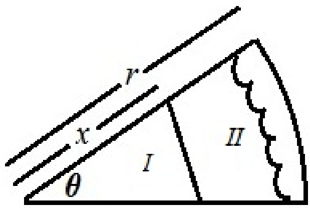
Den uundværlige kagedelingsformel

Jacob Stevne Jørgensen

Du kender sikkert problemet. Du sidder til kagesøster, der er kun ét stykke lagkage tilbage, I er to sultne sjæle og kun den ene af jer kan lide flødeskum. Hvordan deler I kagen i to lige store stykker kun ved hjælp af lineal og vinkelmåler?

Problemet har plaget matematikstuderende i århundreder, men fat mod, endelig er en formel blevet udledt, der udtrykker forholdet x/r ved θ alene, så stykkerne I og II får samme areal.



Sætning 1 *Lad I og II være disjunkte, konvekse delmængder af $\mathbb{R}^2$, der opfylder at I er den åbne ligebenede trekant med lige ben af længde x og mellemliggende vinkel θ, og $I \cup II$ er det åbne cirkeludsnit med centervinkel θ af cirklen med radius r (fraregnet snitlinjen s)[8], hvor $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $r > 0$, $0 < x < r$.*
Lad endvidere $A\colon M \to \mathbb{R}$ betegne arealfunktionen, hvor $M = \{K \subset \mathbb{R}^2 \mid K$ er ikke-tom, åben, begrænset og konveks$\}$.

Da er $A(I) = A(II)$ hvis og kun hvis $\frac{x}{r} = \sqrt{\frac{\theta}{2\sin\theta}}$

[8]Denne linje svarer til den mængde kage, der bliver siddende på kniven og som bekendt er forsvindende lille.

Bevis. Bemærk, at da I og II er disjunkte, er

$$A(I \cup II) = A(I) + A(II)$$

Basal geometri giver os følgende:

$$\begin{aligned} A(I) &= \frac{x^2 \sin\theta}{2} \\ A(I \cup II) &= \pi r^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{r^2\theta}{2}. \end{aligned}$$

Vi har her benyttet, at arealet af et cirkeludsnit fratrukket en linje er lig arealet af cirkeludsnittet.

Nu har vi

$$\begin{aligned} A(I) &= A(II) && \Leftrightarrow \\ A(I) &= \frac{A(I) + A(II)}{2} && \Leftrightarrow \\ A(I) &= \frac{A(I \cup II)}{2} && \Leftrightarrow \\ \frac{x^2 \sin\theta}{2} &= \frac{r^2\theta}{4} && \Leftrightarrow \\ \frac{x^2}{r^2} &= \frac{\theta}{2\sin\theta} && \Leftrightarrow \\ \frac{x}{r} &= \sqrt{\frac{\theta}{2\sin\theta}}, \end{aligned}$$

hvor vi ved sidste biimplikation har benyttet, at
$x, r, \theta, \sin\theta > 0$ □

- Og så er det vist tid til noget kage!