

5 hurtige til de voksne

– om intuitionisme

Jingyu She og Maria Bekker-Nielsen Dunbar

“Hvad er det, du vil med matematik? Du vil gerne opbygge nogle modeller af et eller andet, som på en eller anden måde formaliserer en eller anden tankegang eller idé.”

– Asger Törnquist

I anledning af vinterens mangel på sollys er to HCØ-unger gået i tænkeboks. Til daglig laver vi beviser til højre og venstre ved hjælp af uendelige approksimationer - men giver det overhovedet mening?

Luitzen Egbertus Brouwer³ lavede sit eget logiske system, hvor det var dybt urimeligt bare at føre behandlingen af endelige mængder over på uendelige mængder; hvor det beviselige kun kunne bevises ved konstruktion (og ikke modstrid). Hvorfor er han gået i glemmebogen, og hvad hvis vi alligevel begynder at tænke matematik på andre måder?

Følgende er en vurdering fra Asger Törnquist, matematiker på IMF, som beskæftiger sig med logik og mængdelære:

“I en hvis forstand tabte Brouwer. Han gjorde en meget, meget fornuftig indvending mod ukritisk at anvende den samme logik til at tale om endelige ting og uendelige ting. Men i dag er det næsten umuligt for os at kunne sympatisere med det Brouwer konkret sagde, for det reflekterer et meget mere ufærdiggjort forhold til uendelige mængder. Vi er, på godt og ondt, blevet formet af at have brugt vores nuværende mængdelære i lang tid. Nu spiller alternative logiske systemer mest en rolle inden for data-logi. Nok fordi de er interesseret i konkret beregnelighed og beviselighed frem for abstrakt sandhed.”

³Kendt nederlandsk topologiforsker og særligt intuitionismens fader

I de foregående årtier er debatten måske ebbet ud, men vores nysgerrighed er blevet vakt! I denne artikel har vi lokket tre af HCO's 'voksne' (**AT**, Asger Törnquist; **EH**, Ernst Hansen og **MWJ**, Mikkel Willum Johansen) til at gribe matematikken an fra en filosofisk vinkel ved hjælp af en meme fra intuitionism.org.

⁴

Mener du, at middelværdisætningen ikke holder, sådan som den normalt er formuleret? (cf. Kalkulus)

AT: Uden denne sætning ville vi have afvist det begreb om kontinuerede funktioner som Weierstrass eller Cauchy indførte. Den blev simpelthen nødt til at være sand for, at den model for kontinuerede funktioner og reelle tal, de var ved at opbygge, kunne opfattes som korrekt af samtiden. Vi får altså det kontinuitetsbegreb vi gerne vil have, som passer meget, meget godt med den type resultat vi er interesserede i at bevise. Jeg har ikke noget imod den [middelværdisætningen, red.], overhovedet ikke.

EH: Nej. Beviset for middelværdisætningen beror på supremumsegenskaben, og den egenskab er der INGEN, der vil frasige sig. Selvfølgelig kan man opstille dogmeregler for sig selv om, at man ikke må dit og dat og så se, hvor langt man kan komme under de betingelser. Man kan binde sine hænder på ryggen og prøve at lave reel analyse uden supremumsegenskaben, hvis man synes, at den udfordring lyder sjov. Eller man kan gøre som visse excentriske

⁴ Vi vil gerne rette en særlig tak til Frederik M. Lauridsen for hans uundværlige støtte under samtalen med Törnquist. Det skal desuden nævnes, at artikelforfatterne oplevede et lille uheld med diktafonen under Ernsts interview. Derfor opfordrer vi til, at I hjælper os med at foretage endnu et interview. Så skriv ind til famos@math.ku.dk, hvis der er noget, I gerne vil vide om ham! (Inspiration kan evt. hentes i Facebookgruppen 'Ernst Hansen Facts')

sandsynlighedsteoretikere og lave teori for endeligt additive sandsynlighedsmål frem for tælleligt additive sandsynlighedsmål. Det kan da godt påkalde sig en vis nysgerrighed fra os andre. Men primært opstår der en masse bøvl med selvskabte problemer, uden at nogen bliver klogere af det.

MWJ: Det tør jeg ikke udtale mig om, da jeg ikke kender det konkrete eksempel i dybden.

Kan man for ethvert matematisk spørgsmål nemt bygge en maskine , hvor en lampe markeret “Ja” lyser, hvis det er sandt, og en lampe markeret “Nej” lyser, hvis det er falsk?

AT: Følger man Church, Gödel og Turing, så viser det sig, at det at afgøre sandhed er noget helt andet end at afgøre beviselighed. Beviselighed er noget, hvor der findes en semieffektiv, mekanisk proces; sandhed tillader ikke en lignende proces. Mit udgangspunkt er at kigge på det her ud fra den analyse som Church, Gödel og Turing gav os, og så er svaret nej, denne maskine findes ikke.

EH: Jeg synes, at spørgsmålet har indbygget en misforstået opfattelse af, hvordan vi arbejder som matematikere. Hvis ikke man kan bevise (eller modbevise) en påstand, så ændrer man påstanden. Hvis man heller ikke kan bevise den påstand, så ændrer man den igen. Man bliver ved og ved med at rette påstanden ind, indtil der fremkommer et eller andet, som man kan bevise. Jeg synes slet ikke, jeg skelner mellem, om en påstand er logisk uafgørlig eller om jeg bare er en knold til bevisteknik. Det er to sider af samme mønt.

MWJ: Helt klart nej. Matematikken støder hele tiden på eksempler, der ikke på en klar måde dækkes af de regler, man hidtil

har fulgt. Så er der brug for at genforhandle hvad den præcise betydning af de indgående begreber er, hvilke slutningsregler, der er gyldige mv. Tænk på, hvordan indførelsen af et nyt artefakt i form af abstrakte symboler fundamentalt ændrede matematikken, både hvad angår metoder, epistemiske standarder (i.e. kravene vi stiller til et gyldigt bevis) og objekter. Det er naivt at tro, at vi NU har nået et stadie, hvor alle forhandlinger er på plads og alle tvivlsspørgsmål besvaret. Den slags kan en maskine ikke klare. Matematikken er en levende videnskab, en maskine vil kun kunne give os et fossil.

Er kontinuumshypotesen (CH) en meningsfyldt påstand, der har en afgørende sandhedsværdi, som vi bare ikke kender til?

AT: Jeg er egentlig ligeglad, men min personlige holdning er, at CH⁵ burde være falsk. Det er dybt, dybt urimeligt, at de reelle tal, der som grundlæggende ide har transcendens, skulle have en velordning hvor alle initialsegmenter er tællelige, for så fremstår elementerne jo ikke som værende særligt transcendent. Jeg har altid håbet lidt på, at kontinuum var et eller andet fuldstændig latterligt stort, enormt. Folk, som arbejder med aksiomet PFA, føler almindeligvis, at kontinuum burde være $\aleph_2$, fordi PFA⁶ medfører det. Jeg tænker egentligt, at det er fint (selvom $\aleph_2$ ikke er så stort igen), for PFA har så mange pæne konsekvenser, som passer godt med mit verdenssyn som deskriptiv mængdeteoretiker.

⁵http://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis

⁶PFA: Proper Forcing Axiom, som udover mange andre seje sager giver et system, der gør det muligt at analysere visse kvotientgrupper og strukturen af deres automorfigrupper. En konsekvens af PFA er, at kontinuet har kardinalitet $\aleph_2$ i stedet for $\aleph_1$ som givet ved CH.

EH: Kontinuumshypotesen ligger langt fra mit interesseområde – jeg har aldrig stået i en situation, hvor den betød noget som helst. Så jeg har ikke stærke følelser der. Man kan se på udvalgsaksiomet⁷ i stedet for. Her må jeg sige, at udvalgsaksiomet ikke er min kop the! Påstande, der afhænger af udvalgsaksiomet, er efter min bedste overbevisning fup og fidus. Man kan bruge udvalgsaksiomet til at komme med visse farvestærke generelle påstande. F.eks. at hvert vektorrum har en basis. Det har da en vis attraktion at kunne slynge den slags påstande ud. Men hvis man tillader sig selv at argumentere på den måde i visse situationer, så må man også gøre det i alle mulige andre situationer. Og det viser sig, at man på den måde får skabt et bestiarium af monstre så skrækkindjagende, at man er nødt til at kigge væk! De mareridt, man skaffer sig på halsen, er så høj en pris at betale, at det er bedre at forbyde udvalgsaksiomet. De vektorrum jeg arbejder med, de HAR en basis. Det følger af meget mere konkrete og jordnære argumenter end udvalgsaksiomet. Har kæmpestore vektorrum også en basis? Well, what do I care? Hvis udvalgsaksiomet er prisen for at svare ja, så svarer jeg nej!

MWJ: Her er svaret nej. For det første vil jeg som anti-realist hævde, at ingen matematiske sætninger har en sandhedsværdi uafhængigt af den menneskelige bevidsthed, og for det andet er de begreber, der indgår i kontinuumshypotesen, ikke klare. Der er stadig meget at forhandle om her!

⁷Ifølge dette kan du blive millionær ved at rive en halvtredser over i endelig mange stykker og sætte den sammen til to halvtredser. Hvis du ikke tror på aksiomet, kan du blot rive halvtredseren i to og sætte den sammen med tape - det er lovligt at betale med sådan en.

Giver et konstruktivt bevis giver større indsigt end et klassisk bevis?

AT: Ja. I nogle sammenhænge kan det være afgørende for os, at et bevis er konstruktivt, og vi vil måske endda kræve det. For mig er det fuldstændig relativt til, hvad det er, vi prøver at beskrive matematisk, og hvad vores mål er. Jeg kan selv meget bedre lide et konstruktivt bevis, når det er tilgængeligt og ikke alt for langt. Det giver ofte mere information.

EH: Masser af 'klassiske' beviser er da konstruktive. De fleste af os vil være enige om, at et konstruktivt bevis gør tingene mere klare end et indirekte bevis. Men hellere et bevis, der ikke er konstruktivt, end intet bevis.

MWJ: Nej. Modstridsbeviser kan sagtens give masser af indsigt.

Mener du, at alle matematiske sandheder er sande, men at nogle af dem er mere sande end andre?

AT: Det kunne være interessant at opbygge en logik, som kunne reflektere den typiske matematikers opfattelse af, at nogle matematiske sandheder er mere sande end andre. Det er jo netop pointen med matematisk logik, at man kan bruge matematisk tankegang til at studere de strukturer som ligger til grund for matematisk tankegang. Jeg ved ikke, om jeg har en holdning til dit spørgsmål, så jeg vil lade det være ubesvaret!

EH: Jeg vil f.eks. mene, at sætninger bevist uden udvalgsaksiomet er mere sande end dem, der er bevist med. Sætninger, der kræver udvalgsaksiomet, er i bedste fald 'svagt sande'.

MWJ: Ja. Hvis vi bliver tvunget til at revidere formodningsnetværk, vil der altid være dele, vi hellere opgiver end andre. Fx er jeg mere villig til at opgive velordningssætningen, end at $1+1=2$.