Matematik, der afgør spil

– Sandsynlighedsregning vinder ofte. Kombinatorisk spilteori sejrer hver gang

Mads Thrane

Hvis du er træt af at tabe opvasketjansen i *Sten—Saks —Papir* eller *Terning*, så skal du følge med her:

Traditionelt set har matematisk spilteori drejet sig om sandsynlighedsregning. Grundlaget for den teori blev lagt allerede i det 17. århundrede af især matematikerne Jacob Bernoulli og Laplace, og er siden blevet hvermandseje. Visse spil kan dog stadig drille en matematiker. F. eks. det såkaldte »Monty Halls paradoks«:

Du er med i et spil, hvor du skal vælge mellem 3 døre: Bag den ene er en bil og bag de øvrige geder. Når du har truffet dit valg, åbner værten en/den af de 2 andre døre, som skjuler en ged, med spørgsmålet: VIL DU SKIFTE DØR?
Sandsynligheden for gevinst fordobles, hvis du gør.

De fleste spil indeholder et element af tilfældighed, men der findes en del spil, der ikke indeholder tilfældigheder med *Skak* som en af de vigtigste repræsentanter.

Nogle af disse spil indeholder i stedet begrænset information, som f. eks. *Sten—Saks —Papir*, hvor det ikke er terninger, men modstanderens valg, der afgør spillet. Et andet kendt eksempel er *Prisoner's Dilemma*, som er beskrevet i FAMØS i marts 1996 i artiklen „At stemme eller ikke at stemme II“ — der i øvrigt er en god artikel. Overvejelserne herom kaldes strategisk spilteori, men bliver ofte bare omtalt som spilteori.

Tilbage er den mængde spil, hvor man kan sikre en sejr hver gang; De rene kombinatoriske spil.

Knuseren. . .

Kombinatoriske spil er f. eks. *Kryds og Bolle*, *Lejligheder*, *Kalaha*, *Skak*, *Nim*, *Go* osv. Der er stor forskel på dem: I nogle er der løkker, dvs. man kan komme tilbage til en tidligere tilstand, i nogle er samme træk ikke tilgængelig for begge spillere, sædvanligvis er den ene spiller sort og den anden hvid, i nogle har hver spiller mere end 1 træk per tur, osv.

I den traditionelle, stramme definition af kombinatoriske spil er der kun 2 spillere, da resultatet ellers kan afhænge af sympatier spillerne imellem. De 2 spillere har i hver tur kun 1 træk til rådighed. Taberen er den, der først løber tør for træk. Den anden vinder.

Det kan lyde som en stor begrænsning, men der er stadig en meget stor mængde spil at arbejde på. Desuden kan man ofte benytte teknikker herfra til at analysere de øvrige kombinatoriske spil.

Det første spil, der blev løst ved kombinatorisk spilteori, var *Nim*, som er kendt i Europa allerede i starten af det 16. århundrede. Løsningen blev fundet i 1901, og da Piet Hein opdagede resultatet, ødelagde det spillet for ham.

Hvis et spil er endeligt og uden løkker, og man sørger for, at begge spillere har samme træk til rådighed, er det klart, at man kan tegne en orienteret graf over alle trækmulighederne med udgangspunkt i spillets start. Hver trækmulighed resulterer i et delspil, hvor man kan gentage proceduren, indtil der ikke er flere trækmuligheder, 0-spillet.

Definition 1 En spillers træk er en overgang fra et spil til et

andet, og derfor beskrives vinderen af et spil, som Næste eller Foregående spiller. Det kaldes udfaldet.
En option er et delspil, der er muligt at komme til ved 1 træk.

0-spillet vindes af Foregående, da det jo var sidste træk, der resulterede heri. For de øvrige spil kan man ud fra optionerne, altså trækmulighedernes resultat, afgøre udfaldet; Hvis der blandt optionerne er en med udfaldet Foregående, så har spillet selv udfaldet Næste. Ellers har spillet udfaldet Foregående.

Ved at »rulle grafen op« afgøres vinderen uden der er foretaget et fysisk træk. Og man behøver ikke en modstander, bare en startposition.

Nim er et af de enkleste af disse: Det er et spil med flere stakke bestående et af forskelligt antal pinde. Traditionelt med 3 stakke med i alt 12 pinde. Du kender det måske fra filmen „Sidste år i Marienbad“ (Alain Resnais, 1961).
2 spillere skiftes til at trække. Et træk består i at fjerne et antal pinde, dog mindst 1, fra 1 stak. Den, der tager den sidste pind, vinder.

Figur 1 Løsning af (3, 4, 5)

	0	1	1	3
	1	0	0	4
$\oplus$	1	0	1	5
$=$	0	1	0	2

Eksempel 2 Betragt situationen med 1 stak af n pinde. Det er klart, at 1 spiller altid vinder ved at rydde bordet.

En mindre triviel situation er 2 stakke med hhv. 5 og 3 pinde: Du ser nok hurtigt, at det gælder om at trække først og gøre antallet af pinde i de 2 stakke ens, for herefter at „efterabe“ den andens træk. Samtidig er det klart, at hvis der er 2 stakke med samme antal, når du skal trække, så er du i problemer.

Findes der en vinderstrategi, hvis stakkene er af størrelse 3, 4 og 5 eller størrelse 2, 4 og 6?

Løsningen for alle positioner i *Nim*, som Charles L. Bouton fandt, er at tage hver staks størrelse, repræsentere dem på binær form og lægge dem sammen, hvor der ses bort fra menter (!), således en stak af størrelse 3 og 1 omformes til $11 \oplus 1 = 10$. Hvis resultatet er 0, har du en tabersituation.

Figur 2 Løsning af (2, 4, 6)

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \oplus & 1 & 1 & 0 & 6 \\ \hline = & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Altså gælder det om at fjerne pinde, så spillet får værdien 0. Beviset er at indse, at fra 0 kun kan flyttes til en *ikke-0* position og omvendt.

Eksempel 3 Så er der en vinderstrategi for spillet 3, 4 og 5? Ja; Figur 1 viser at værdien er 2.
Der er dog problemer med spillet 2, 4 og 6. Figur 2 viser at værdien er 0, og derfor efterlader alle træk en vinderposition.
Prøv selv med 6, 5, 1.

Vindertrækket findes ved at oversætte stakstørrelserne til binærværdier, reducere den længste stak, således at binærværdien sikrer et lige antal 1'ere i hver cifferposition på tværs af stakkene — Ensbetydende med at *eksklusivt eller* giver 0. Hvis det ikke er muligt, så er du fortabt.

Nuvel, der er `10` slags mennesker: Dem, der forstår binært, og dem der ikke gør... Hvis du forstod vittigheden, altså at 2 på binærform skrives `10`, så kan du trygt spille om hvem, der skal vaske op efter festen næste gang — Husk dog at vælge opstilling efter, om du skal trække først eller sidst.

Men hvor Bouton „kun“ fandt en løsning for *Nim*, udviklede Sprague og Grundy uafhængigt af hinanden en samlet teori først i 1930'erne, der viste, at alle upartiske spil kan gives en Nimværdi og derfor kan lægges sammen som ovenfor beskrevet.

Sprague/Grundy-teorien skabte grundlaget for kombinatorisk spilteori, som i dag spreder sig ud over andet og mere end upartiske spil, nemlig Partizanspillene. Partizanspil, som er en matematisk talefejl for partiske spil, er meget anderledes end upartiske spil, da der er træk, som kun den ene spiller kan foretage, f. eks. må kun hvid flytte de hvide tårne i *Skak*.

Det er additionsstrukturen, der gør teorien interessant og enkel; Additionen af to spil er — som forventet — at man kan trække i enten det ene spil eller i det andet, hvorefter turen overgives til modspilleren. F. eks. betragtes hver stak i *Nim* som selvstændige spil, som adderes.
To spil, G og H, har samme Nimværdi, hvis det for alle spil, X, gælder at $o(G+X) = o(H+X)$, hvor o er udfaldsfunktionen, der angiver om næste eller foregående spiller vinder.
Ækvivalensmængden over udfaldsfunktionen udgør en gruppe, der er isomorf med

$$\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$$

Hvor $\bigoplus$ her betegner den direkte sum, og ikke den specielle addition, $\oplus$.

Du har lige har lært at tage elementer på ækvivalensmængden, benytte gruppeisomorfien derpå (ved at tage binærværdien af staklængden), og så benytte den specielle addition, $\oplus$, der netop svarer til additionen af 2 elementer i gruppen, $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$, hvorefter du benytter den inverse gruppeisomorfi til at finde elementet i ækvivalensmængden, kaldet kvotienten. Se f. eks. beregningen øverst side 4, der svarer til: $(\ldots, 0, 1, 1) + (\ldots, 0, 0, 1) = (\ldots, 0, 1, 0)$.

Piet Heins kompenserede sit tab af Nim var ved at udvikle et nyt kombinatorisk spil, Nimbi, der ikke så let lod sig løse. I Nimbi kan additionen først benyttes relativt sent i spillet, hvilket gør det besværligt at reducere.

En miserabel situation

Kender du „Sidste år i Marienbad“ godt, vil du måske indvende, at der gjaldt det jo om at ikke tage den sidste pind, hvilket også er den traditionelle måde at spille på.

Vinderbetingelsen er altså vendt om — Kaldet *Misère*. Bouton mål var faktisk at løse denne type *Nim*, men det er mere besværligt, for hvor alle upartiske spil kan relateres til en Nim-stak, via en Nimværdi, så er det ikke tilfældet, når vinderbetingelsen vendes.

For at eksemplificere problemet, tag spillet, G, som er 2 stakke á 2 pinde, for nemheds skyld skrevet, $G = (2, 2)$. Det er en taberposition, uanset hvilken vinderbetingelse man benytter. Under den almindelige vinderbetingelse er Nimværdien 0. Hvilken Nimværdi bør den have under Misère?

Nimværdien 0 er en dårlig kandidat, da spillet H, som er stakken bestående af 0 pinde, er en vinderposition under Misère. Altså er $o(H + 0) \neq o(G + 0)$ — Tilsvarende argument gælder for $H = (2), \ldots, H = (n)$. Tilbage er $H = (1)$, stakken bestående af 1 pind: Problemet med den er, at $o(G + G) \neq o(H + G)$.

Kompleksiteten under den nye vinder betingelse synliggøres ved at se på antallet af spil af en given længde: Der er op til isomorfi ved nimværdier (ækvivalens) kun 6 almindelige spil af længde maks 5: stakkene 0 til 5, mens der er over 4 millioner under Misère betingelsen.

Problemet er, at den bagvedliggende kvotient for Misère spil ikke er den samme for alle spil, strukturen er en monoid, altså en gruppe uden invers, og den kan ikke findes ved ækvivalens over alle spil.

Men lige netop for *Misère Nim* findes der en enkel metode, som Bouton faktisk fandt: *Spil, som du ville spille Nim, med mindre du efterlader lutter stakke á 1 pind. I den givne situation: sørg for at efterlade et ulige antal stakke á 1 pind.* Metoden kan benyttes på flere Misère spil.

Hvis den metode virker, kaldes spillet for et *tamt* Misère spil.

De forsøg på at finde kvotienten, som blev gjort før år 2000, prøvede at finde en ækvivalens under alle spil. Desuden har det sandsynligvis været svært at acceptere den manglende invers. Løsningen kom omkring år 2005 og blev givet af T. E. Plambeck og A. N. Siegel.
Det er spændende læsning med en algebraoplysende bivirkning.

Introduktion til kombinatorisk spilteori fås i bogen Lessons in Play (A. K. Peters, 2007).