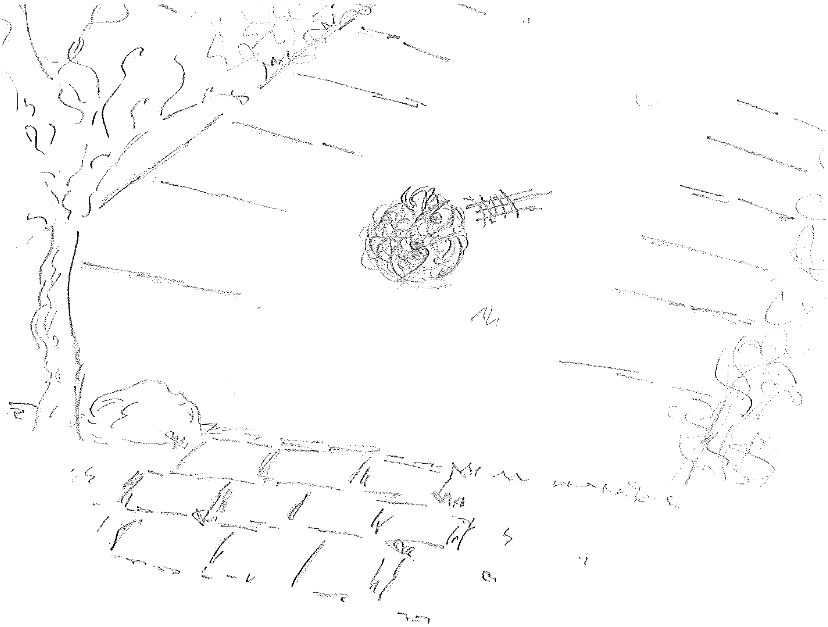
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

21. årgang, nr. 2, december 2011



År 2043 — Niels Bohr Science Park står næsten færdig.

Redaktion

- ⋆ Bo ‘Maling’ Malling Christensen,
- ⋆ Frederik Möllerström Lauridsen,
- ⋆ Jens Siegstad,
- ⋆ Jingyu She,
- ⋆ Kasper Fabæch Brandt,
- ⋆ Kristian Knudsen Olesen,
- ⋆ Kristian Peter Poulsen,
- ⋆ Maria Bekker-Nielsen Dunbar,
- ⋆ Martin Patrick Speirs,
- ⋆ Søren Knudby,
- ⋆ Søren Wengel Mogensen

Indhold

Vi bliver ved

Kristian Knudsen Olesen

Så kom endnu et blad! Redaktionen har hermed besluttet at gøre dette til en vane. Mere præcist er intentionen, at der skal udkommet et blad omkring midten af hver blok. Til dette nummer har FAMØS modtaget flere indlæg, og det er vi er på redaktionen rigtig taknemlige for.

Til alle jer der har deltaget i præmieopgaven, men ikke vundet, har vi ikke andet at sige end *prøv igen*. Chancen for at vinde førstepræmien er bedre end i Lotto,[1] præmierne er mere kreative og det er betydeligt mindre omkostningsfuldt at være med.

Det nærværende nummer af FAMØS indeholder (naturligvis) en række nye artikler, og redaktionen kan prale af, at disse er af megen forskellig karakter. Der er tekniske artikler, sjove artikler, beretninger, anmeldelser, en præmieopgave, en kryds-og-tværs, et spil og naturligvis et svar på sidste FAMØS præmieopgave. Alt dette i et enkelt blad.

Vi i redaktionen håber at du vil nyde dette nye nummer af FAMØS og hvis vi er heldige, bliver inspireret til selv at sende et indlæg til famos@math.ku.dk.

[1] Under antagelser som undertegnede finder rimelige.

Sådan smager dit nærmiljø

Rie Jensen og Katrine Gravesen

Vi afprøver diverse caféer og madsteder i nærheden af HCØ, så du tør tage chancen og prøve noget nyt.

Kender du det, at du har timer indtil til kl. 17 og bare ikke har fået planlagt aftensmad? Dit køleskab er tomt, og du har lyst til noget lækkert, men du ved ikke, hvor du skal gå hen. Hvad gør du? Du læser selvfølgelig den gastronomiske inspiration i FAMØS! Med udgangspunkt i livet som studerende og den daglige gang på HCØ, vil vi give dig en guide til spændende oplevelser i området omkring Universitetsparken. Her får I så de første to anmeldelser.

Kaffekilden, ★★★★☆☆

Kinderne fryser og næsen er kold. Du savner varme og hygge hos farmor. Det kan du få hos *Kaffekilden* på Tagensvej 41 (mellem Netto og Tagensborg). Caféen byder på hyggelig stemning i gamle møbler under lysekronens skær. De friske blomster pynter fint og giver et pift i den moderne retning. Vi bestilte en "dagens tilbud" (60 kr.), som bestod af en stor latte og et (STORT!) stykke cheesecake med bær. Der var nok at vælge imellem, og vores valg faldt på solbær. Derudover fik vi en chailatte og en (også STOR!) cookie (sammenlagt 48 kr.). Latterne og småkagen var gode, men især deres cheesecak kan varmt anbefales. Hvis man leder efter noget andet end det til den søde tand, så serveres der også sandwich af forskellig slags til 49 kr. Den morgentravle kan snuppe et morgentilbud bestående af en lille latte og en croissant (30 kr.). Der gives ikke studierabat, men man kan bruge internettet lige så tosset, man vil. Netop derfor sad mange og lavede lektier. Det er altså en oplagt mulighed til gruppearbejde, hvis man er træt af Vandrehallens grå vægge. Alt i alt var turen på *Kaffekilden* en hyggelig oplevelse, men for den studerende med flad pengepung er det måske lidt for hyggeligt. Den rare og afslappede stemning opfordrer dog til at blive hængende så længe man vil (de har åbent alle dage til kl. 22) og skulle man kede sig, så kan man tage sig et spil backgammon eller terninger.

GRØD, ★★★★★☆

Også maven skal forkæles i den kolde tid og ligesom nisserne har man nu mulighed for at finde lækker grød på Nørrebro. Restauranten hedder *GRØD* og ligger på Jægersborggade 50. Tirsdag til fredag fra kl. 7 til kl. 20 (weekenderne fra kl. 10 til 20) byder fire unge friske gutter syngende på alt fra havregrød med tranebær til risotto med trøffel. Konceptet lyder på en fast aftengrød om ugen, som udvikles om mandagen, hvor der derfor er lukket. Vi fik serveret porrerisotto med gedeostecreme (50 kr.), som nok aldrig bliver en favorit, men bestemt smagte og mættede godt. Derefter fik vi et dejligt glas æblegrød med vaniljeflødeskum og græskarkerner (25 kr.), som var et stort hit. Vi anbefaler dog, at man tjekker ugens ret på Facebook (du skal bare søge på GRØD), og støder du på en uge med trøfler, så er det med at skynde sig ned til GrødGutterne. Aftensmad kan fås fra kl. 17 og allerede en time efter er det lille lokale godt fyldt op. Alle sidder ved langbordet, og her kan sidde fire par og måske flere, hvis man nyder at sidde tæt. Hvis der ikke er en ledig plads, så har man mulighed for at tage grøden med hjem (det hedder to-go-grød). I denne herlige juletid vil GrødGutterne servere risengrød til både dig og nisserne, som du kan nyde over et hurtigt slag Bezzerwizzer. *GRØD* er et spændende alternativ til fastfood, og prisen er heller ikke afskrækkende i forhold til mæthed og tilfredsstillelse.

Et irrationelt bevis for irrationaliteten af $\sqrt[n]{2}$, $n > 2$

– En nedskydning af en gråspurv med en kanon

Frederik Möllerström Lauridsen

Et, for læseren forhåbentligt velkendt, gammelt ord fraråder på det stærkeste at kanoner benyttes i forbindelse med jagt på gråspurve. Trods denne formaning og den åbenlyse dårskab forbundet med at benytte førnævnte artilleritil at tage livet af ligeledes førnævnte dyr, følger her netop en sådan handling.

Sætning 1 *Lad $n \in \mathbb{N}$, med $n > 2$. Da er $\sqrt[n]{2}$ et irrationalt tal.*

Bevis. Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet med $n > 2$, og antag for modstrid at $\sqrt[n]{2}$ er rationalt, d.v.s. $\sqrt[n]{2} = \frac{a}{b}$, for $a, b \in \mathbb{N}$. Da har vi at

$$b^n + b^n = a^n$$

hvilket er absurd jf. [1] og [2][2]. □

Det overlades nu til den dydige læser at tjekke, at **sætning 1** ej benyttes i [1] og [2], således at der i det overstående ikke vil være tale om en cirkelslutning.

Litteratur

[1] A. Wiles. *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics **141** (3): pp. 443-551

[2] A. Wiles & R. Taylor. *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Annals of Mathematics **141** (3): pp. 553-572.

[2] For detalje udeladt i [1] og [2] se [3].

[3] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond & R. Taylor. *On the modularity of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$, Journal of the American Mathematical Society **14** (2001), pp. 843-939

Ansvarsfraskrivelse: Forfatterne til denne artikel har ikke læst nogle af de i bibliografien angivene artikler.

Rækken af de reciprokke primtal er uendelig

Jens Siegstad

Det har allerede siden 300 fvt. været kendt, at der findes uendeligt mange primtal. Vi kender alle Euklids elegante bevis. I 1737 gav Euler et analytisk bevis for at der findes uendeligt mange primtal. Euler viste følgende sætning.

Sætning 1 *Lad $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ betegne mængden af primtal nummereret i voksende orden. Da gælder at rækken*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

er divergent.

Vi får behov for følgende.

Lemma 2 *Antag at $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Da gælder at*

$$(1-x)^{-1} \leq e^{2x}. \tag{1}$$

Bevis. Lad $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. At vise (1) er ensbetydende med at vise følgende

$$1 \leq (1-x)\, e^{2x}. \tag{2}$$

Sæt $f(x) = (1-x)e^{2x}$. Da er $f'(x) = e^{2x}(1-2x) > 0$ for $x \in (0, \frac{1}{2})$. f er således voksende på $[0, \frac{1}{2}]$ og da $f(0) = 1$ følger uligheden (2) $\square$

Vi kan nu vise sætning 1.

Bevis. For ethvert naturligt tal $n \geq 2$ lader vi

$$P_n = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq n\}.$$

Vi viser først at

$$\prod_{p \in P_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Antag at $p \in P_n$. Da p er et primtal er $p \geq 2$ og dermed er $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$. Vi finder da ved anvendelse af formlen for en geometrisk række at følgende ulighed gælder for ethvert primtal p

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^j \\ &> \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{p}\right)^j. \end{aligned}$$

Det følger nu at

$$\prod_{p \in P_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} > \prod_{p \in P_n} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{p}\right)^j. \tag{4}$$

Ganger vi højresiden af (4) ud fås en sum af formen $\sum_{j \in A_n} \frac{1}{j}$ hvor A_n er en mængde bestående af naturlige tal. Mængden A_n indeholder ihvertfald alle de naturlige tal fra 1 til n, idet P_n indeholder alle primtal mellem 1 og n, og idet $m \leq n$ kan skrives som et produkt af primtal fra mængden P_n. Heraf følger uligheden (3). Ifølge ovenstående lemma har vi at

$$\left(1 - p^{-1}\right)^{-1} \leq \exp\left(2p^{-1}\right).$$

Ved gentagen anvendelse af ovenstående ulighed samt funktionalligningen for eksponentialfunktionen finder vi at

$$\exp\left(2\sum_{p\in P_n} p^{-1}\right) = \prod_{p\in P_n} \exp\left(2p^{-1}\right) \\ \geq \prod_{p\in P_n} \left(1 - p^{-1}\right)^{-1}.$$

Samlet set har vi nu at

$$\exp\left(2\sum_{p\in P_n} p^{-1}\right) > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.$$

Ovenstående vurdering holder for ethvert N og lader vi $N \to \infty$ fås, idet den harmoniske række er divergent, at

$$\lim_{N\to\infty} \exp\left(2\sum_{p\leq N} p^{-1}\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Heraf følger det at

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$$

og dermed har vi vist det ønskede. $\square$

Corollary 3 *Der findes uendeligt mange primtal*

Bevis. Antag at der findes endeligt mange primtal $p_1, \ldots, p_N$ da er rækken

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p_n}$$

blot en endelig sum og således konvergent i modstrid med den foregående sætning. □

Et interessant spørgsmål er nu hvor hurtigt rækken af reciprokke primtal divergerer. Hvor hurtigt divergerer den for eksempel sammenlignet med den harmoniske række? Lad

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

og definer $\gamma_n = H_n - \log n$. Det kan vises (se [1]) at talfølgen γ_n opfylder at $0 < \gamma_n < 1$ og konvergerer mod tallet $\gamma = 0.5772\ldots$. Konstanten γ kaldes **Eulers konstant**. Vi kan nu overveje hvor mange led der skal tage med i den harmoniske række for at summen overstiger 100. Af ovenstående følger det at H_n vokser cirka som $\log(n)$ og at $H_n > 100$ kræver $n > e^{99} \approx 10^{43}$.

Ved hjælp af primtalssætningen (se [2]) kan det vises at $\sum_{p \in P_n} \frac{1}{p}$ vokser cirka som $\log\log(n)$ når n er stor nok. Rækken af de reciprokke primtal divergerer således utroligt langsomt.

Litteratur

[1] John M. Howie. *Real Analysis*. Springer, 2001.

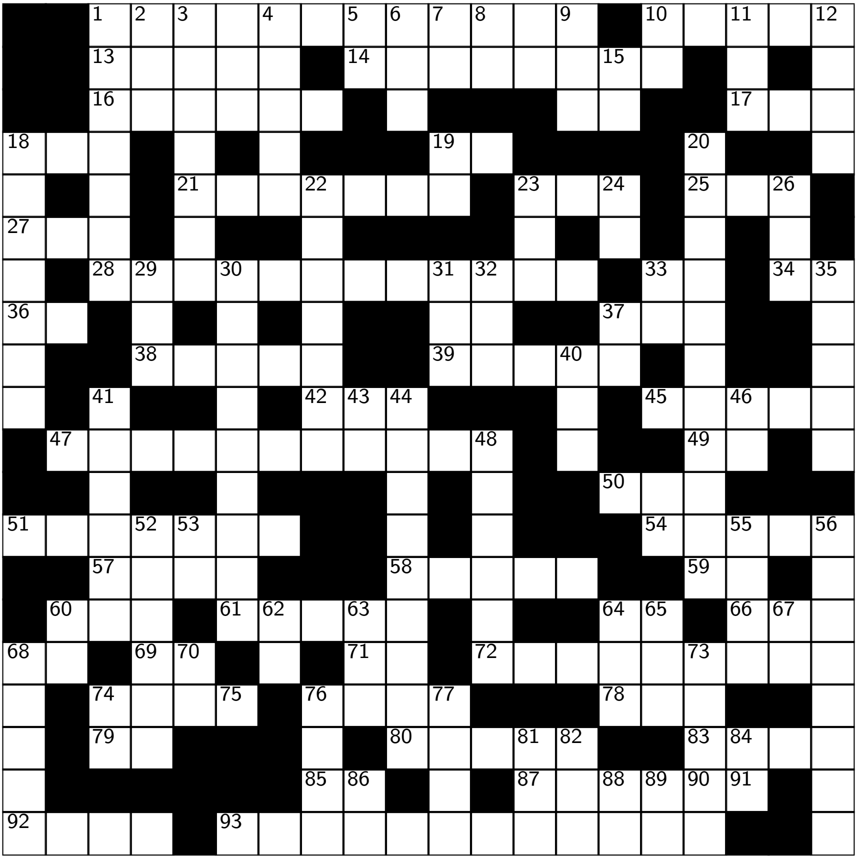
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem

[3] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill,1976.

Kryds-og-tværs

– En overspringshandling til de lange vinternætter

Bo 'Maling' Malling



Vandret:

1: Gammel program om spil, bøger og film
10: Introduktion til Matematik: Mat*****
13: Hovedpersonen i The Simpsons
14: Ikke reelt
16: Hvid rapper
17: Niels Bohr-Instituttet
18: Dette separerer Matematik fra Mat-Øk ifølge revyen
19: Nyligt lukket feststed
21: Studentervenlig spise
23: Temaet for årets rustur
25: I dette verdenshjørne går de sjældent med vest
27: Pseudo-universitet på Sjælland
28: DONG kommer først op, når man søger på dette ord på Google
33: Public Relations
34: Skynd dig!
36: Den primære effekt af sit studiekort, når det bliver spærret
37: Studentermedhjælper på IMF
38: Let drikke
39: Denne runde spise fås i mange variationer
42: Førsteårsstuderende
45: Program der giver mange russere grå hår allerede i blok 1 og 2
47: Spil med en totem kendt fra søster
49: Mr. SS
50: Pensionskasse
51: Luftig desert
54: Hans terning er populær blandt universitetsstuderende
57: ****-søster om fredagen
58: Muslimernes store bog i ubestemt ental
59: En studerendes vigtigste indtægtskilde
60: Follow Up-Tur
61: ***** og King
64: Lyden af at tysse
66: Den danske ækvivalent af ordet "mad"
68: Ikke kogt
69: Ruthenium
71: De olympiske lege
72: Kandidatuddannelse på IMF
74: Niveau på norsk
76: Billede på en computer
78: Kollegium lige mellem HCØ og Dilans
79: 9 med romertal
80: Nyeste bacheloruddannelse på Science KU
83: Reproducering i bydeform
85: Den danske møntenhed
87: Ikke søster
92: Hovedbeklædning til huse eller drengenavn
93: En studentertilstand man sjældent er særlig længe i ad gangen

Lodret:

1. Stenet spillested
2. Drikke og hovedstad
3. Græsk bogstav
4. Ungt hankøn
5. Tal ofte forvekslet med 3,14
6. Australsk fugl
7. Det positive udfald af et ja/nej-spørgsmål
8. Telefonfirma: Life's Good
9. Dynamit
10. Rust
11. Megagram
12. Det sorte guld
15. ** og bacon
18. Tørt fordrukkent drengenavn
19. Identifikation
20. HCØ, DIKU, Caféen?
22. ******* Verden, hvor solen står *stille*^{3} op
23. Fodboldhold
24. I orden
26. Ord forbundet med Bibeltekster
29. Slang for højere læreranstalt
30. Folkefærd der snart indtager HCØ
31. Vigtig person
32. 3 ens bogstaver
33. Græsk bogstav
35. Sexet skriveprogram
37. Venlig egyptisk gud
40. Kontroversielt aksiomssystem
41. Populær gådeform
43. Nyere Pixar-film
44. Det man altid glemmer i Maple
46. Efterskrift
48. Førsteårskursus for Mat-Mat'ere
52. Film og matematisk notation
53. Peter **
55. Konkav kystlinje
56. Norsk gud
60. Modtage
62. Operationsanalyse
63. Hårtype der sjældent kommer alene
64. S, M, L, XL med flere
65. Kortvarigt fnis
67. Kunstig intelligens
68. Når prisen er bestemt får man intet af dette
70. Lystype med lav frekvens
73. Trist vejr
74. $\sqrt{81}$
76. Non
77. Mindste studie på Science KU
81. IT-virksomhed
82. Mindste ulige primtal
84. Tlf **
86. To ens
88. Engelsk ækvivalent til "eller"
89. Fornem tiltale

5 hurtige til de voksne
– om intuitionisme

Jingyu She og Maria Bekker-Nielsen Dunbar

"Hvad er det, du vil med matematik? Du vil gerne opbygge nogle modeller af et eller andet, som på en eller anden måde formaliserer en eller anden tankegang eller idé."

– Asger Törnquist

I anledning af vinterens mangel på sollys er to HCØ-unger gået i tænkeboks. Til daglig laver vi beviser til højre og venstre ved hjælp af uendelige approksimationer - men giver det overhovedet mening?

Luitzen Egbertus Brouwer[3] lavede sit eget logiske system, hvor det var dybt urimeligt bare at føre behandlingen af endelige mængder over på uendelige mængder; hvor det beviselige kun kunne bevises ved konstruktion (og ikke modstrid). Hvorfor er han gået i glemmebogen, og hvad hvis vi alligevel begynder at tænke matematik på andre måder?

Følgende er en vurdering fra Asger Törnquist, matematiker på IMF, som beskæftiger sig med logik og mængdelære:
"I en hvis forstand tabte Brouwer. Han gjorde en meget, meget fornuftig indvending mod ukritisk at anvende den samme logik til at tale om endelige ting og uendelige ting. Men i dag er det næsten umuligt for os at kunne sympatisere med det Brouwer konkret sagde, for det reflekterer et meget mere ufærdiggjort forhold til uendelige mængder. Vi er, på godt og ondt, blevet formet af at have brugt vores nuværende mængdelære i lang tid. Nu spiller alternative logiske systemer mest en rolle inden for datalogi. Nok fordi de er interesseret i konkret beregnelighed og beviselighed frem for abstrakt sandhed.".

[3]Kendt nederlandsk topologiforsker og særligt intuitionismens fader

I de foregående årtier er debatten måske ebbet ud, men vores nysgerrighed er blevet vakt! I denne artikel har vi lokket tre af HCØs 'voksne' (**AT**, Asger Törnquist; **EH**, Ernst Hansen og **MWJ**, Mikkel Willum Johansen) til at gribe matematikken an fra en filosofisk vinkel ved hjælp af en meme fra intuitionism.org. [4]

Mener du, at middelværdisætningen ikke holder, sådan som den normalt er formuleret? (cf. Kalkulus)

AT: Uden denne sætning ville vi have afvist det begreb om kontinuerte funktioner som Weierstrass eller Cauchy indførte. Den blev simpelthen nødt til at være sand for, at den model for kontinuerte funktioner og reelle tal, de var ved at opbygge, kunne opfattes som korrekt af samtiden. Vi får altså det kontinuitetsbegreb vi gerne vil have, som passer meget, meget godt med den type resultat vi er interesserede i at bevise. Jeg har ikke noget imod den [middelværdisætningen, red.], overhovedet ikke.
EH: Nej. Beviset for middelværdisætningen beror på supremumsegenskaben, og den egenskab er der INGEN, der vil frasige sig. Selvfølgelig kan man opstille dogmeregler for sig selv om, at man ikke må dit og dat og så se, hvor langt man kan komme under de betingelser. Man kan binde sine hænder på ryggen og prøve at lave reel analyse uden supremumsegenskaben, hvis man synes, at den udfordring lyder sjov. Eller man kan gøre som visse excentriske

[4] *Vi vil gerne rette en særlig tak til Frederik M. Lauridsen for hans uundværlige støtte under samtalen med Törnquist. Det skal desuden nævnes, at artikelforfatterne oplevede et lille uheld med diktafonen under Ernsts interview. Derfor opfordrer vi til, at I hjælper os med at foretage endnu et interview. Så skriv ind til famos@math.ku.dk, hvis der er noget, I gerne vil vide om ham! (Inspiration kan evt. hentes i Facebookgruppen* 'Ernst Hansen Facts'*)*

sandsynlighedsteoretikere og lave teori for endeligt additive sandsynlighedsmål frem for tælleligt additive sandsynligshedsmål. Det kan da godt påkalde sig en vis nysgerrighed fra os andre. Men primært opstår der en masse bøvl med selvskabte problemer, uden at nogen bliver klogere af det.
MWJ: Det tør jeg ikke udtale mig om, da jeg ikke kender det konkrete eksempel i dybden.

Kan man for ethvert matematisk spørgsmål nemt bygge en maskine , hvor en lampe markeret "Ja" lyser, hvis det er sandt, og en lampe markeret "Nej" lyser, hvis det er falsk?

AT: Følger man Church, Gödel og Turing, så viser det sig, at det at afgøre sandhed er noget helt andet end at afgøre beviselighed. Beviselighed er noget, hvor der findes en semieffektiv, mekanisk proces; sandhed tillader ikke en lignende proces. Mit udgangspunkt er at kigge på det her ud fra den analyse som Church, Gödel og Turing gav os, og så er svaret nej, denne maskine findes ikke.
EH: Jeg synes, at spørgsmålet har indbygget en misforstået opfattelse af, hvordan vi arbejder som matematikere. Hvis ikke man kan bevise (eller modbevise) en påstand, så ændrer man påstanden. Hvis man heller ikke kan bevise den påstand, så ændrer man den igen. Man bliver ved og ved med at rette påstanden ind, indtil der fremkommer et eller andet, som man kan bevise. Jeg synes slet ikke, jeg skelner mellem, om en påstand er logisk uafgørlig eller om jeg bare er en knold til bevisteknik. Det er to sider af samme mønt.
MWJ: Helt klart nej. Matematikken støder hele tiden på eksempler, der ikke på en klar måde dækkes af de regler, man hidtil

har fulgt. Så er der brug for at genforhandle hvad den præcise betydning af de indgående begreber er, hvilke slutningsregler, der er gyldige mv. Tænk på, hvordan indførelsen af et nyt artefakt i form af abstrakte symboler fundamentalt ændrede matematikken, både hvad angår metoder, epistemiske standarder (i.e. kravene vi stiller til et gyldigt bevis) og objekter. Det er naivt at tro, at vi NU har nået et stadie, hvor alle forhandlinger er på plads og alle tvivlsspørgsmål besvaret. Den slags kan en maskine ikke klare. Matematikken er en levende videnskab, en maskine vil kun kunne give os et fossil.

Er kontinuumshypotesen (CH) en meningsfyldt påstand, der har en afgørende sandhedsværdi, som vi bare ikke kender til?

AT: Jeg er egentlig ligeglad, men min personlige holdning er, at CH[5] burde være falsk. Det er dybt, dybt urimeligt, at de reelle tal, der som grundlæggende ide har transcendens, skulle have en velordning hvor alle initialsegmenter er tællelige, for så fremstår elementerne jo ikke som værende særligt transcendente. Jeg har altid håbet lidt på, at kontinuum var et eller andet fuldstændig latterligt stort, enormt. Folk, som arbejder med axiomet PFA, føler almindeligvis, at kontinuum burde være $\aleph_2$, fordi PFA[6] medfører det. Jeg tænker egentligt, at det er fint (selvom $\aleph_2$ ikke er så stort igen), for PFA har så mange pæne konsekvenser, som passer godt med mit verdenssyn som deskriptiv mængdeteoretiker.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis

[6] PFA: Proper Forcing Axiom, som udover mange andre seje sager giver et system, der gør det muligt at analysere visse kvotientgrupper og strukturen af deres automorfigrupper. En konsekvens af PFA er, at kontinuet har kardinalitet $\aleph_2$ i stedet for $\aleph_1$ som givet ved CH.

EH: Kontinuumshypotesen ligger langt fra mit interesseområde – jeg har aldrig stået i en situation, hvor den betød noget som helst. Så jeg har ikke stærke følelser der. Man kan se på udvalgsaksiomet[7] i stedet for. Her må jeg sige, at udvalgsaksiomet ikke er min kop the! Påstande, der afhænger af udvalgsaksiomet, er efter min bedste overbevisning fup og fidus. Man kan bruge udvalgsaksiomet til at komme med visse farvestærke generelle påstande. F.eks. at hvert vektorrum har en basis. Det har da en vis attraktion at kunne slynge den slags påstande ud. Men hvis man tillader sig selv at argumentere på den måde i visse situationer, så må man også gøre det i alle mulige andre situationer. Og det viser sig, at man på den måde får skabt et bestiarium af monstre så skrækindjagende, at man er nødt til at kigge væk! De mareridt, man skaffer sig på halsen, er så høj en pris at betale, at det er bedre at forbyde udvalgsaksiomet. De vektorrum jeg arbejder med, de HAR en basis. Det følger af meget mere konkrete og jordnære argumenter end udvalgsaksiomet. Har kæmpestore vektorrum også en basis? Well, what do I care? Hvis udvalgsaksiomet er prisen for at svare ja, så svarer jeg nej!

MWJ: Her er svaret nej. For det første vil jeg som anti-realist hævde, at ingen matematiske sætninger har en sandhedsværdi uafhængigt af den menneskelige bevidsthed, og for det andet er de begreber, der indgår i kontinuumshypotesen, ikke klare. Der er stadig meget at forhandle om her!

[7]Ifølge dette kan du blive millionær ved at rive en halvtredser over i endelig mange stykker og sætte den sammen til to halvtredsere. Hvis du ikke tror på aksiomet, kan du blot rive halvtredseren i to og sætte den sammen med tape - det er lovligt at betale med sådan en.

Giver et konstruktivt bevis giver større indsigt end et klassisk bevis?

AT: Ja. I nogle sammenhænge kan det være afgørende for os, at et bevis er konstruktivt, og vi vil måske endda kræve det. For mig er det fuldstændig relativt til, hvad det er, vi prøver at beskrive matematisk, og hvad vores mål er. Jeg kan selv meget bedre lide et konstruktivt bevis, når det er tilgængeligt og ikke alt for langt. Det giver ofte mere information.
EH: Masser af 'klassiske' beviser er da konstruktive. De fleste af os vil være enige om, at et konstruktivt bevis gør tingene mere klare end et indirekte bevis. Men hellere et bevis, der ikke er konstruktivt, end intet bevis.
MWJ: Nej. Modstridsbeviser kan sagtens give masser af indsigt.

Mener du, at alle matematiske sandheder er sande, men at nogle af dem er mere sande end andre?

AT: Det kunne være interessant at opbygge en logik, som kunne reflektere den typiske matematikers opfattelse af, at nogle matematiske sandheder er mere sande end andre. Det er jo netop pointen med matematisk logik, at man kan bruge matematisk tankegang til at studere de strukturer som ligger til grund for matematisk tankegang. Jeg ved ikke, om jeg har en holdning til dit spørgsmål, så jeg vil lade det være ubesvaret!
EH: Jeg vil f.eks. mene, at sætninger bevist uden udvalgsaksiomet er mere sande end dem, der er bevist med. Sætninger, der kræver udvalgsaksiomet, er i bedste fald 'svagt sande'.
MWJ: Ja. Hvis vi bliver tvunget til at revidere formodningsnetværk, vil der altid være dele, vi hellere opgiver end andre. Fx er jeg mere villig til at opgive velordningssætningen, end at 1+1=2.

Gæt et tal

Søren Eilers

Et gæt

En aften midt i oktober faldt jeg på nettet over en konkurrence afholdt af radioprogrammet Detektor på P1 om at gætte det tal mellem 0 og 100, der var halvdelen af gennemsnittet af de indkomne svar. Jeg tænkte over det et stykke tid, og da det var gået op for mig at det ikke var en konkurrence jeg ville kunne vinde med matematik alene kom jeg i tanke om at jeg havde set noget lignende før på Politikens bagside. Efter lidt søgning lykkedes det mig at finde data for en tilsvarende konkurrence udført i 2005 i regi af Økonomisk Institut ved Københavns Universitet. Opgaven var der at ramme 2/3 af gennemsnittet af de indkomne svar, og præmien var 5000 kroner. Der indkom 19196 svar og gennemsnittet blev 32,407, således at man ville vinde ved at svare 21,605, jf. [1] samt figur 1 (øverst).

Jeg besluttede mig for at svare i Detektors konkurrence ud fra forudsætningen om at deltagerne der, ville opføre sig på samme måde som deltagerne i Politikens. Men jeg var selvfølgelig nødt til at korrigere for at mens man i den gamle undersøgelse skulle ramme to tredjedele af gennemsnittet, så var min opgave at ramme halvdelen.

For begge konkurrencer, tænkte jeg, gælder at jo længere man tænker over sagen (eller tillægger sine konkurrenter at tænke over sagen), jo lavere et svar giver man. I Detektors konkurrence kunne man ræsonnere som følger: Enhver kan se at svaret ikke kan blive mere end $\frac{1}{2} \cdot 100 = 50$, så derfor er det dumt at svare med et tal større end 50. Men hvis enhver kan se det, og følgelig svarer med et tal mindre end 50, så kan svaret ikke blive mere end $(\frac{1}{2})^2 \cdot 100 = 25$

og så er det jo dumt at svare mere end 25. Men hvis alle andre tænker sådan og derfor svarer med et tal mindre end 25, så kan svaret ikke blive mere end $(\frac{1}{2})^3 \cdot 100 = 12\frac{1}{2}$ og så videre, i en proces man ikke meningsfuldt kan tage til grænsen. I konkurrencen fra 2005 bliver ræsonnementet det samme, men med potenser af $\frac{2}{3}$ i stedet.

For at vinde konkurrencen gælder i begge tilfælde at man skal gennemføre ræsonnementet **én gang mere** end gennemsnittet af deltagere. Jeg løste derfor ligningen

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot 100 = 21,605$$

ved at tage logaritmer på begge sider, og fik at

$$x = \frac{\log(0,21605)}{\log(2/3)} \simeq 3,779$$

Det betyder at i den gamle konkurrence gennemførtes ræsonnementet i snit 2,779 gange, og man ville vinde ved at gennemføre det 3,779 gange, og derfor beregnede jeg

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3,779} \cdot 100 \tag{1}$$

som er cirka 7,2846. Jeg begik herefter en uvigtig men unødvendig afrundingsfejl og svarede **7,289**, og jeg var endda så fræk at jeg gav motivationen

```
fordi det er 100*(0,5)^(log(0,21605)/log(0,6666))
```

En sejr

Og så vandt jeg sgu! De 595 der deltog svarede i snit 14,5671 og derfor kom jeg nærmest måltallet 7,2836. Sølvmedaljerne gik til to andre der havde svaret 7,16, så marginalen var ret bred, men det ærgrer mig selvfølgelig lidt at hvis jeg ellers havde evnet at regne rigtigt med tre decimalers nøjagtighed så havde svaret (1) kun været lige godt en promille forkert. Thomas Buch-Andersen, der er vært for og idemand bag Detektor, ringede mig op og interviewede mig, og i programmet fik jeg spillet en fanfare til min ære, og fik en mulighed for fuldkommen skamløst at reklamere for at "matematik er et fantastisk kraftfuldt værktøj".

Men jeg fik ikke lov at smage sejrens sødme ret længe. Den første – men absolut ikke den sidste – der gav lyd var matematikstuderende Sune Jakobsen, der problematiserede den måde jeg havde arbejdet med gennemsnit på. Jeg har to ting at sige til det. Det første er, at det svarer til at fortælle en person der lige har vundet en million i Lotto at han er et fjols når han deltager i et spil med kun 60% tilbagebetaling. Det andet er at det har man jo ret i.

Forudsætningen for mit svar var jo at de to konkurrencer var ækvivalente og at man kunne transformere sig frem og tilbage mellem dem med en given funktion $\phi_{DP} : [0; 100] \to [0; 100]$. Den letteste måde at bestemme ϕ_{DP} på er nok gennem brug af logaritmer med forskellige grundtal. Sætter vi

$$f_P(x) = \log_{3/2}\left(\frac{x}{100}\right) \qquad f_D(x) = \log_2\left(\frac{x}{100}\right)$$

får vi jo netop at de svar i de to konkurrencer der svarer til samme antal iterationer af argumentet herover sendes til samme værdi i

$]-\infty;0]$, så vi finder at

$$\phi_{DP}(x) = f_D^{-1} \circ f_P(x) = 100 \cdot \left(\frac{x}{100}\right)^{\alpha}$$

hvor

$$\alpha = \frac{\log 2}{\log 3 - \log 2} \simeq 1,7095$$

transformerer svar mellem de to konkurrencer på en måde der bevarer det jeg forestillede mig var det essentielle (udtrykket stemmer også i 0). Mit svar var således $\phi_{DP}(21,605)$. Men hvis vi oplister svarene $x_1, \ldots, x_N$ med $N = 19196$ fra Politikens konkurrence så siger Jensens ulighed, fordi funktionen ϕ_{DP} er konkav, at

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi_{DP}(x_i) \geq \phi_{DP}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

hvor der yderst sjældent gælder lighedstegn, og hvis vi tror på at folk svarer ens (via ϕ_{DP} og dens inverse ϕ_{PD}) i de to undersøgelser, så var det jo halvdelen af værdien på venstre side jeg burde have svaret. Det var jeg sådan set klar over – jeg er trods alt medlem af forskergruppen i ikke-kommutativ geometri – men da jeg ikke havde adgang til de individuelle værdier x_i, kun deres gennemsnit, var det ikke noget jeg tænkte så meget over. Og da jeg så kom så tæt på følte jeg mig helt sikker på at jeg havde løst opgaven med en blandning af empiri og overlegent ræsonnement, og glemte alle mine matematiske forbehold som jeg uden tvivl ville have fundet frem hvis ikke jeg havde vundet.

Nu blev jeg i tvivl igen, og da Sune havde fremskaffet de indkomne data $y_1, \ldots, y_M$ med $M = 595$ fra Detektors undersøgelse var en oplagt måde at undersøge sagen nærmere på at sammenligne fordelingen af $x_1, \ldots, x_N$ – der kunne ses på [1] – og

$\phi_{PD}(y_1), \ldots, \phi_{PD}(y_N)$. Resultatet var ikke ligefrem befordrende for min selvtillid. Som man ser i figur 1 var fordelingen af de transformerede svar fra Detektor dramatisk anderledes end den for de oprindelige fra Politiken; toppene ligger forskellige steder, og der er for de transformerede værdier en stor koncentration af svar omkring $\phi_{PD}(1) = 6,76$ der formentlig skyldes at Detektor havde formuleret konkurrencebetingelserne således at der var en del lyttere der, uvant med gængs matematisk terminologi, troede at de ikke måtte svare andet end positive heltal og derfor valgte at svare 1.

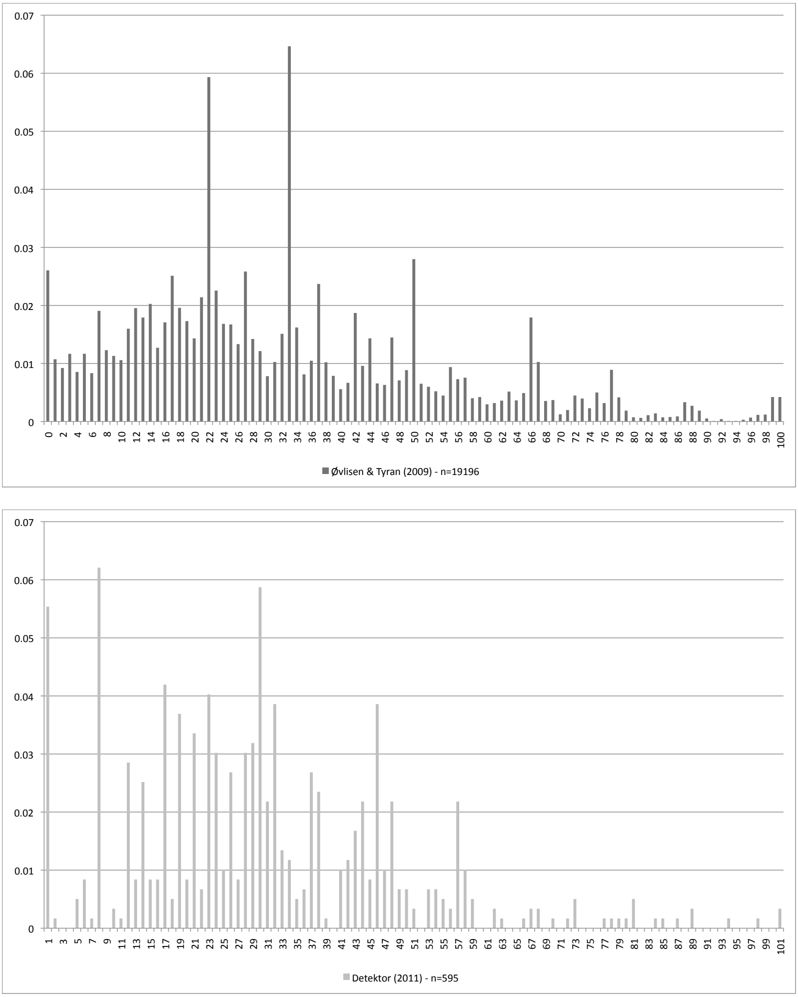
Jo længere jeg ser på figur 1, jo mere forekommer det mig at de eneste de to fordelinger af svar har tilfælles er at

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_i = \phi_{DP}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

og at min indsigt således var videnskabsteoretisk ækvivalent med den som Percival Lowell havde da han forudsagde Plutos eksistens og position baseret på en fuldkommen forkert teori om diskrepanser i Uranus og Neptuns baner.

Et efterspil

Nogle af mine venner har fremført at det var usportsligt af mig at deltage i konkurrencen, og en enkelt har endda ment at jeg burde få konfiskeret præmien, som det skete for den mand der i en alder af 31 år vandt en børnetegnekonkurrence i TV2 Lorry. Det er jeg selvfølgelig uenig i; jeg må nok indrømme at jeg er god til at regne med logaritmer, men i forhold til Nash-ligevægte og spilteori er min væsentligste kvalifikation at jeg har læst [2] (jeg har også set filmen i flyet – men jeg sov noget af tiden). Desuden er det ikke så let at konfiskere en fanfare.



Figur 1 Øverst: Svar fra Politikens konkurence. Nederst: Svar fra Detektors konkurrence transformeret med ϕ_{PD}

Men jeg burde måske have vidst at der lige i min nærhed var en klart overkvalificeret person, nemlig Frederik Øvlisen fra Økonomisk Institut, der underviser på ØkIntro og MikØk2. Det var Frederik der i sin tid forestod konkurrencen i Politiken og hans ph.d.-afhandling [3] og artiklen [4] er i høj grad baseret på observationer fra dette – et af verdens største – adfærdsøkonomiske eksperiment, hvor han fx kunne påvise at deltagere med længerevarende uddannelser svarede anderledes end dem uden. Forleden fik jeg, sammen med de studerende der er så heldige at følge MikØk2 i indeværende blok, en oversigt over denne konkurrences fascinerende historie og om Frederiks forskning i området. Jeg fik lokket ham til at beregne

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi_{DP}(x_i) = 18,3488$$

der altså siger at jeg burde have svaret 9,174, og ladet sejren gå til de to deltagere på 7,16.

Jeg trøster mig lidt med at hele øvelsen med konkurrencen var at vise at selv om der er et teoretisk korrekt svar, nemlig ligevægten 0, så kan man ikke vinde ved at være 100% rationel. Men at det skulle være nødvendigt at blæse Jensens ulighed – og alt hvad jeg ellers plejer at prædike – en hatfuld for at hive sejren hjem er alligevel noget af en kamel at sluge. Så måske vi bare skal blive enige om at jeg var lidt heldig. Det kan jo ske, også for en matematiker.

En tak

Jeg er taknemmelig for hjælp og bidrag fra Sune Jakobsen, Lotte Folke Kaarsholm, Danny Lund, Mogens Steffensen, Frederik Øvlisen og Detektor på P1.

Litteratur

[1] Fordeling af gæt i "Gæt Et Tal"s første runde i september 2005, http://konkurrence.econ.ku.dk/r/o

[2] Sylvia Nasar: *A beautiful mind. The Life of Mathematical Genius and Nobel Laureate John Nash.* Simon & Schuster, 1998.

[3] Frederik Roose Øvlisen: Essays in Bounded Rationality and Strategic Interaction. Ph.d.-afhandling, Københavns Universitets Økonomiske Institut, 2005, http://www.econ.ku.dk/forskning/publikationer/ph.d_serie_2007-/ph.d._137.pdf/

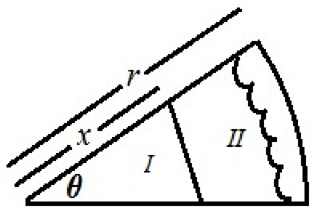
[4] Frederik Roose Øvlisen og Jean-Robert Tyran: Making an educated guess. Working paper, 2009.

Den uundværlige kagedelingsformel

Jacob Stevne Jørgensen

Du kender sikkert problemet. Du sidder til kagesøster, der er kun ét stykke lagkage tilbage, I er to sultne sjæle og kun den ene af jer kan lide flødeskum. Hvordan deler I kagen i to lige store stykker kun ved hjælp af lineal og vinkelmåler?

Problemet har plaget matematikstuderende i århundreder, men fat mod, endelig er en formel blevet udledt, der udtrykker forholdet x/r ved θ alene, så stykkerne I og II får samme areal.



Sætning 1 *Lad I og II være disjunkte, konvekse delmængder af $\mathbb{R}^2$, der opfylder at I er den åbne ligebenede trekant med lige ben af længde x og mellemliggende vinkel θ, og $I \cup II$ er det åbne cirkeludsnit med centervinkel θ af cirklen med radius r (fraregnet snitlinjen s)*[8]*, hvor $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $r > 0$, $0 < x < r$.*
Lad endvidere $A\colon M \to \mathbb{R}$ betegne arealfunktionen, hvor $M = \{K \subset \mathbb{R}^2 \mid K$ er ikke-tom, åben, begrænset og konveks$\}$.

Da er $A(I) = A(II)$ hvis og kun hvis $\frac{x}{r} = \sqrt{\frac{\theta}{2\sin\theta}}$

[8]Denne linje svarer til den mængde kage, der bliver siddende på kniven og som bekendt er forsvindende lille.

Bevis. Bemærk, at da I og II er disjunkte, er

$$A(I \cup II) = A(I) + A(II)$$

Basal geometri giver os følgende:

$$\begin{aligned} A(I) &= \frac{x^2 \sin\theta}{2} \\ A(I \cup II) &= \pi r^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{r^2\theta}{2}. \end{aligned}$$

Vi har her benyttet, at arealet af et cirkeludsnit fratrukket en linje er lig arealet af cirkeludsnittet.

Nu har vi

$$\begin{aligned} A(I) &= A(II) && \Leftrightarrow \\ A(I) &= \frac{A(I) + A(II)}{2} && \Leftrightarrow \\ A(I) &= \frac{A(I \cup II)}{2} && \Leftrightarrow \\ \frac{x^2 \sin\theta}{2} &= \frac{r^2\theta}{4} && \Leftrightarrow \\ \frac{x^2}{r^2} &= \frac{\theta}{2\sin\theta} && \Leftrightarrow \\ \frac{x}{r} &= \sqrt{\frac{\theta}{2\sin\theta}}, \end{aligned}$$

hvor vi ved sidste biimplikation har benyttet, at
$x, r, \theta, \sin\theta > 0$ $\square$

- Og så er det vist tid til noget kage!

Konstruer tallet
– Løsning

Søren Wengel Mogensen

I sidste nummer fik læserne til opgave at bruge tallene 5,5,5,1 og regneoperationerne $+, -, \cdot, \div$ til at lave et regnestykke med svaret 24. Som alle gode opgaver havde denne naturligvis mere end én korrekt løsning. Den, de fleste kom frem til, var

$$5 \cdot (5 - 1/5) = 24.$$

Redaktionen modtog et væld af korrekte løsninger (tak!), og vinderen er blevet fundet ved lodtrækning. Det blev Esben Bistrup Halvorsen. Tillykke, du vil modtage en præmie bestående af så mange julegodter, at du ikke kan nå at spise dem, inden højtiden er forbi. Redaktionen vil kontakte dig.

Blandt de mange korrekte løsninger var nogle selvfølgelig mere kreative end andre. Sune Precht Reeh hev både Maple og forældede regneapparater ind over sin løsning, som kan læses her:

En løsning er:

$$24 = 5 \cdot (5 - 1/5).$$

Hvis man vil undgå parenteser, kan man alternativt benytte en tilstrækkeligt gammel lommeregner og skrive:

$$-1/5 + 5 \cdot 5 = 24$$

Kravet er at operationerne udføres i rækkefølge uden hensyntagen til operationernes sædvanlige hierarki.

Sidst men hæsligst kan man benytte Maple. Giv Maple følgende input (bemærk: intet mellemrum mellem parenteserne):

$$(5 \cdot 5 - 1)(5);$$

Maple giver resultatet 24. Denne udregning er udført i en friskopdateret Maple version 15.01.

Gæt selv et tal

Martin Patrick Speirs

Send en mail til redaktionen med dit bud på et tal i intervallet $]0;100[$. Vinderen er den, hvis gæt er tættest på *Eilers' tal* – dvs. halvdelen af gennemsnittet af de indkomne svar. Send dit bud til famos@math.ku.dk inden 29. februar 2012.

Du kan eventuelt finde inspiration til dit bud i Søren Eilers' artikel i dette blad.

Præmie

Det er nemlig rigtigt! FAMØS-redaktionen udlodder endnu engang en flot præmie til den kloge åge, hvis svar kommer tættest på det rigtige. Om præmien kan vi afsløre, at det er noget, man kan købe sig til. Den har en værdi, der (regnet i kroner) er et reelt algebraisk tal[9].

[9]Dem der har MI i denne blok vil være glade for at vide at de reelle algebraiske tal er tællelige og dermed har Lebesguemål nul. Så vi har dermed udelukket "næsten alle" mulige præmieværdier.

Amerikanske optioner og finansielle beregninger

Rolf Poulsen

Med den hårdtarbejdende redaktions egne ord så *tilstræbes det, at artikler i* FAMØS *henvender sig til alle på IMF (ansatte og studerende).* Jeg vil dog straks begrænse nærværende skriverier til den delmængde af førnævnte, der opfylder mindst en af følgende ikke-disjunkte betingelser: (a) har et åbent sind, (b) har haft Fin1, (c) har læst [Lando (1999)]. Hovedresultatet i bemeldte fortrinlige artikel kan fortælles bemærkelsesværdigt kort i arbitrageprisfastsættelsesteoriens første[10] hovedsætning: En finansiel model (π, δ, r) (*priser, dividender, rente*) på den stokastiske basis $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t=0,1,\ldots,T}, P)$ (*udfaldsrum, filtrering, sandsynlighedsmål*) er arbitragefri, hvis og kun hvis den har et ækvivalent martingalmål Q (*risiko-neutralt mål*).

Et centralt element i en videnskabelig artikel er at placere sig i forhold til litteraturen. Denne er ingen undtagelse. Men de friere tøjler tillader mig at forstå litteratur på samme måde som folk udenfor den akademiske verdens beskyttede værksted. Nemlig som — litteratur: I viktorianske kriminalromaner afsløres i det sidste kapitel, hvor obersten, de uvorne børn, gammeljomfruerne

[10] Som ordenstalsbetegnelsen indikerer, er der også en hovedsætning nummer to. Den siger, at en arbitragefri model er komplet, hvis og kun hvis Q er entydigt. Fra et praktisk synspunkt er dette mere vigtigt, da det fortæller at enhver (ny) kontrakt kan replikeres. Den har derfor kun en eneste fornuftig pris. De konkrete modeller, vi møder i denne artikel, er komplette. Men beregningsmæssige teknikker og trick er ofte uahængige af hvilket af de måske mange martingalmål, man benytter. Der er ikke nogen almindeligt accepteret tredje eller højere hovedsætning.

mv. er forsamlet i biblioteket, hvordan og hvorfor butleren gjorde det. På samme måde vil jeg tilsidst afsløre, hvad amerikanske optioner burde blive kaldt. Undervejs skal vi så grueligt meget igennem, dvs. jeg kommer ind på en række emner fra min forskning. Med en karikeret '70-formulering "siger det enormt meget om samfundet". Holdbarheden af litteratur med dette som hovedmål har vist sig tvivlsom. Jeg lader det være op til læseren, om det bliver bedre eller værre, hvis man som overordnet princip søger at bytte "litteratur" ud med "forskning".

Arbitragefri prisfastsættelse: tænk globalt, regn lokalt

Først omskriver vi den globale definition af et martingalmål fra [Lando (1999)] til en lokal karakterisation. Vi betragter et vilkåligt[11] aktiv med en givet dividende-proces δ tilpasset vores filtrering og lader $\widetilde{\ }$ angive diskontering med det lokalt riskofrie aktiv, dvs. division med $R_{0,t} = (1 + r_0) \cdot (1 + r_1) \cdot \ldots \cdot (1 + r_{t-1})$, hvor r er den — muligvis stokastiske — korte rente. I en arbitragefri model skal aktivets prisproces, π, opfylde

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\pi}(t) &= \mathbb{E}_t^Q \left(\sum_{j=t+1}^{T} \widetilde{\delta}(t) \right) \\
&= \mathbb{E}_t^Q \left(\frac{\delta(t+1)}{R_{0,t+1}} \right) + \mathbb{E}_t^Q \left(\underbrace{\mathbb{E}_{t+1}^Q \left(\sum_{j=t+2}^{T} \widetilde{\delta}(t) \right)}_{=\widetilde{\pi}(t+1)} \right),
\end{aligned}
$$

[11] "Arbitrært" kunne man sige, men det ord er belastet i netop denne sammenhæng.

hvor vi har brugt reglen om itererede forventninger (eller: tårnegenskaben) og linearitet af betinget forventning. Heraf får vi ved brug af definitionen af R-processen — specielt at $R_{0,t+1}$ er $\mathcal{F}_t$-målelig — at

$$\pi(t) = \frac{1}{1+r_t}\mathbb{E}_t^Q(\pi(t+1)+\delta(t+1)). \tag{1}$$

Denne lokaliserede ligning (t på venstresiden, kun $t+1$ på højresiden) er overmåde nyttig. Den er hjertet i effektive beregninger i modeller med Markov-struktur, den fortæller, hvordan vi håndterer dividendebetalinger og stokastiske renter,[12] og den er central for at forstå, hvordan amerikanske optioner prisfastsættes.

Amerikanske optioner: mere subtilt end som så?

En europæisk option giver dens ejer ret, men ikke pligt, til at gøre et eller andet på et (eneste) på forhånd fastlagt tidspunkt T (med svag misbrug af notation). Som regel er valget trivielt, og vi siger derfor blot, at ejeren modtager beløbet $g(S(T))$ på tidspunkt T, hvor g er payoff-funktionen. Fx er $g(x) = \max(K-x, 0) =: (K-x)^+$ for en strike-K put-option,[13] hvor ejeren har ret, men ikke pligt, til sælge det underliggende aktiv til prisen K. For en amerikansk option vælger ejeren selv, hvornår optionen skal indfries, lad os kalde tidspunktet τ, hvorefter han (straks) modtager $g(S(\tau))$. Ordene amerikansk og europæisk har her ingen geogra-

[12] En fordel ved den diskrete ramme er, at vi får det hele i et hug; studerende i FinKont-kurser kan skrive under på, at så let går det ikke altid.

[13] Hvis det underliggende aktiv ikke udbetaler dividender i optionens løbetid (og renten er positiv), så er det aldrig optimalt at indfri en amerikansk call-option førtidigt. Derfor er put-optionen det gennemgående eksempel her.

fisk betydning; vi kunne ligeså godt kalde optionerne orange eller varmforzinkede.[14]

Ejeren af en (endnu ikke indfriet) amerikansk option skal hele tiden overveje, om hans option er mere værd "død end i live". Hvis han undlader at indfri og derved holder optionen i live, så får han et lignende valg i næste periode. Optionsejeren gør, hvad der er mest fordelagtigt, og oversat til ligninger giver det en dynamisk programmeringsformulering eller Bellman-ligning for prisen, π^A, på en amerikansk option:

$$\pi^A(t) = \max\left\{g(S(t)), \frac{1}{1+r_t}\mathbb{E}_t^Q(\pi^A(t+1))\right\}. \tag{2}$$

Jeg håber ovenfor at have kommunikeret det intuitivt rimelige i ligning (2), og som vi om lidt vil se, er det kodningsmæssigt lettere gjort end sagt. Men matematisk/teoretisk er det mere subtilt. Thi: Hvis det er 1. led på højresiden i (2) (kaldet indfrielsesværdien; 2. led kaldes tidsværdien), der er størst, så strider det lodret imod ligning (1). Ups. Der, hvor kaninen forsvinder ned i hatten, er at (1) udtaler sig om priser for aktiver, hvis betalinger er givet på forhånd. Men altså igen: "givet" som tilpasset stokastisk proces, dvs. når et træ repræsenterende informationsstrukturen er blevet lavet, så kendes aktivets betalinger i hver eneste knude. For en amerikansk option har ejeren derimod en yderst ikke-triviel indvirkning på betalingsprocessen. Ikke desto mindre kan man vise, at (2) vitterlig giver den eneste arbitragefri amerikanske op-

[14] En historie fortæller, at den (amerikanske) økonom Paul Samuelson som den første brugte betegnelsen "amerikansk" om optioner med førtidige indfrielsesrettigheder. Han gjorde det for at signalere noget bedre, noget mere avanceret. Selveste internettet har dog været ude af stand til at bekræfte den historie, så …

```
S0<-100; r<-0.03; alpha<-0.07; sigma<-0.20
expiry<-1; strike<-100
n<-expiry*252; dt<-expiry/n
u<-exp(alpha*dt+sigma*sqrt(dt)); d<-exp(alpha*dt-sigma*sqrt(dt))
R<-exp(r*dt)
q<-(R-d)/(u-d)
```

```
S<-put<-matrix(0,nrow=(n+1),ncol=(n+1))
put[,n+1]<-pmax(strike-S0*u^(0:n)*d^(n:0),0)
for (i in n:1) {
  for (j in 1:i){
    S[j,i]<-S0*u^(j-1)* d^(i-j)
    put[j,i]<-max(max(strike-S[j,i],0), (q*put[j+1,i+1]+(1-q)*put[j,i+1])/R)
  }
}
```

Tabel 1 R-kode med en naturlig algoritme til prisfastsættelse af en amerikansk put-option. For at prisfastsætte den europæiske option fjernes den *kursiverede* del af koden. Koden under stregen vil senere rykke ud for at forøge beregningshastigheden. Koden ligger i www.math.ku.dk/~rolf/FAMOES

tionspris.[15] Det kræver en udflugt til optimale stoppetider, hvilket gøres glimrende i kapitel 2 i [Lamberton & Lapeyre (1996)]. Og i Fin2.

Amerikanske optioner: nemmere gjort end sagt

For at illustrere, hvordan man faktisk regner amerikanske optionspriser ud, lad os da trække en arbejdshest af stalden: standardbinomialmodellen, som vist i Figur 1. Her udvikler aktiekursen sig

[15] En anden detalje, der afsløres, når man arbejder sig igennem beviset for (2), er at vi rettelig burde sige, at $\pi^A(t)$ er tid-t prisen på den amerikanske option *givet den endnu ikke er blevet indfriet.*

som

$$S(t+\Delta t) = S(t) \times \begin{cases} \exp(\alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}) =: u & \text{m/ ssh } \frac{1}{2} \\ \exp(\alpha\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}) =: d & \text{m/ ssh } \frac{1}{2} \end{cases},$$

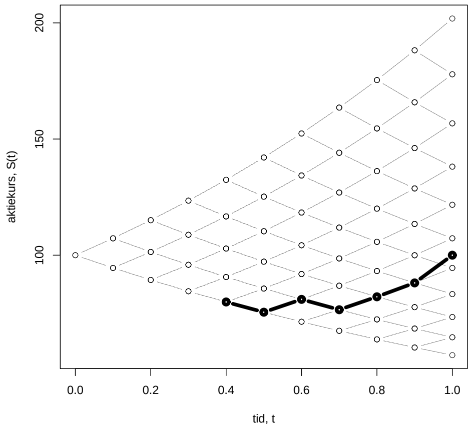
hvor α og σ er konstanter. Aktieafkastenes spredning bestemmes af σ, der kaldes volatiliteten. Igen har vi foretaget en subtil udvidelse af modelrammen: Vi kan ikke blot variere antallet af skridt, men også og uafhængigt heraf tidsskridtlængden Δt. Man kan spørge, hvorfor tidsskaleringen er som den er; specielt hvorfor $\pm\sigma\sqrt{\Delta t}$ modellerer usikkerheden. Det vil dog føre for vidt at komme ind på det her, men tro mig: Det er det.[16] Vi antager, renten er konstant og parametriserer diskonteringsfaktoren som $R_{0,t} = R^{t/\Delta t}$, hvor $R = e^{r\Delta t}$. Den betingede Q-op-sandsynlighed er den samme i alle knuder,

$$q = \frac{R-d}{u-d}.$$

Taylor-udvilker man q i Δt ser man, at led af formen $\sigma\sqrt{\Delta t}$ dominerer for små tidsskridt (hvor $\sqrt{\Delta t} \gg \Delta t$). Kombineres det med en tilpas kraftig version af den centrale grænseværdisætning, se kapitel 7 i [Lando & Poulsen (2006)], kan vise man, at α asymptotisk ingen effekt har på optionspriser — og derfor ofte udlades. Sandsynlighedsteoretikere kan skimte Girsanovs sætning her.

Tabel 1 giver en R-implementation af en naturlig algoritme til udregning af prisen på en amerikansk put-option. R er et *open source* programmeringssprog, det kan downloades fra `www.`

[16] En indikation af rimeligheden kan man få således: Benyt empiriske horisont-h log-afkast, $A_h(t) = \ln(S(t\Delta)/S(t-h\Delta t))$, til at estimere α og σ. Foretag estimationen for forskellige horisonter, h, og se, at α og σ er nogenlunde upåvirkede heraf.



Figur 1 Aktiekursgitter for standardbinomialmodellen (med 10 tidsskridt og iøvrigt parametre som i Tabel 1). De fede knuder (og aht. grafiske udtryk: linjerne, der forbinder dem) angiver den kritiske indfrielsesgrænse for en amerikansk strike-100 put-option: Første gang aktiekursen falder til dette niveau, indfries optionen.

`r-project.org` og er uhyre nemt at installere. Som noget meget nyttigt ifm. forskningssamarbejde eller projektvejledning, så er R-kode "meget transportabel". Man kan køre hinandens programmer uden den udvidede eksamen som systemadministrator. R har stærke statistik-værktøjer (med en bred fortolkning af statistik, der inkluderer fx lineær algebra og grafik) og minder syntaksmæssigt om Matlab. Det er, hvad dataloger kalder et *domain-specific language* (DSL); det retter sig imod brugere, der skal løse bestemte typer opgaver, og har så nyttig funktionalitet hertil indbygget.

Modsætningen til DSL er *general-purpose languages* (GPL) som fx C++, Java eller Python. Jeg kalder som regel DSL for højniveau-sprog og GPL for lavniveau-sprog. Datalogiske pedanter kan sikkert give grunde til, at jeg ikke burde gøre det.

I prisfastsættelsesalgoritmen trævler vi os rekursivt baglæns fra det senest mulige slutidspunkt, idet vi hele tiden udnytter, at vi netop har beregnet $(t+1)$-elementet i ligning (2). Udvidelsen ift. prisfastsættelse af den europæiske option beløber sig til en halv linjes kode. Førtidig indfrielse af put-optionen sker for lave aktiekurser. For ethvert (tilstrækkeligt stort) tidspunkt, t_i, findes i gitteret et maksimalt tid-t_i aktiekursniveau, $S^*(t_i)$, således at for aktiekurser under $S^*(t_i)$ indfries optionen. Kurven $t \mapsto S^*(t)$ kaldes den kritiske indfrielsesgrænse, en illustration ses i Figur 1.[17] Den optimale strategi for optionsejeren — der ikke kan se ind i fremtiden — er at indfri optionen første gang, den kritiske indfrielsesgrænse rammes. Som beregnere bevæger vi os altså fra højre mod venstre i gitteret, som optionsejere fra venstre mod højre.

Amerikanske optioner: rettidig omhu i regnerier

Der er en række måder at forbedre beregningstiden for den naturlige algoritme i Tabel 1:

1. Hav nyeste version installeret. For "anstændig" software sker der ofte forbedringer bag scenen, dvs. skjult for slutbrugeren,

[17] Den opmærksomme læser ser, at vi på indfrielseskurven har tegnet punktet (udløbstid, strike) (eller: (T, K)) skønt dette ikke er et gitterpunkt. Man får glattere konvergens (for $\Delta t \to 0$) af (specielt europæiske) optionspriser, hvis man (ved valg af skridtlængde) sikrer, at K altid ligger på et gitterpunkt. Den rene af sind påpeger det inkonsistente i at bruge modeller for det underliggende aktiv, der afhænger af den option, man skal prisfastsætte. *Yeah, well* ...

```
qUR<-q/R; qDR<-(1-q)/R;  u.pow<-u^(0:n); d.pow<-d^(0:n)
S<-S0*u.pow[1:(n+1)]*d.pow[(n+1):1] ; put<-pmax(strike - St,0)
for (i in n:1) {
  S<-S0*u.pow[1:i]*d.pow[i:1]
  put[1:i]<-pmax(strike-S,(qUR*put[2:(i+1)]+qDR*put[1:i]))
}
```

Tabel 2 Hastighedsforbedret kode til prisfastsættelse af en amerikanske put-option. Koden ovenfor erstatter koden under stregen Tabel 1,

og de har positiv indvikning på tidsforbruget. Her betød et skift fra R 2.11.1 til R 2.14.0 omtrent en halvering af kørselstiden.

2. Undgå unødvendige beregninger. Flyt så mange funktionskald som muligt udenfor løkker. Her gav det en ca. 10% forbedring af kørselstiden. Dimensionèr i videst muligt omfang vektorer og matricer på forhånd. Højniveau-sprog tvinger typisk ikke brugeren til dette. Det kan være behageligt, da det ligger i numeriske metoders natur, at mange ting først bliver kendt, efterhånden som programmet løser ens opgave. Men der kan være tid at spare. Et konkret R-eksempel: Skriver man skriver cbind inde i en løkke, skal en rød lampe lyse.
3. Brug indbygget funktionalitet. Her specielt: Udnyt R's evne til at arbejde med vektorer og matricer, undgå element-for-element-operationer.[18] Her nedbringer det beregningstiden med omkring en faktor 7.

[18]Ikke alle funktioner virker på fler-dimensionale objekter på den måde, du måske tror/håber. Lad fx x være en vektor og sammenlign max(x,0) med pmax (x,0). Eller lad X og Y være matricer og sammenlign X*Y med X%*%Y.

252 skridt

R-kode		C++-kode	
Metode	Tid (ms)	Metode	Tid (ms)
Windows; Tabel 1; R 2.11.1	~ 750	Visual Studio; ~Tabel 1	9
Windows; Tabel 1; R 2.14.0	720	Visual Studio; ~Tabel 2	1,5
Windows; Tabel 2; R 2.11.1	~ 30		
Windows; Tabel 2; R 2.14.0	15		
Linux; Tabel 1; R 2.11.1	(fys., p) 458 (fys., o-p) 260	GNU g++ ; ~Tabel 1	35
	(CPU, p) 126 (CPU, o-p) 119	GNU g++ ; ~Tabel 2	6,0
Linux; Tabel 2; R 2.11.1	(fys., p) 209 (fys., o-p) 57		
	(CPU, p) 55 (CPU, o-p) 51		
Europæisk B/S-formel	0,04		
10^6 B/S-sim. $\rightsquigarrow \pm$ 0,3%	310		
10^4 Tabel 4 stier $\rightsquigarrow \pm$ 1,4%	65.000		

(30 × 252) skridt

R-kode		C++-kode	
Metode	Tid (s)	Metode	Tid (s)
Windows; ~Tabel 1; R 2.14.0	600	Visual Studio; ~Tabel 2	2,3
		GNU g++ ; ~Tabel 2	12
Windows; Tabel 2; R 2.14.0	6,8		

Tabel 3 Beregningstider for algoritmer til prisfastsættelse af en amerikansk put-option i standarbinomialmodellen. Parametrene er som angivet i Tabel 1. Al kode findes i `www.math.ku.dk/~rolf/FAMOES`. Windows-kørslerne er foretaget på en Intel P8700 Core2Duo CPU med 2.5 GHz og 3 GB RAM. Eller mere forståeligt: På min et par år gamle computer, der da den var ny, var ret kraftig af en bærbar at være. Linux-kørslerne er fra IMF's Shannon-server, og her indikerer p/o-p om kørslen skete på et travlt tidspunkt eller ej (*peak*/*off-peak*).

I de meget læseværdige [Higham (2002)] og [Eddelbuettel (2009)] kan man finde mere. Køreklar R-kode ses i Tabel 2. Man kan rettelig mene, at ovenstående liste mangler et punkt: ”0. Kommenter/dokumenter dine programmer.” Lad os sige grunden til, at det ikke er gjort her, er hensynet til det typografiske udtryk.

Selv Schrödinger kunne ikke svinge en måske død kat i Tabel 3 uden at ramme en beregningstid. Allerførst ser vi, at med de forholdsvis simple justeringer nævnt ovenfor, falder tiden, det tager at udregne prisen på en 1-årig amerikansk put-option i en standardbinomialmodel med daglige skridt ($\Delta t = 1/252$), fra 750 til 15 millisekunder, dvs. med en faktor 15. Der er beregningstider både fra en (Windows-)PC og fra IMF's (Linux-)server Shannon. Når man skal dele regnekraften med andre, så er der forskel på den tid, det fysisk tager at køre programmet, og den tid, det ville have taget, hvis man havde tingene for sig selv (CPU-tiden). Der kan derfor være tydelige fordele (her en faktor 4) ved at køre sine programmer udenfor spidsbelastningsperioder, dvs. om natten og i weekenden.

En skeptiker kunne nu sige: “Ja, jo, men er det besværet værd? Forbedringen er jo mindre end et sekund.” Til det behøves bare henvises til nedre del af Tabel 3. Her beregnes en amerikansk optionspris for en 30-årig option i en model med daglige skridt; skal man eksempelvis prisfastsætte konverterbare realkreditobligationer, så er det en relevant problemstørrelse.[19] Her tager Tabel 2-koden omkring 7 sekunder, mens tidsforbruget for Tabel 1-koden er 10 minutter.[20] Så er forskellen pludselig til at få øje på, når man

[19]Som den engelske komiker Andy Zaltzman plejer at sige i den fremragende og stærkt vanedannende podcast *The Bugle*: “That's a lie, but my point stands.”

[20]Antallet af knuder i et binomialgitter vokser kvadratisk i antallet af tidsskridt. Man ville derfor forvente, at en 30-årig option tog $30^2 = 900$ gange så

sidder foran computeren. Og hvis man så ikke-spor-hypotetisk (se [Pedersen, Weissensteiner & Poulsen (2011)]) skal udregne ikke 1, men 5.000 priser, der skal indgå i et dynamisk porteføljevalgsproblem, så kan den ene beregning køres over en nat, mens den anden tager en måned. Så selv med dagens computere kan beregningstid blive en flaskehals. Det betyder, at der er al mulig grund til forske i forbedrede berergningsmetoder.

En ide er, naturligvis, at man med blyant og papir leder efter lukkede formler. Det kan give dramatiske hastighedsforøgelser; eksempelvis ser vi i Tabel 3, at det kun tager 0,04 millisekund at udregne en optionspris fra Black-Scholes-formlen (der dog kun virker for europæiske optioner). En anden mulighed er at formulere sine prisfastsættelsesproblemer vha. partielle differentialligninger og så angribe dem numerisk. Binomial-metoden kan ses som en numerisk løsningsmetode, men som sådan er den en absolut letvægter, der findes væsentligt bedre teknikker. En tredje tilgangsvinkel er Monte Carlo-simulationsteknikker, eller i min forskningsverden blot: simulation. Dette er en bred betegnelse for beregningsmetoder, hvor tilfældige tal — samt asymptotiske resultater som fx store tals lov — spiller en stor rolle. Monte Carlo henviser så til casinoet sammesteds,[21] hvor der er masser af tilfældige udfald — men hvor vi godt ved, hvordan det går i det lange løb. Simulation er som udgangspunkt langsomt. Tabel 3 viser,

---

lang tid at prisfastsætte som en 1-årig. For den naturlige metode passer det så godt, som det nogenlunde kan. Den 30-årige optimerede R-kode er noget hutigere end "forventet", $6,8 < 13,5 = 0,0015 \times 30^2$; det skyldes at de 15 millisekunder inkluderer nogle faste beregningsomkostninger eksempelvis til kompilering. C++-koden taber omvendt hastighed, $2,3 > 1,35 = 0,0015 \times 30^2$. Grunden er ikke helt klar for mig, måske ekstra omkostninger til hukommelsesallokering ifm. lange vektorer.

[21] For administrative feinschmeckere er Monte Carlo et kommunaldisktrikt i fyrstendømmet Monaco.

at for at ramme en europæisk put-optionspris indenfor 1% skal der omkring en halv million udfald til. Det tager nogle hundrede millisekunder. Og det kræver endda, at man kan simulere $S(T)$ direkte, dvs. ikke skal lave sti-vise beregninger. Skal man det, så eksploderer beregningstiden. Den simulationsbaserede amerikanske optionsprisfastsættelseskode fra Tabel 4 tager 65.000 millisekunder. (Og den regner ikke engang det rigtige ud, men det har ikke noget med hastigheden at gøre.) Simulationsmetoders styrke ligger i deres alsidighed; mange mere komplicerede modeller og problemstillinger har de let ved at håndtere. Og ofte[22] er det vigtigere at have et approksimativt svar på det rigtige spørgsmål, end et ultra-præcist svar på et forkert spørgsmål.

En fjerde mulighed er at skifte hest ved at programmere prisfastsættelsesalgoritmerne i et lavniveau-sprog; C++ er den finansielle sektors foretrukne. Det stiller større krav til programmeringsfærdigheder, men belønningen skulle gerne være forøget hastighed; brugervenlighed i interfacet og ekstra funktionalitet koster. Algoritmerne fra Tabel 1 og 2 er stort set bare løkker indeni hinanden, så de er nemme at implementere i C++. I højre søjle i Tabel 3 ses beregningsstider. Man opnår en tydelig forbedring (under Windows er det 15 vs. 1,5 millisekunder for en 1-årig option og 6,8 vs. 2,3 sekunder for en 30-årig option). Men det gode højniveau-sprog er ikke håbløst bagud. Sammenlignes en naiv implementering (ala Tabel 1) i Microsofts Visual Studio-miljø med den optimerede R-kode, så er forskellen blot 10 vs. 15 millisekunder for 1-årige optioner. For 30-årige optioner er R-kodens tider en faktor 3 fra C++-kodens. Meget groft sagt er beregningstids-

[22] Man kan mene, at “ofte” burde være “altid”. Det synspunkt afspejles dog ikke udpræget i vore uddannelser.

forbedringen altså her halvanden størrelsesorden[23] ved, at man tænker sig om indenfor R, og en halv størrelsesorden ved, at man skifter R ud med C++. Så det er ikke en datalogisk dødssynd, at lade det afhænge af situationen,[24] om man skønner det umagen værd at bruge C++. I sådanne overvejelser er et realistisk forhold til egne programmeringsevner tilrådeligt.

Amerikanske optioner og simulation: hvordan ikke og hvordan så?

Et af de store forsknings- og anvendelsesområder indenfor kvanititativ finansierngsteori de seneste 10 år har været brugen af simulation til prisfastsættelse af amerikanske optioner. Det ”folkelige gennembrud” kom med [Longstaff & Schwartz (2001)]. Denne artikel var dog langt fra den første, der kombinerede amerikanske optioner og simulation. Forfatterne til eksempelvis [Carriere (1996)], [Broadie & Glasserman (1997)] og [Andersen (1999)] kan med en vis ret mugge over, at have fået stjålet rampelyset. Jeg tror en meget vigtig grund til, at det er [Longstaff & Schwartz (2001)], der løber med citationerne, er at forfatterne turde bruge — selv i et af de mest prestigefyldte tidsskrifter — de første 10 sider til detaljeret at gennemgå et simpelt taleksempel; 3 perioder, 8 stier, alle kan være med. Men inden jeg når til Longstaff og Schwartz' (simulation-regression)-ide, vil jeg først forklare, hvorfor det *er*

[23]Med det bevidst løse begreb “størrelsesorden” mener jeg noget ala ”tipotens til forskel”, så faktor 10 er en størrelesorden, faktor 100 er to, og faktor $3 \approx 10^{0.5}$ er en halv.

[24]Et sted det *er* umagen værd at bruge C++, eller i hvert fald at kalde kompileret kode fra R, er ved løsning partielle differentialligninger med differensmetoder.

```
Nsim<-10000
DiscPayoff<-rep(0,Nsim)
S<-rep(S0,(n+1))

for (j in 1:Nsim){
  UpMoves<-cumsum((runif(n) < q))
  S[2:(n+1)]<-S0*u^UpMoves*d^((1:n)-UpMoves)
  SnellZ<-gS<-pmax(strike-S,0)
  for (i in n:1) SnellZ[i]<-max(gS[i],R*SnellZ[i+1])
  tau.index<-dummy[SnellZ==gS][1]
  DiscPayoff[j]<-disc^((tau.index-1))*gS[tau.index]
}

print(c(mean(DiscPayoff), 1.96*sd(DiscPayoff)/sqrt(Nsim)))
```

Tabel 4 En simulationsalgoritme, man kunne tro, udregner den amerikanske put-optionspris. Men det gør den ikke.

overraskende og langt fra oplagt, at det overhovedet kan lade sig gøre. Til det formål vil jeg vise, hvordan man *ikke* skal gøre.

Der er andre måder end ligning (2) at karakterisere den amerikanske optionspris på. I den sammenhæng er *stoppetider* vigtige. Definitionen er (her) simpel: en stoppetid, τ, er en stokastisk variabel, der tager værdier i mængden $\{0, 1, \ldots, T\}$ for hvilken hændelsen $\{\tau \leq n\}$ er $\mathcal{F}_n$-målelig for ethvert n. Intuitivt betyder det, at på tid n ved vi, om vi er stoppet eller ej. Den amerikanske optionspris kan repræsenteres som løsningen til det optimale stoppetidsproblem

$$\pi^A(0) = \max_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^Q \left(e^{-r\tau} g(S(\tau)) \right), \tag{3}$$

hvor $\mathcal{T}$ er mængden af alle stoppetider. Og det lyder jo rimeligt nok; vi stopper, så vi ("i forventning" og diskonteret) får mest muligt ud af vores option. Det optimale tidspunkt at stoppe, τ^*, er

$$\tau^* = \min\{t \mid g(S(t) = V(t)\}, \tag{4}$$

hvor den såkaldte Snell-foldning V er defineret rekursivt baglæns ved $V(T) = g(S(T))$ og

$$V(t) = \max\{g(S(t)), e^{-r\Delta t}\mathbb{E}_t^Q(V(t+\Delta t))\}. \qquad (5)$$

Igen: Det lyder rimeligt nok. Ligningen ovenfor er jo stort set (2), og vi kan vel ligeså godt stoppe første gang, det ikke kan blive bedre.

Man kan nu forsøge regne på (3)-(5) med denne algoritme:

1. Simuler N aktiekurs-stier hver med n skridt, $\{S_j(t_i)\}_{i=0}^n$, hvor $\Delta t = T/n$, $t_i = i\Delta t$ og j-indekset angiver sti-nummeret.
2. Udregn foldningen som
$$V_j(t_i) = \max\left\{g(S_j(t_i)), e^{-r\Delta t}V_j(t_{i+1})\right\}.$$
3. Brug $\tau_j^* = \min\{t_i \mid V_j(t_i) = g(S_j(t_i))\}$ som indfrielsestidspunkt for sti j.
4. Udregn gennemsnittet over mange stier (j) af $e^{-r\tau_j^*}g(S_j(\tau_j^*))$ og brug det som estimat for den amerikanske optionspris.

Algoritmen er implementeret som R-kode i Tabel 4. I Tabel 5 sammenlignes beregnede priser. Simulationsalgoritmen ovenfor giver en pris, der er omtrent dobbelt så stor som den korrekte amerikanske put-optionspris. Ups. Så hvad er der galt? Fejlen ligger i algoritmens 2. skridt, foldningsudregningen. Her er den betingede forventningsoperator fra ligning (5) forsvundet. Beregningen af foldningen bruger derfor fremtidig information, hvorved det fundne indfrielsestidspunkt matematisk set ikke er en stoppetid. Et par faktorer gør en fejlagtig implementation som denne svær at fange. For det første er den forkerte pris ikke *åbenlyst* forkert; om 6,74 eller ca. 13 er det rigtige tal, er ikke umiddelbart oplagt. Det betyder så på positiv-siden, at en pris udregnet med den slags fuld forudsigelighed er en ikke-triviel øvre grænse

Optionstype	Algoritme	Pris (± konf'bånd)
Eu. put		6,46
Am. put	Tabel 1	6,74
Am. put (misforstået)	Tabel 4	13,0 $\pm 0,2$
Am. put	L & S (2001)-sim.	6,7 $\pm 0,2$

Tabel 5 Den amerikanske put-option forsøgt prisfastsat med algoritmen og parametrene fra Tabel 1 (korrekt), med algoritmen fra Tabel 4 (forkert) og med simulationsmetoden fra Longstaff & Schwartz (2001) (appoksimativt korrekt; der bruges 2.-gradspolynomier i regressionerne). Ved at tillægge eller fratrække tallet angivet med ± fås 95%-konfidensintervallet for prisestimaterne opnået ved simulation.

for værdien af den amerikanske option. I mere avancerede sammenhænge kan den korrekte optimale indfrielsesstrategi være meget vanskelig at beregne, men den øvre grænse nem. I kapitel 3 i [Rasmussen, Madsen & Poulsen (2011)] bruges det til at finde øvre grænser for konverteringsgevinster i realkreditmarkeder, og folk snedigere end os bruger ideen i såkaldte primal-dual-simulationer. For det andet er foldningsberegningen "lokaliseret", den involverer kun t_i og t_{i+1} så man ved første øjekast "ikke ser ret langt ind i fremtiden" — men altså alligevel nok til at tingene bryder sammen.

Lad os nu se på, hvad man så kan gøre. Vi beholder vores N simulerede aktiekurs-stier, zoomer ind på et tidspunkt t_i og antager i den baglæns rekursive tradition, at alt t_{i+1}-relevant allerede er beregnet. Markov-egenskaben fortæller os, at tidsværdien af optionen har den funktionelle form

$$\mathbb{E}^Q_{t_i}(\pi^A(t_{i+1})/R) =: f_{t_i}(S(t_i)).$$

Langs sti j kender vi det rette *argument*, tallet $S_j(t_i)$, problemet er, at vi ikke kender *funktionen* f_{t_i}. Det er en betinget forventet værdi, så vi kunne prøve at starte N nye simulerede stier fra $S_j(t_i)$. Men for hver af dem ville vi på tid t_{i+1} skulle starte nye stier osv. hele vejen ud til tid T. Vi ender med at have noget ala N^n stier (fx 10.000^{252}), og det jo ikke til at have med at gøre.[25] Men vi kan jo prøve med et gæt eller en approksimation til f_{t_i}'s form, fx kvadratisk

$$f_{t_i}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

hvor a'erne er ukendte koeffcienter, som vi vil estimere. (De budre egentlig have t_i'er på, men det er sent i artiklen ...) Vi opfatter nu næste periodes (diskonterede) faktisk realiserede optionsværdi $\pi^A_j(t_{i+1})/R$ (husk: det tal har vi beregnet, da vi arbejder rekursivt baglæns) som et *signal* om tidsværdien. Det gør vi for alle stier og kombinerer det med den postulerede funktionelle form af f_{t_i}, så vi får ligningerne

$$\pi^A_j(t_{i+1})/R = a_0 + a_1 S_j(t_i) + a_2 S^2_j(t_i) + \epsilon_j \text{ for } j = 1, \ldots, N,$$

hvor ϵ_j'erne er fejlled. Vi kan nu estimere a'erne ved lineær regression, her specifikt

$$\widehat{a} = \frac{1}{R}(X^\top X)^{-1} X^\top \pi^A(t_{i+1}),$$

[25] Sådanne "nested simulations" er ikke helt så fjollede, som jeg her får dem til at se ud. Men beregningsmæsssigt dyre er de altid.

hvor X er en matrix med indgange $X_{j,k} = S_j^{k-1}(t_i)$ for $j = 1, \ldots, N$ og $k = 1, 2, 3$. Det er denne regression på tværs af stier, der sikrer, at fremtidige værdier ikke udnyttes på en "ulovlig" måde. For at forstå forskellen til det første simulationsforsøg kan man gøre sig følgende tankeeksperiment: I næstsidste periode har to simulerede stier begge aktiekursen 98. For den ene sti slutter aktiekursen i 102, for den anden i 97. I "snyde-algoritmen" indfries strike-100 put-optionen for den første sti (venter man får man 0; bedre at få 2 nu), men ikke for den anden (venter man får man 3 isf. 2 nu). Brugen af den estimerede funktionelle form af tidsværdien sikrer, at man for stier med samme aktiekurser træffer de samme indfrielsesbeslutninger.

Som tid-t_i optionsværdi(estimat)er bruger vi

$$\pi_j^A(t_i) = \max\left((K - S_j(t_i))^+, \sum_{k=1}^{3} X_{j,k}(t_i)\widehat{a}_k\right),$$

vi estimerer det kritiske niveau for indfrielse som $S^*(t_i) = \max\{x \leq K \mid K - x = f_{t_i}(x)\}$, og vi er klar til at fortsætte videre baglæns til tidspunkt t_{i-1}.

Der er et par ekstra julelege i Longstaff og Schwartz' fulde algoritme (fx at man kun bruger in-the-money-stier i regressionen), som gør koden for omfattende til at blive gengivet her, men den kan findes samme sted som artiklens øvrige programmer.

Sidste linje i Tabel 5 viser, at selv med den nok noget friske kvadratiske approksimation til optionens tidsværdi, så ligger den beregnede amerikanske put-optionspris ganske tæt på den (i binomialmodellen entydigt) sande værdi; 6,7 ± 0,2 ift. 6,74. En grund til dette er den forholdvis tilgivende natur af problemet: Vi skal finde det kritiske niveau, hvor vi skal indfri vores option. Det er netop der, hvor værdien af at indfri er den samme som af at holde optionen i live. Mindre fejltagelser er derfor næppe katastrofale.

Hvorfor amerikanske optioner burde blive kaldt Kierkegaard-optioner

Søren Kierkegaard skrev, at "livet leves forlæns, men forstås baglæns". Det beskriver præcis situationen for amerikanske optioner: Vi bestemmer den optimale indfrielsesstrategi (og samtidig prisen) rekursivt baglæns, men må som ejere af en amerikansk option følge strategien forlæns i tid uden at kunne se ind i fremtiden.

Litteratur

[Andersen (1999)] Leif Andersen. A simple approach to the pricing of Bermudan swaptions in the multifactor LIBOR market model. *Journal of Computational Finance*, 2:5–32, 1999.

[Broadie & Glasserman (1997)] Mark Broadie and Paul Glasserman. Pricing American-Style Securities by Simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1323–1352, 1997.

[Carriere (1996)] J. F. Carriere. Valuation of the early-exercise price for derivative securities using simulations and splines. *Insurance: Mathematics and Economics*, 19:19–30, 1996.

[Eddelbuettel (2009)] Dirk Eddelbuettel. *Introduction to High-Performance Computing with R.* Præsentation ved The Institute of Statistical Mathematics Tachikawa, Tokyo, 2009. http://dirk.eddelbuettel.com/papers/ismNov2009introHPCwithR.pdf.

[Higham (2002)] Desmond J. Higham. Nine Ways to Implement the Binomial Method for Option Valuation in MATLAB. *SIAM Review*, 44:661–677, 2002.

[Lamberton & Lapeyre (1996)] Daniel Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall, 1996.

[Lando (1999)] David Lando. En hovedsætning i finansieringsteorien — og lidt om kreditobligationer. *FAMØS*, 13:9–20, 1999.

[Lando & Poulsen (2006)] David Lando and Rolf Poulsen. *Notes for Finance 1 (and More)*. Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, 2006. http://www.math.ku.dk/~rolf/ifnotes.pdf.

[Longstaff & Schwartz (2001)] Francis A. Longstaff and Eduardo S. Schwartz. Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *Review of Financial Studies*, 14:113–147, 2001.

[Pedersen, Weissensteiner & Poulsen (2011)] Anne Marie Boiden Pedersen, Alex Weissensteiner, and Rolf Poulsen. Financial planning for young households. Working paper, http://www.math.ku.dk/~rolf/MultistagePaper_260811.pdf, 2011.

[Rasmussen, Madsen & Poulsen (2011)] Kourosh Marjani Rasmussen, Claus Madsen, and Rolf Poulsen. *Realkreditrådgivning: Et studie af danskernes valg af realkreditlån og konverteringspraksis*. Boligøkonomisk Videncenter, 2011. http://www.bvc.dk/SiteCollectionDocuments/Analyser/Konverteringsanalyse.pdf.

Blokkens spil

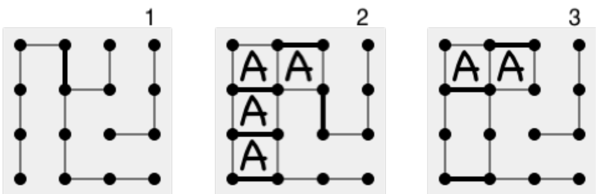
– Lejligheder

Bo 'Maling' Malling & Martin Patrick Speirs

I dette nummer ser vi på spillet "Lejligheder". Det kræver blot en blyant og et stykke (kvadreret) papir. Lejligheder spilles oftest af to spillere (A og B), på et $N \times M$ gitter af punkter. Spillerne skiftes til at foretage et træk. Et træk består i forbinde to nabopunkter med en lodret eller vandret linje. Hvis man med sin linje skaber en 1×1 kasse må man skrive sit bogstav i kassen og foretage endnu et træk. Spilleren med flest kasser, når der er lavet $(N-1) \times (M-1)$ kasser (alt er fyldt ud), bliver kåret som vinder.
I 2001 viste David Wilson, at Lejligheder altid kan vindes af spiller B (personen der *ikke* starter) på et 3×5 bræt.

Opgaver:

- I hvor lang tid kan et spil fortsætte, før der nødvendigvis kommer en 1×1 kasse?
- For hvilke brætstørrelser er det muligt at finde en vindende strategi for spiller A?



Figur 1 I ovenstående eksempel er billede 1 udgangspunktet, hvor B lige har sat den tykke streg, og det er A's tur. I spil nr. 2 vil A tabe. I spil nr. 3 vil A vinde.

Udvidelser:

- Prøv spillet med tre eller flere spillere. Hvilken betydning får det for din strategi?
- Prøv spillet, hvor man kun behøver at lukke en 2×1 kasse for at sætte sit bogstav.
- Prøv spillet, hvor man ikke får lov til at trække igen, efter man laver en kasse.

The American (College) Dream

Lise Lindberg Frellesen

Kender du følelsen af at man sidder dag efter dag og stirrer ind i den samme tavle/underviser/mur? Og kender du følelsen af, at man bare vil langt væk fra det hele, men samtidig ikke bare glemme alt om sin uddannelse?

De følelser kendte jeg alt for godt da jeg sad som andenårsstuderende, og virkelig trængte til noget motiverende for at færdiggøre min bachelorgrad. Men heldigvis fandt jeg en løsning på det hele: Jeg skred sgu! Jeg pakkede min skoletaske, hoppede på et fly og flyttede ind på Boston College. Okay, okay! Så nemt er det måske heller ikke at tage ud og studere i udlandet. Faktisk er der rigtig meget hårdt arbejde og planlægning i det, men jeg kan love at det er det hele værd!

Jeg har nu været her på Boston College i 3/4 af min tid (ca. 3 måneder), og vil næsten ikke hjem igen. Det er en meget anderledes oplevelse at prøve at studere på et privat universitet (Jep, lad dig ikke narre af navnet: Boston College er faktisk et universitet!) i forhold til et offentligt, som KU. Her kan man sagtens mærke at det ikke er gratis at gå! Alle bygninger, lokaler, omgivelser og faciliteter bliver holdt bedre øje med end russer, der prøver at dividere med nul! Alt her ligner en teenage college-film, hvor der bliver drukket/festet i smug (da aldersgrænsen er 21!), der er mødepligt til timerne, helt uhyggeligt klamt mad i kantinen, helt uhyggeligt dumme football spillere (som man rent faktisk har timer sammen med) og helt vildt venlige mennesker. Man kan sige meget om amerikanerne, men de er virkelig åbne og venlige. Det kan dog tage sin tid rigtigt at komme ind på dem, men de er der altid når man har brug for det. Det samme gælder lærerne, som man her kommer helt tæt på, da ”forelæsningerne” mere er som undervisningen i gymnasiet, hvor man kun er 25-30 elever i klassen, og aktiv deltagelse tæller med i ens endelige karakter. Det gode ved dette system er at man ikke er bange for at spørge sin lærer om hjælp til en aflevering eller bare forståelse af pensum og samtidigt giver det et meget mere afslappet forhold mellem lærer og elev, hvormed der er meget mere forståelse for, hvis eleven fx skal til New York samme dag, som der er midterm. Specielt for os stakkels udvekslingsstuderende er lærerne ekstra forstående. Ang. midterms må jeg lige advarer om at amerikanerne er helt pjattede med prøver og afleveringer! De kan faktisk ikke rigtigt få nok af dem, så selvom det hedder midterm, er der meget ofte to af dem i et semester (Hmm.. Dermed burde det nok mere hedde 1/3-term). Oven i det er der i de fleste kurser også en aflevering om ugen, så der bliver brugt n gående mod uendeligt mængder af timer på læsesalen. Her skal det nok lige nævnes til en (slags) trøst, at niveauet ikke altid er det højeste i USA. Specielt når det kommer til matematik lever amerikanerne op til deres ry, som ikke værende de aller skarpeste knive i skuffen. Men hvis man ser bort fra alt det hårde arbejde, er det skam drøn sjovt at være i USA!

Boston College har lavet en masse arrangementer for os internationale studerende, så vi ikke skal kede os eller føle os ensomme. Fx har vi været på guidet tur rundt i byen, til vaskeægte prom, en masse football kampe, BBQ hygge, museumsturer, cup cakedekorationskursus, paintball og tusind andre ting! Så på bare et enkelt semester kan jeg love, at man får en vaskeægte amerikansk college-oplevelse, som man kender fra diverse tv-serier. Derudover skal man huske at med opfindelser som Skype, Facebook, E-mails, mobiltelefoner og andet gøgl, behøver man altså ikke ligge søvnløs ved tanken om hjemve. Det er pærelet at holde kontakt med vennerne derhjemme, og med internetsider som MUH kan man også sagtens følge med i de store nyheder i hjemlandet.

Hvis du føler dig fristet af at tage ud skal du først og fremmest vide at man skal være i god tid! Der skal nemlig søges om et udvekslingsophold et helt år i forvejen! Og før ansøgning skal du allerede have besluttet præcis hvor du vil hen, hvad du vil studere og have skaffet en masse dokumenter, men alt dette kan Det Internationale Kontor hjælpe dig med. Og så er det selvfølgelig vigtigt at komme til de dersens foredrag om udlandsophold! Og så er det måske også lige lidt vigtigt at nævne, at man altså ikke behøver tage til USA som mig, men at der også er udvekslingsaftaler med mange andre lande over hele Jorden. Så du kan faktisk komme næsten lige derhen du drømmer om!

FAMØS

Famøs december 2011
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Tegnere:
Maja Kærulff Schliemann

Deadline for næste nummer:
29. februar 2012

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til famos@math.ku.dk – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

Famøs er et internt fagblad.
Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet Famøs
c/o Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.math.ku.dk/famos/

Oplag: 500 stk.
ISSN: 1903-2227

21. årgang, nr. 2, december 2011