Gæt et tal

Søren Eilers

Et gæt

En aften midt i oktober faldt jeg på nettet over en konkurrence afholdt af radioprogrammet Detektor på P1 om at gætte det tal mellem 0 og 100, der var halvdelen af gennemsnittet af de indkomne svar. Jeg tænkte over det et stykke tid, og da det var gået op for mig at det ikke var en konkurrence jeg ville kunne vinde med matematik alene kom jeg i tanke om at jeg havde set noget lignende før på Politikens bagside. Efter lidt søgning lykkedes det mig at finde data for en tilsvarende konkurrence udført i 2005 i regi af Økonomisk Institut ved Københavns Universitet. Opgaven var der at ramme 2/3 af gennemsnittet af de indkomne svar, og præmien var 5000 kroner. Der indkom 19196 svar og gennemsnittet blev 32,407, således at man ville vinde ved at svare 21,605, jf. [1] samt figur 1 (øverst).

Jeg besluttede mig for at svare i Detektors konkurrence ud fra forudsætningen om at deltagerne der, ville opføre sig på samme måde som deltagerne i Politikens. Men jeg var selvfølgelig nødt til at korrigere for at mens man i den gamle undersøgelse skulle ramme to tredjedele af gennemsnittet, så var min opgave at ramme halvdelen.

For begge konkurrencer, tænkte jeg, gælder at jo længere man tænker over sagen (eller tillægger sine konkurrenter at tænke over sagen), jo lavere et svar giver man. I Detektors konkurrence kunne man ræsonnere som følger: Enhver kan se at svaret ikke kan blive mere end $\frac{1}{2} \cdot 100 = 50$, så derfor er det dumt at svare med et tal større end 50. Men hvis enhver kan se det, og følgelig svarer med et tal mindre end 50, så kan svaret ikke blive mere end $(\frac{1}{2})^2 \cdot 100 = 25$

og så er det jo dumt at svare mere end 25. Men hvis alle andre tænker sådan og derfor svarer med et tal mindre end 25, så kan svaret ikke blive mere end $(\frac{1}{2})^3 \cdot 100 = 12\frac{1}{2}$ og så videre, i en proces man ikke meningsfuldt kan tage til grænsen. I konkurrencen fra 2005 bliver ræsonnementet det samme, men med potenser af $\frac{2}{3}$ i stedet.

For at vinde konkurrencen gælder i begge tilfælde at man skal gennemføre ræsonnementet **én gang mere** end gennemsnittet af deltagere. Jeg løste derfor ligningen

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot 100 = 21,605$$

ved at tage logaritmer på begge sider, og fik at

$$x = \frac{\log(0,21605)}{\log(2/3)} \simeq 3,779$$

Det betyder at i den gamle konkurrence gennemførtes ræsonnementet i snit 2,779 gange, og man ville vinde ved at gennemføre det 3,779 gange, og derfor beregnede jeg

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3{,}779} \cdot 100 \tag{1}$$

som er cirka 7,2846. Jeg begik herefter en uvigtig men unødvendig afrundingsfejl og svarede **7,289**, og jeg var endda så fræk at jeg gav motivationen

```
fordi det er 100*(0,5)^(log(0,21605)/log(0,6666))
```

En sejr

Og så vandt jeg sgu! De 595 der deltog svarede i snit 14,5671 og derfor kom jeg nærmest måltallet 7,2836. Sølvmedaljerne gik til to andre der havde svaret 7,16, så marginalen var ret bred, men det ærgrer mig selvfølgelig lidt at hvis jeg ellers havde evnet at regne rigtigt med tre decimalers nøjagtighed så havde svaret (1) kun været lige godt en promille forkert. Thomas Buch-Andersen, der er vært for og idemand bag Detektor, ringede mig op og interviewede mig, og i programmet fik jeg spillet en fanfare til min ære, og fik en mulighed for fuldkommen skamløst at reklamere for at "matematik er et fantastisk kraftfuldt værktøj".

Men jeg fik ikke lov at smage sejrens sødme ret længe. Den første – men absolut ikke den sidste – der gav lyd var matematikstuderende Sune Jakobsen, der problematiserede den måde jeg havde arbejdet med gennemsnit på. Jeg har to ting at sige til det. Det første er, at det svarer til at fortælle en person der lige har vundet en million i Lotto at han er et fjols når han deltager i et spil med kun 60% tilbagebetaling. Det andet er at det har man jo ret i.

Forudsætningen for mit svar var jo at de to konkurrencer var ækvivalente og at man kunne transformere sig frem og tilbage mellem dem med en given funktion $\phi_{DP} : [0;100] \to [0;100]$. Den letteste måde at bestemme ϕ_{DP} på er nok gennem brug af logaritmer med forskellige grundtal. Sætter vi

$$f_P(x) = \log_{3/2}\left(\frac{x}{100}\right) \qquad f_D(x) = \log_2\left(\frac{x}{100}\right)$$

får vi jo netop at de svar i de to konkurrencer der svarer til samme antal iterationer af argumentet herover sendes til samme værdi i

$]-\infty;0]$, så vi finder at

$$\phi_{DP}(x) = f_D^{-1} \circ f_P(x) = 100 \cdot \left(\frac{x}{100}\right)^{\alpha}$$

hvor

$$\alpha = \frac{\log 2}{\log 3 - \log 2} \simeq 1,7095$$

transformerer svar mellem de to konkurrencer på en måde der bevarer det jeg forestillede mig var det essentielle (udtrykket stemmer også i 0). Mit svar var således $\phi_{DP}(21,605)$. Men hvis vi oplister svarene $x_1,\ldots,x_N$ med $N = 19196$ fra Politikens konkurrence så siger Jensens ulighed, fordi funktionen ϕ_{DP} er konkav, at

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi_{DP}(x_i) \geq \phi_{DP}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

hvor der yderst sjældent gælder lighedstegn, og hvis vi tror på at folk svarer ens (via ϕ_{DP} og dens inverse ϕ_{PD}) i de to undersøgelser, så var det jo halvdelen af værdien på venstre side jeg burde have svaret. Det var jeg sådan set klar over – jeg er trods alt medlem af forskergruppen i ikke-kommutativ geometri – men da jeg ikke havde adgang til de individuelle værdier x_i, kun deres gennemsnit, var det ikke noget jeg tænkte så meget over. Og da jeg så kom så tæt på følte jeg mig helt sikker på at jeg havde løst opgaven med en blandning af empiri og overlegent ræsonnement, og glemte alle mine matematiske forbehold som jeg uden tvivl ville have fundet frem hvis ikke jeg havde vundet.

Nu blev jeg i tvivl igen, og da Sune havde fremskaffet de indkomne data $y_1,\ldots,y_M$ med $M = 595$ fra Detektors undersøgelse var en oplagt måde at undersøge sagen nærmere på at sammenligne fordelingen af $x_1,\ldots,x_N$ – der kunne ses på [1] – og

$\phi_{PD}(y_1), \ldots, \phi_{PD}(y_N)$. Resultatet var ikke ligefrem befordrende for min selvtillid. Som man ser i figur 1 var fordelingen af de transformerede svar fra Detektor dramatisk anderledes end den for de oprindelige fra Politiken; toppene ligger forskellige steder, og der er for de transformerede værdier en stor koncentration af svar omkring $\phi_{PD}(1) = 6,76$ der formentlig skyldes at Detektor havde formuleret konkurrencebetingelserne således at der var en del lyttere der, uvant med gængs matematisk terminologi, troede at de ikke måtte svare andet end positive heltal og derfor valgte at svare 1.

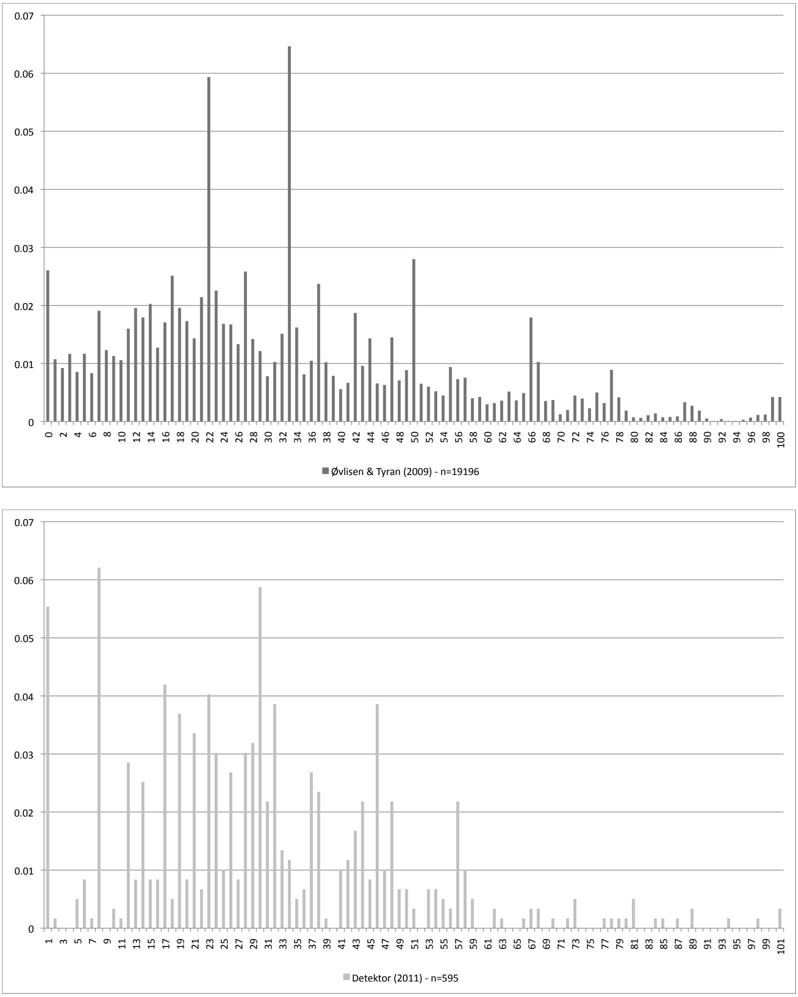
Jo længere jeg ser på figur 1, jo mere forekommer det mig at de eneste de to fordelinger af svar har tilfælles er at

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_i = \phi_{DP}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

og at min indsigt således var videnskabsteoretisk ækvivalent med den som Percival Lowell havde da han forudsagde Plutos eksistens og position baseret på en fuldkommen forkert teori om diskrepanser i Uranus og Neptuns baner.

Et efterspil

Nogle af mine venner har fremført at det var usportsligt af mig at deltage i konkurrencen, og en enkelt har endda ment at jeg burde få konfiskeret præmien, som det skete for den mand der i en alder af 31 år vandt en børnetegnekonkurrence i TV2 Lorry. Det er jeg selvfølgelig uenig i; jeg må nok indrømme at jeg er god til at regne med logaritmer, men i forhold til Nash-ligevægte og spilteori er min væsentligste kvalifikation at jeg har læst [2] (jeg har også set filmen i flyet – men jeg sov noget af tiden). Desuden er det ikke så let at konfiskere en fanfare.



Figur 1 Øverst: Svar fra Politikens konkurence. Nederst: Svar fra Detektors konkurrence transformeret med ϕ_{PD}

Men jeg burde måske have vidst at der lige i min nærhed var en klart overkvalificeret person, nemlig Frederik Øvlisen fra Økonomisk Institut, der underviser på ØkIntro og MikØk2. Det var Frederik der i sin tid forestod konkurrencen i Politiken og hans ph.d.-afhandling [3] og artiklen [4] er i høj grad baseret på observationer fra dette – et af verdens største – adfærdsøkonomiske eksperiment, hvor han fx kunne påvise at deltagere med længerevarende uddannelser svarede anderledes end dem uden. Forleden fik jeg, sammen med de studerende der er så heldige at følge MikØk2 i indeværende blok, en oversigt over denne konkurrences fascinerende historie og om Frederiks forskning i området. Jeg fik lokket ham til at beregne

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi_{DP}(x_i) = 18,3488$$

der altså siger at jeg burde have svaret 9,174, og ladet sejren gå til de to deltagere på 7,16.

Jeg trøster mig lidt med at hele øvelsen med konkurrencen var at vise at selv om der er et teoretisk korrekt svar, nemlig ligevægten 0, så kan man ikke vinde ved at være 100% rationel. Men at det skulle være nødvendigt at blæse Jensens ulighed – og alt hvad jeg ellers plejer at prædike – en hatfuld for at hive sejren hjem er alligevel noget af en kamel at sluge. Så måske vi bare skal blive enige om at jeg var lidt heldig. Det kan jo ske, også for en matematiker.

En tak

Jeg er taknemmelig for hjælp og bidrag fra Sune Jakobsen, Lotte Folke Kaarsholm, Danny Lund, Mogens Steffensen, Frederik Øvlisen og Detektor på P1.

Litteratur

[1] Fordeling af gæt i "Gæt Et Tal"s første runde i september 2005, http://konkurrence.econ.ku.dk/r/o

[2] Sylvia Nasar: *A beautiful mind. The Life of Mathematical Genius and Nobel Laureate John Nash.* Simon & Schuster, 1998.

[3] Frederik Roose Øvlisen: Essays in Bounded Rationality and Strategic Interaction. Ph.d.-afhandling, Københavns Universitets Økonomiske Institut, 2005, http://www.econ.ku.dk/forskning/publikationer/ph.d_serie_2007-/ph.d._137.pdf/

[4] Frederik Roose Øvlisen og Jean-Robert Tyran: Making an educated guess. Working paper, 2009.