematik, så må man acceptere disse beslutninger. Det vil være min analyse og det er der rigtige mange der vil være uenige i.

Matematik og computere

Slutteligt talte vi om computernes indtog i matematikken, særligt om kunstig intelligens og perspektiverne for de så kaldte "automated theorem provers".

Da man stod i 50'erne og lavede computere, så regnede man med at der bare skulle lidt mere fart på computerne så kunne matematikerne godt pakke sammen fordi computeren ville kunne gøre det meget lettere og hurtigere. Det har vist sig ikke at holde stik. Der hvor vi er i dag, er at avancerede computerprogrammer har noglelunde samme niveau som en første- eller andenårsstuderende på universitetet. Da må man så overveje hvorfor er de ikke bedre? Hvis man var rigtig formalist skulle man umiddelbart tro at det var noget de[computerne, red.] bare kunne. Det er jo et formelt system, så umiddelbart burde man kunne komme fra a til b vha. "tommelfingerregler", når nu en computer kan søge mange flere muligheder igennem end et menneske. Hvorfor er de så ikke bedre? For det første må man jo notere sig, at det er en befriende tanke for os matematikere at man ikke bliver arbejdsløs lige foreløbig. Vi kan faktisk noget, med vores lille fedt- og vanddrevne hjerne, som de der milliondollars-maskiner ikke kan.

Det vi kan er at indrage viden fra flere forskellige områder, så vi kan omformulere problemer fra én kontekst til en anden hvor de bliver lettere at løse. For eksempel et af de problemer som computere aldrig kan løse, eller som rigtigt mange programmer har problemer med, er at vise at der kun findes én to-gruppe [gruppe af orden to, red.]. Hvis man giver en førsteårsstuderende det problem, så vil han tænke sig lidt om og så vil han tegne gruppe diagrammet[kompostionstabellen, red.] og prøve at plotte ind. Så kan man lynhurtigt se at det kun kan fyldes ind på én måde, og så kan der kun være én to-gruppe. Men en computer kan ikke tegne diagrammet. Den sidder med aksiomerne, og så er det kolossalt svært at bevise det udfra aksiomerne. I gruppeteori vil du hurtigt skulle vide noget om primtal og divisorer, for at kunne vise mange af sætningerne. Ja, faktisk bare for at kunne formulere dem.

Mikkel forklarer at det i den forstand er meget vanskeligt blot at bedrive matematik indenfor kun ét område, da man som eksemplet ovenfor viser, at man hurtigt for

brug for at indrage viden fra andre dele af matematikken.

En sidste ting som computere ikke kan, er at de ikke kan formulere højereordensbegreber. Det at man kan introducerer højereordensbegreber, gør at man kan beskæftige sig med tingene netop på et begrebsmæssigt højere niveau. Man kan skære tingene ud i blokke, som gør det lettere at flytte rundt med dem og det gør så, at et menneske lettere kan nå højere op i matematikken. For at give en analogi der måske er mere forståelig, så kan man sige at hvis computeren havde lært geometri, så ville den blive ved med at beskæftige sig med punkter mens vi mennekser ville indføre linier, cirkler og polygoner og det vil gøre det meget lettere for os at lave teoremer.

Mikkel fortæller videre at noget vi kan, er at benytte os af analogier, så hvis vi har en metode der virker i et bevis kan vi forsøge at overføre til et andet, hvor vi genkender et lignende mønster. Det påpeger Mikkel dog kræver fantasi, og det er derfor at maskinerne har så svært ved det, for teknisk set er en analogi eller en metafor altid et falsk udsagn.

De her "automated theorem provers", altså kunstige intelligenser, der prøver at bevise sætninger, de er jo perfekte formalister. Og deres problemer med at arbejde viser at formalismen i sidste ende kommer til kort, på den måde at den ikke beskriver hvad det er matematikere gør fuldstændigt. Den beskriver noget af det matematikere gør, men den beskriver ikke det hele, og jeg tror at det den har udeladt er noget af det vigtigste. Præcis de der evner, at danne konceptuelle sammenblandninger, danne analogier og danne højereordensbegreber. Når man laver matematik så er det altså ikke kun den der skaksspils-intelligens der skal i brug. Vi mennekser, vi bruger hele vores repertoire af kognitive redskaber, når vi laver matematik, og det er derfor, at I er bedre til at lave matematik end en computer.

Med denne højst opløftende konklusion slutter vores interview med Mikkel.