$\sqrt{2}$ er irrational

Benjamin Randeris Johannesen

Alle kender mindst et bevis for at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal, men de fleste kender kun det ene ældgamle bevis, man typisk bliver præsenteret for. Et andet bevis, man måske har set, udnytter, at der for enhver rational rod $\frac{p}{q}$ (lad os sige, at p og q er indbyrdes primiske!) i et polynomium

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

med $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ opfylder, at $p \mid a_0$ og $q \mid a_n$. Specielt har vi, at hvis f er et monisk polynomium (dvs. $a_n = 1$), så er $q = 1$. Herfra følger det, at $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, da $\sqrt{2}$ er en rod i $g(x) = x^2 - 2$, hvorfor $\sqrt{2}$ er et helt tal eller et irrationalt tal, men det er ikke et helt tal, for 2 er ikke et kvadrattal. (Her benytter vi naturligvis bl.a. aritmetikkens fundamentalsætning). Dette bevis lader sig naturligt generalisere:

Theorem 1 *Hvis $n \in \mathbb{N}$ ikke har formen $n = k^m$, $k, m \in \mathbb{N}$, da gælder, at $\sqrt[m]{n} \notin \mathbb{Q}$.*

Bevis. Hvis $p, q, n \in \mathbb{N}$ med p og q indbyrdes primiske og $(\frac{p}{q})^m = n$, så er $q = 1$ (overvej!). □

Vi runder af med et meget charmerende bevis for at $\sqrt{2}$ er irrational, et bevis der måske er både simplere og mere elegant end de fleste andre beviser for sætningen.

Theorem 2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Bevis. Antag for modstrid, at $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Der findes da $n \in \mathbb{N}$, således at $n\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Vi bruger velordningsprincippet og lader $n \in$

$\mathbb{N}$ betegne det mindste naturlige tal, som opfylder at $n\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Bemærk, at $n > n(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{N}$, da $2 > \sqrt{2} > 1$. Iagttag endelig blot, at $n(\sqrt{2}-1)\sqrt{2} = 2n - n\sqrt{2} \in \mathbb{N}$, hvilket er en modstrid. $\square$