# Rækken af de reciprokke primtal er uendelig

*Jens Siegstad*

Det har allerede siden 300 fvt. været kendt, at der findes uendeligt mange primtal. Vi kender alle Euklids elegante bevis. I 1737 gav Euler et analytisk bevis for at der findes uendeligt mange primtal. Euler viste følgende sætning.

**Sætning 1** *Lad* $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ *betegne mængden af primtal nummereret i voksende orden. Da gælder at rækken*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

*er divergent.*

Vi får behov for følgende.

**Lemma 2** *Antag at* $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. *Da gælder at*

$$(1-x)^{-1} \leq e^{2x}. \tag{1}$$

*Bevis.* Lad $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. At vise (1) er ensbetydende med at vise følgende

$$1 \leq (1-x)\, e^{2x}. \tag{2}$$

Sæt $f(x) = (1-x)e^{2x}$. Da er $f'(x) = e^{2x}(1-2x) > 0$ for $x \in (0, \frac{1}{2})$. $f$ er således voksende på $[0, \frac{1}{2}]$ og da $f(0) = 1$ følger uligheden (2) □

Vi kan nu vise sætning 1.

*Bevis.* For ethvert naturligt tal $n \geq 2$ lader vi

$$P_n = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq n\}.$$

Vi viser først at

$$\prod_{p \in P_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Antag at $p \in P_n$. Da $p$ er et primtal er $p \geq 2$ og dermed er $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$. Vi finder da ved anvendelse af formlen for en geometrisk række at følgende ulighed gælder for ethvert primtal $p$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^j \\ &> \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{p}\right)^j . \end{aligned}$$

Det følger nu at

$$\prod_{p \in P_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} > \prod_{p \in P_n} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{p}\right)^j . \tag{4}$$

Ganger vi højresiden af (4) ud fås en sum af formen $\sum_{j \in A_n} \frac{1}{j}$ hvor $A_n$ er en mængde bestående af naturlige tal. Mængden $A_n$ indeholder ihvertfald alle de naturlige tal fra 1 til $n$, idet $P_n$ indeholder alle primtal mellem 1 og $n$, og idet $m \leq n$ kan skrives som et produkt af primtal fra mængden $P_n$. Heraf følger uligheden (3). Ifølge ovenstående lemma har vi at

$$\left(1 - p^{-1}\right)^{-1} \leq \exp\left(2p^{-1}\right).$$

Ved gentagen anvendelse af ovenstående ulighed samt funktionalligningen for eksponentialfunktionen finder vi at

$$\begin{aligned}\exp\left(2\sum_{p\in P_n} p^{-1}\right) &= \prod_{p\in P_n} \exp\left(2p^{-1}\right)\\ &\geq \prod_{p\in P_n} \left(1-p^{-1}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Samlet set har vi nu at

$$\exp\left(2\sum_{p\in P_n} p^{-1}\right) > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.$$

Ovenstående vurdering holder for ethvert $N$ og lader vi $N\to\infty$ fås, idet den harmoniske række er divergent, at

$$\lim_{N\to\infty} \exp\left(2\sum_{p\leq N} p^{-1}\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Heraf følger det at

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$$

og dermed har vi vist det ønskede. □

**Corollary 3** *Der findes uendeligt mange primtal*

*Bevis.* Antag at der findes endeligt mange primtal $p_1,\ldots,p_N$ da er rækken

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p_n}$$

blot en endelig sum og således konvergent i modstrid med den foregående sætning. □

Et interessant spørgsmål er nu hvor hurtigt rækken af reciprokke primtal divergerer. Hvor hurtigt divergerer den for eksempel sammenlignet med den harmoniske række? Lad

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

og definer $\gamma_n = H_n - \log n$. Det kan vises (se [1]) at talfølgen $\gamma_n$ opfylder at $0 < \gamma_n < 1$ og konvergerer mod tallet $\gamma = 0.5772\ldots$. Konstanten $\gamma$ kaldes **Eulers konstant**. Vi kan nu overveje hvor mange led der skal tage med i den harmoniske række for at summen overstiger 100. Af ovenstående følger det at $H_n$ vokser cirka som $\log(n)$ og at $H_n > 100$ kræver $n > e^{99} \approx 10^{43}$.

Ved hjælp af primtalssætningen (se [2]) kan det vises at $\sum_{p\in P_n} \frac{1}{p}$ vokser cirka som $\log\log(n)$ når $n$ er stor nok. Rækken af de reciprokke primtal divergerer således utroligt langsomt.

## Litteratur

[1] John M. Howie. *Real Analysis*. Springer, 2001.

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem`

[3] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill,1976.