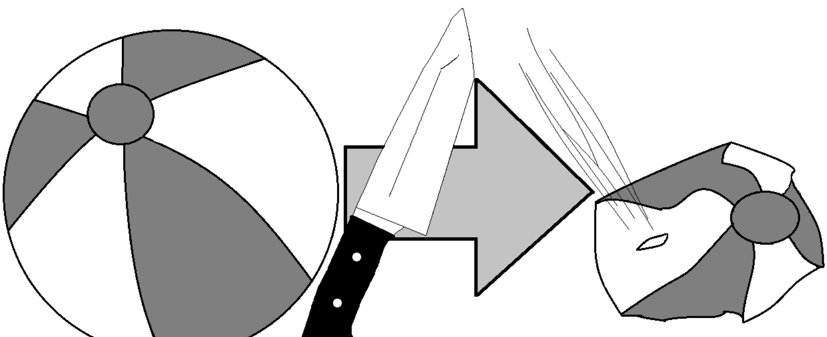
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
21. årgang, nr. 4, juni 2012



Banach-Tarski paradox gone wrong!

Redaktion

- ⋆ Bo 'Maling' Malling Christensen,
- ⋆ Frederik Möllerström Lauridsen,
- ⋆ Jens Siegstad,
- ⋆ Jingyu She,
- ⋆ Kristian Knudsen Olesen,
- ⋆ Kristian Peter Poulsen,
- ⋆ Maria Bekker-Nielsen Dunbar,
- ⋆ Martin Patrick Speirs,
- ⋆ Søren Knudby,
- ⋆ Søren Wengel Mogensen

Indhold

Sommeren er kommet

Kristian Knudsen Olesen

Blok 4 er ved at være gået. Sommeren er kommet. De studerende stopper snart med at dividere for i år, og de ansatte får et lille pusterum fra de studerende, som *lidt for ofte* dividerer med nul. Denne kommende divisionspause betyder også, at Famøs årgang 21 nu er kommet til en afslutning, men som man siger: enhver afslutning er begyndelsen på noget nyt, og efter sommerferien vender Famøs-redaktionen selvfølgelig tilbage med årgang 22.

Redaktionen vil gerne sige tak, både til de studerende og de ansatte, for den store entusiasme og opbakning der har været omkring opstarten af Famøs. Mange har bidraget til bladet, både i form af indhold og i form af hjælp til diverse praktisk opgaver. Skønt Famøs er et gammelt blad, er det i øjeblikket karakteriseret ved at have en meget ny redaktion. Dette har betydet en helt masse arbjede fra redaktionens side, men har også givet en mulighed for at give bladet et nyt præg. Det har været et lærerigt år, og vi satser på at kunne gøre det endnu bedre i fremtiden. I den forbindelse vil vi gerne minde om, at vi altid er glade for konstruktiv kritik, så tøv ikke med at sende en email til famos@math.ku.dk. Vi er altid interesserede i at høre fra vores læsere, og man er velkommen til at skrive lige meget hvad man har på hjertet.

Trykningen af Famøs bliver betalt af Institut for Matematiske Fag, og det er vi selvfølgelig taknemmelige for. Tilbage er der kun at sige: god fornøjelse med dette Famøs nummer 4 årgang 21.

Præmieopgave

– Nu med endnu mere hjernegymnastik!

Bo 'Maling' Christensen og Jing 'le Bells'

I sidste nummer af Famøs gik præmieopgaven ud på at bestemme tværsummen af tværsummen af tværsummen af det enorme tal 5926^{5926}. Det rigtige svar var 4. Vi har trukket lod blandt de rigtige besvarelser, og vinderen af det unikke sommerkit blev **Dan Nielsen ('11)**! Tillykke, du vil modtage din præmie snarest.

Der gik imidlertid ikke mange brøkdele af en dag efter udgivelsen af bladet, førend **Sune Reeh ('05)** havde indleveret en korrekt, TeX'et besvarelse, og vi vil derfor gerne bringe hans besvarelse. Den kan ses herunder.

Løsning af præmieopgaven: Famøs årgang 22, nr. 1

Lad $T(n)$ betegne tværsummen af det naturlige tal $n \in \mathbb{N}$. Vi skal altså bestemme $T(T(T(5926^{5926})))$. Lad herefter $n := 5926$ være fast.

For det første har vi $n < 10^4$ der giver den oplagt elendige vurdering

$$n^n < (10^4)^{5926} < 10^{4\cdot 6000} - 1 = 10^{24000} - 1.$$

Så n^n har højst 24000 cifre, hvorfra vi konkluderer

$$T(n^n) \leq 9 \cdot 24000 = 216000.$$

Dermed er $T(T(n^n)) \leq 2 + 5 \cdot 9 = 47$.

Hvis $40 \leq T(T(n^n)) \leq 47$, er $T(T(T(n^n))) \leq 4 + 7 = 11$; alternativt er $T(T(n^n)) \leq 39$ og $T(T(T(n^n))) \leq 3 + 9 = 12$. Samlet haves altså

$$T(T(T(n^n))) \leq 12.$$

Uafhængigt af ovenstående vurderinger vides at $T(n) \equiv n \pmod 9$ for alle $n \in \mathbb{Z}$.[1]

$$n = 5926 \equiv T(5926) = 22 \equiv T(22) = 4 \pmod 9.$$

Gentagen potensopløftning af 4 modulo 9 viser sig at give $4^0 \equiv 1$, $4^1 \equiv 4$, $4^2 = 16 \equiv 7$, $4^3 \equiv 4 \cdot 7 \equiv 1$. Da $4^3 \equiv 1$ gentages potenserne cyklisk med

$$4^k \equiv \begin{cases} 1 \pmod 9 & \text{hvis } k \equiv 0 \pmod 3, \\ 4 \pmod 9 & \text{hvis } k \equiv 1 \pmod 3, \\ 7 \pmod 9 & \text{hvis } k \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Da vi ved at $n \equiv 4 \pmod 9$, er $n \equiv 1 \pmod 3$, og derfor fås

$$T(T(T(n^n))) \equiv n^n \equiv 4^n \equiv 4 \pmod 9.$$

Det eneste naturlige tal der opfylder $T(T(T(n^n))) \leq 12$ og $T(T(T(n^n))) \equiv 4 \pmod 9$, er

$$T(T(T(n^n))) = 4.$$

Tak til Sune for den fine besvarelse!

[1] I det følgende antages fortrolighed med DIS-pensum.

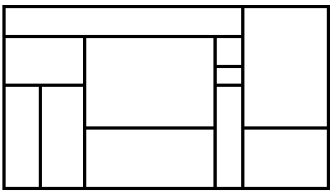
Blokkens præmieopgave

På et dansk tastatur trykker en abe hver bogstavstast præcis én gang, i tilfældig rækkefølge. Hvad er sandsynligheden for, at ordet "FAMØS" dukker op?

Der trækkes lod om en studiestarts-goodiebag blandt de korrekte svar! Fristen for at deltage i dysten om denne er den 24. september.

Blokkens opgave

Det oplyses om et rektangel partitioneret i flere små rektangler, at hvert af de små rektangler har mindst én side af heltallig længde. Har det store rektangel en side af heltallig længde? Hvorfor?[2]



[2]Bemærk at besvarelse af denne opgave *ikke* udløser nogen præmie. Til gengæld får de læsere, der indsender en fyldestgørende besvarelse, deres navne offentliggjort i næste FAMØS-blad i den rækkefølge vi modtager jeres svar! Den første af vores kære læsere, der korrekt besvarer fire på hinanden efterfølgende opgaver, kan vælge at få printet sit ansigt på forsiden af FAMØS.

Fagrådet er blevet oprettet igen!

Anna Munk Ebbesen

Ja, den er god nok. Fagrådet er så småt ved at komme op og køre igen. Det er et fælles organ for alle studierne på IMF. Som udgangspunkt er det et talerør fra de studerende til ledelsen og omvendt. Som det er lige nu, har vi oprettet en bestyrelse og alle andre interesserede bliver menige medlemmer. Som medlem har du stemmeret i diverse diskussioner.

Hvis du vil være medlem, skal du skrive en mail til alexander@copalex.com, så kommer du på maillisten - så husk og skriv, hvilken mail, du vil have på listen!

Dagsordener vil blive sendt ud til alle studerende og man er altid velkommen til at dukke op til et fagrådsmøde - om man er medlem eller ej. Hvis du har forslag til punkter til dagsordenen eller andet, du blot vil fortælle fagrådet, så kan du skrive os en mail på fagraad@math.ku.dk.

Referater fra møderne vil kunne findes på hjemmesiden www.math.ku.dk/fagraad.

Vi håber på at se en del af jer i fremtiden (især flere Mat-Øk'ere og Aktuarer ville være dejligt).

På vegne af bestyrelsen

Anna Munk Ebbesen
Matematik '09

Algebraens Fundamentalsætning

Jens Siegstad

Det kanoniske bevis for algebraens fundamentalsætning benytter sig som bekendt af Liouvilles sætning. Vi skal i denne artikel give et alternativt bevis, hvor vi i stedet benytter os af "Open Mapping Theorem" (se [1] Theorem 7.6), samt et resultat om vækst af komplekse polynomier kendt som "The Growth Lemma".

Theorem 1 ***(Algebraens Fundamentalsætning)*** *Ethvert polynomium*

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \ \ , z \in \mathbb{C}$$

med $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ *og* $a_n \neq 0$ *for* $n \geq 1$ *har et nulpunkt i* $\mathbb{C}$.

For at vise sætningen får vi behov for et lemma, der udtaler sig om, hvorledes et komplekst polynomium af grad n vokser. Sætningen siger, at for tilstrækkelig store værdier af $|z|$ er det den ledende term, $a_n z^n$, der dominerer.

Lemma 2 ***(The Growth Lemma)*** *Lad* p *betegne polynomiet*

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \ \ , z \in \mathbb{C}$$

med $a_n, \cdots, a_0 \in \mathbb{C}$ *og* $a_n \neq 0$. *Da gælder for ethvert* $z \in \mathbb{C}$ *med egenskaben*

$$|z| \ \geq \rho := \max\left\{1, \frac{2}{|a_n|} \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|\right\}.$$

at

$$\tfrac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq \tfrac{3}{2}|a_n||z|^n$$

Bevis. Lad $q(z) = p(z) - a_n z^n$. Da får vi ved brug af trekantsuligheden for $|z| \geq \rho$ at

$$\begin{aligned} |q(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^{n-1} \\ &\leq \left(\tfrac{1}{2}|a_n||z| \right) |z|^{n-1} \\ &= \frac{|a_n|}{2}|z|^n. \end{aligned}$$

Ved at benytte følgende version af trekantsuligheden

$$\Big| |z| - |w| \Big| \leq |z - w|$$

med $z = p(z)$ og $w = a_n z^n$ finder vi at

$$|a_n||z|^n - |q(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |q(z)|$$

og ved anvendelse af første ulighed finder vi at

$$\tfrac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq \tfrac{3}{2}|a_n||z|^n$$

som ønsket. $\square$

Vi kan nu give det ønskede bevis for algebraens fundamentalsætning.

Bevis. Lad $w \in \mathbb{C}$ være et kontaktpunkt for $p(\mathbb{C})$. Da kan vi finde en følge (z_n) af komplekse tal således at $p(z_n) \to w$ for $n \to \infty$. Lemma 2 giver, at følgen (z_n) er begrænset. Da (z_n) er begrænset, har den en konvergent delfølge (z_{n_k}) med $z_{n_k} \to z$ for $k \to \infty$. Kontinuiteten af p giver nu at $p(z) = w$. Dermed har vi at $w \in p(\mathbb{C})$ og dermed er $p(\mathbb{C})$ lukket. Ved brug af "Open Mapping Theorem" finder vi at $p(\mathbb{C})$ også er åben. Da $p(\mathbb{C})$ er en ikke-tom åben og lukket delmængde af den sammenhængende mængde $\mathbb{C}$ har vi at $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, og specielt har vi at p har et nulpunkt. $\square$

Litteratur

[1] Christian Berg. *Complex Analysis.* Universitetsbogladen, 2010.

[2] Eberhard Freitag, Rolf Busam. *Complex Analysis.Second Edition.* Springer 2009.

Matematik og Økonomi

– Et lille institut, to artikler, en dokumentarfilm og en finanskrise.

Karen 'K2' Hjort Brusch

I starten af april i år besøgte jeg mine forældre i Bagsværd. De har abonnement på Information og jeg faldt over en artikel bragt den 4. april 2012 skrevet af Center for Vild Analyse. Overskriften var "Forskeren som Magtens Forlængede Arm". Artiklen beskriver hvordan forskere i dag beskæftiger sig med et meget begrænset fagområde i forhold til tidligere. Der bliver forsket indenfor domæner, som forskningsrådene finder det væsentligt at forske indenfor. Burde videnskabsmanden ikke selv overveje hvad nytte man har af denne forskning? Og måske endnu vigtigere, hvad der *ikke* bliver forsket i, når linjerne på forhånd er trukket op? Og hvordan spiller dette sammen med den nuværende politiske og økonomiske magt? Jeg sad tilbage med en mærkelig, trist følelse. Hvorfor læser jeg matematik, hvis jeg ikke kan bruge den til noget godt?

En månedstid senere så jeg en dokumentarfilm. "Inside Job" instrueret af Charles Ferguson fra 2010. Jeg vil her prøve at give et simplificeret referat. Filmen beskriver hvordan lovgivningen og bankkulturen har ændret sig i USA op til finanskrisen. Ikke bare i løbet af de sidste 20 år, men endnu længere tilbage. Der var engang, hvor det at optage et lån betød at gå ned i den lokale bank. Den måtte så vurdere om man var egnet, hvad betingelserne skulle være og hvad der skulle stilles som sikkerhed. Hvis låneren ikke kunne betale mistede banken penge. Idag når der optages lån bliver de samlet i *Collateralized Debt Obligations*, CDO'er. Disse CDO'er bliver solgt til investorer og det er disse investorer der får penge udbetalt når man betaler tilbage på sit lån. Den lokale lånudgiver mister ikke længere penge når låneren ikke kan betale tilbage. Det blev derfor nemmere at låne penge og huspriserne steg. Mange af disse lån var dårlige lån, med høj rente, som folk ikke kunne betale tilbage. Men så fandt man på *Credit Default Swaps*, CDS'er. En CDS er en slags forsikring af et lån. Når låntager ikke kan betale tilbage udbetaler forsikringsselskabet et kompensationsbeløb. Til forskel fra almindelige forsikringer kan alle købe CDS'er. Lidt ligesom hvis alle kunne forsikre min cykel. Når den så blev stjålet skulle alle der havde købt denne CDS have et beløb fra forsikringsselskabet. Komplekse financielle produkter såsom CDO'er og CDS'er bliver med et kaldt *derivater*. Handlen med disse derivater blev ikke underlagt regulerende lovgivning af den amerikanske stat.

I løbet af de sidste tredive år er den amerikanske finanssektor blevet dereguleret kraftigt. Da handlen med værdipapirer begyndte var en investeringsbank typisk en sammenslutning af rige mænd. De investerede deres penge i håb om at deres værdi blev større, men uden for stor risiko, da de selv hæftede for eventuelle tab. Dette står i kontrast til i dag hvor investeringsbanker har til opgave at få andres værdier, såsom pensioner og opsparinger, til at vokse uden at de personligt hæfter for eventuelle tab. Herudover er loftet for gearing blev hævet. Gearing er et udtryk for hvor stor værdi kreditinstituttet skal være indehaver af og hvor meget det må låne sig frem til. Fra at være cirka én til én steg det til at være cirka ti gange så højt. Herudover er det blevet lovligt for økonomiske institutioner at fusionere på tværs af grænser til større virksomheder end vi før har set.

I 2008 kom så de store konsekvenser af disse tiltag. Investeringsbankerne Bear Stearns og Lehman Brothers stod over for konkurs og lige så gjorde forsikringsselskabet AIG. Det var tre velrenommerede, finansielle institutioner med en tilsyneladende fin økonomi. Men virksomheder går da konkurs hele tiden? Hvorfor er dette et specialtilfælde der påbegyndte det vi nu kalder finanskrisen? Det er der to grunde til. Den første er at den amerikanske stat efter krakket i 1929 og den efterfølgende depression i 1930'erne har garanteret, at de, der har værdier i banker, får fuld kompensation i tilfælde af konkurs. Den anden er at man med krisen i 2008 dannede præcedens for, at komme kæmpebanker til undsætning med statslån når det går gjaldt. Dette fænomen bliver kaldt 'too big too fail'. Der er simpelthen intet incitament for de finansielle institutioner til at sætte lønninger ned og spare op til det øjeblik hvor det går galt.

Og det er ikke slut endnu. På næste besøg hos mine forældre faldt jeg over en leder i Information fra den 15. maj 2012. Den beskriver hvordan det gigantiske pengeinstitut JP Morgan Chase torsdag den 10. maj 2012 måtte indrømme at de havde mistet 2,3 mia. dollar i en afdeling af bankens London kontorer. Ironisk nok var det en afdeling der beskæftiger sig med at sikre *mod* tab på konjunkturfølsomme investeringer.

Alt dette lyder som en økonomisk gyser uden ende, men hvad har det med os på IMF at gøre? En time og tre og tyve minutter inde i "Inside Job" bliver Andrew Sheng, asiatisk finansregulator og global kommentator, spurgt: "Hvorfor?" Han forklarer at efter den kolde krigs afslutning har tidligere matematikere gået sammen med investeringsbanker og skabt masseødelæggelsesvåben. Der fik jeg en klump i halsen. Masseødelæggelsesvåben lige frem. Hvis matematikere er i stand til at skabe masseødelæggelsesvåben burde vi så ikke også være i stand til at skabe kuren? Som minimum være med til at debatere om lovgivningen omkring derivater? Måske få lov til at udvikle spændende matematik der kunne bruges til formålet? Burde det være pensum for næste hold der skal have videnskabsteori? Eller er vi fanget i et net af forskningsråd der putter forskningsdomæner ned over hovedet på os?

Litteratur

[1] Dokumentarfilmen Inside Job fra 2010. Instrueret af Charles Ferguson.

[2] "Forskeren som Magtens Forlængede Arm" af Center for Vild Analyse. Information d. 4. april 2012.

[3] "Wall Street ude af gevind - igen" af Burch. Leder Information 15. maj 2012.

Sådan smager dit nærmiljø

– Vi afprøver diverse caféer og madsteder i nærheden af HCØ, så du tør tage chancen og prøve noget nyt

Rie Jensen og Katrine Gravesen

Foråret er over os og kærligheden blomstrer. Hvis du som så mange andre smiler hele tiden, fordi du har mødt den eneste ene på Caféen?, så giver vi dig her en guide til den perfekte date og dagen derpå. Kærlighedens finurlige spil starter med en god middag - og en dejlig aften skal man jo huske at fortælle om til vennerne. Så spring sommeren i møde med lidt godt til ganen.

Oysters & Grill, ★★★★★☆

Hvad er den perfekte date? Det skal helst være lidt fint, men det vigtigste er naturligvis, at I hygger jer og fodrer kærligheden med alt hvad den kan spise. Rolig atmosfære og afslappet stemning kan findes på *Oysters & Grill* som ligger i Sjællandsgade 1B. Restauranten skjuler sig godt og de fire borde med blomstrede voksduge vidner måske ikke om fine forhold for dig og din udkårne, men man skal jo som bekendt ikke skue hunden på hårene. Voksdugene fortsætter inde i selve restauranten og generelt er stedet ikke overpyntet, men behageligt - perfekt til at løsne op på nerverne, hvis der er tale om en første date. Betjeningen er god og vi blev budt cava (40 kr. glasset) da vi ankom. Maden er simpel og menukortet meget overskueligt. Som navnet på stedet indikerer så gør dette sted sig i østers og andre skaldyr samt bøffer. Man kan derfor til forret vælge forskellige slags skaldyr og her køber man pr. 100 gr. Der er heriblandt både blåmuslinger, knivmuslinger og jomfruhummer og priserne svinger fra 13 kr. til 53 kr. for de 100 gr. som eksempelvis svarer til otte blåmuslinger eller to jomfruhummere. Hvis ikke man kan vælge blandt de mange dyr, så tilbydes der også en blandet tallerken til 125 kr. Vi fik blå-, hjerte- og kammuslinger samt krabbe og jomfruhummer, som alt sammen var virkelig lækkert. Man skal dog være glad for skaldyr og også være indstillet på at datesmilet og charmen måske forsvinder en smule i hvidløgsmarinaden som uundgåeligt giver fedtede fingre og havner i næsten hele hovedet. Til hovedret kan man vælge mellem tre forskellige slags bøf (og en enkelt fisk) og vi fik nakkekotelet og tournedos (priser mellem 150-200). Begge dele anbefalelsesværdige og tilbehøret bestod af bittesmå pommes frites og salat med (for meget) balsamicodressing. Begge dele serveres på deletallerkner og dette er kun med til at pynte endnu mere på den intime stemning. Det er også muligt at få dessert, men vi kunne ikke spise mere og takkede derfor nej til dette. Er man glad for østers og/eller skaldyr, kunne man sagtens springe bøfferne over og nyde havets fristelser som hovedret og dermed få plads til desserten (ca. 40 kr.).

The Laudromat Café, ★★★★★☆

Efter en dejlig date skal vennerne naturligvis opdateres på den blomstrende kærlighed. Et godt sted at gøre dette er *The Laudromat Café*, som har adresse i Elmegade 15 (der findes også en på Østerbro). Caféen tilbyder brunch og morgenmad til rimelige priser og stemningen er hyggelig og velegnet til en slapper-dag i solen. Vi fik blåbærsmoothie (48 kr.), appelsinjuice (30 kr.) og lækre pandekager (5 stk) med sirup ad libitum (55 kr.). Alt sammen noget, som også ville kunne bruges, hvis daten har efterladt sig nogle tømmermænd og samtidig kan du få ordnet vasketøjet i caféens vaskeri. Stedet er velbesøgt og betjeningen sød og venlig. Der er desværre ingen studierabat at hente, men priserne må siges at være normale cafépriser og caféen vinder klart på charme og god mad. Så tag vennerne under armen og nyd en dag med sol og en sludder om kærlighed.

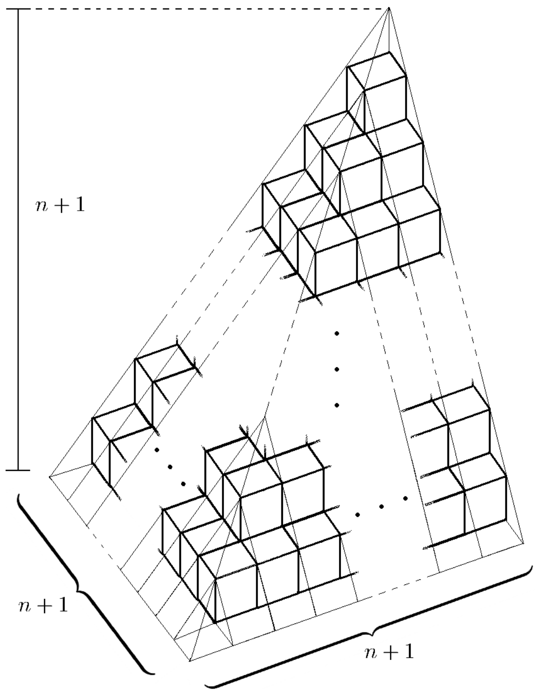
Blokkens kasser
– En formel, 50% kender

Kristian Peter Poulsen

50% af os kender formlen, der siger, at summen af de n første kvadrattal kan skrives som $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Det har jeg fundet et bevis for, som jeg ikke har set andre steder, men som måske er blevet lavet før.

Sætning 1

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n, \qquad n \in \mathbb{N}$$



Man skal vide, at rumfanget af en pyramide er en trediedel højde gange grundfladen, og at summen af de n første naturlige tal kan skrives $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$[3] men så kører bussen også!
Bevis

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= Rumfang(\text{den store pyramide}) \\
&\quad -Rumfang(\text{de } n+1 \text{ små pyramider i hjørnet}) \\
&\quad -Rumfang(\text{prismerne som der er } 2i \text{ af på } i\text{'te niveau}) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)^3 - (n+1)\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \sum_{i=1}^{n} 2i\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}\left(n^3+3n^2+3n+1\right) - \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} - \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{1}{3}n^3 + n^2 + n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n
\end{aligned}$$

LR.

I øvrigt har jeg selv tegnet figuren i Paint.

[3] Se FAMØS marts 2012 s. 16, Blokkens blokke.

Blokkens Spil

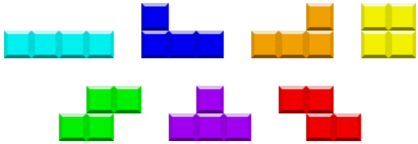
Bo 'Maling' Christensen

Den danske sommer er endelig over os, og det er derfor snart på tide at lægge eksamenerne bag sig for i år og nyde det gode vejr med venner og måske et godt spil. Lad mig introducere **Domineering**.

I Domineering spiller man på et bræt med $m \times n$ felter. De to spillere skiftes nu til at lægge en brik. Første spillers brik er vertikal og fylder 1×2 felter, imens spiller 2's brik er horisontal (og derfor fylder 2×1 felter). Den første spiller der ikke kan lægge en brik taber spillet.

Noget af det interessante ved Domineering er at hvis nogle brikker på et tidspunkt i spillet deler de resterende felter op i to disjunkte grupper, så kan man fra da af anskue spillet som summen af de to spil der spilles på de to disjunkte spilleplader. Dette er en fantastisk egenskab når man ser på spillet med spilteoretiske øjne.

Figur 1 Et spil på en 5×3-plade. Det er spiller 2's tur, men han kan ikke lægge en brik og taber derfor spillet.



Figur 2 Brikkerne fra Tetris!

Skulle man blive træt af at spille Domineering, så kan man altid prøve nogle variationer. Et par bud er at spille på ikke-rektangulære spilleplader, eller tillade begge spillere at lægge både den horisontale og den vertikale brik[4]. Disse små ændringer vil lave store ændringer på spillets struktur.

Skulle man ønske at gå helt amok kan man prøve at spille med brikkerne kendt fra Tetris og spille med at vinderen er den der først får brugt hver af sine briktyper eller tvinger hans modstander til ikke at kunne lægge.

God Sommer!

[4]Denne variation af spillet går som oftest under navnet Cram.

Millionbeløb til eksperimentel matematik

Søren Knudby

Søren Eilers har modtaget en bevilling fra Villum Fonden på ca. 5,7 mio. kr. (mere præcist 5742837 kr.) til et treårigt projekt i eksperimentel matematik. Og som læser af FAMØS skal du da høre lidt om, hvad så mange penge skal bruges på.

Projektet, som pengene er søgt til, har titlen "Eksperimentel matematik". Og hvad er så eksperimentel matematik, tænker du måske? Man står jo ikke i et laboratorium og eksperimenterer med, om f.eks. det store tal, som ens forelæser skrev på tavlen, er et primtal eller ej. Men... i stedet kan man sætte sig ved en computer og undersøge mange matematiske problemer. Og dét er hovedformålet med projektet: at bruge computere til at udføre en række eksperimenter, som i sidste ende kan føre til en større indsigt i matematiske problemstillinger.

Projektet kommer til at have tre retninger, som kører nogenlunde parallelt og uafhængigt af hinanden. De tre retninger er operatoralgebra, talteori og algebraisk topologi. Og til at lede projektet inden for hver af de retninger er Søren Eilers, Ian Kiming og Jesper Michael Møller. Derudover vil der blive ansat en post doc (yngre forsker) inden for hver af de tre områder. Sidst men ikke mindst ansættes en post doc i datalogi til projektet, fordi databehandling på computere bliver den essentielle del i projektet og også det, som er fællestrækket for de tre retninger.

De mange penge skal hovedsageligt gå til løn til de fire post docs. Derudover skal en lille del af pengene bruges til rejser og apparatur.

Som en del af projektet skal der samarbejdes med E-Science. De har nemlig allerede en stor samling computere stående (4000 computere rundt omkring i landet), og dem får vi lov at bruge. De mange computere var oprindelig købt til at udføre dataanalyse og simulation i højenergifysik, men nu får IMF altså også glæde af dem. Udover E-Science involverer projektet også forskere på vores nabouniversiteter Syddansk Universitet og Lunds Universitet.

Søren Eilers' interesse for eksperimentel matematik er ikke ny. For et par år siden udførte han i samarbejde med Mikkel Abrahamsen eksperimenter som beskrev en række kombinatoriske problemer med LEGO-klodser. Og allerede i sin studietid havde Eilers interesse for datalogiske aspekter af matematik og har således bifag i datalogi.

I tilknytning til det nuværende projekt afholdes også et kursus i eksperimentel matematik. Det bliver formentlig i blok 3. Så måske du selv får lov at eksperimentere mere med matematikken om noget tid?

Geometri på vers
– En aflevering af Rasmus Sylvester Bryder

Kristian Knudsen Olesen

Jeg har haft det gode held at være Geometri 1 instruktor et par år i træk.[5] I den forbindelse har jeg haft mange gode oplevelser, da Geom1 i længere tid har været et sjovt sammensat kursus. Med sjovt mener jeg her, at det har skulle kunne tages af både 1. års studerende såvel som 3. års studerende (og selvfølgelig alt hvad der derimellem ligger). Af denne grund har der været en lille skævvridning i sværhedsgraden af de obligatoriske afleveringer relativt til de forskellige studerende. Selv om dette ikke har være noget problem på kurset har det dog gjort det til et specielt instruktorat, for de ældre studerende har naturligt haft mere overskud, og derfor også kunne lave mere ballade.

Min historie begynder den 17. maj 2010 hvor jeg modtog en Geometri 1 aflevering fra Rasmus Sylvester Bryder.[6] Der var tale om den 4. obligatoriske aflevering, og det første spørgsmål lød som følger:

Lad for $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2$ funktionen σ være givet ved

$$\sigma(u, v) = (u, u + v, (u + v)^2).$$

Verificer at σ er en injektiv, regulær, parametriseret flade og at koefficienterne af den første fundamentalform er

$$E = 2 + 4(u + v)^2, \quad F = G = 1 + 4(u + v)^2.$$

Det der var specielt ved det første spørgsmål var, at den *gale* matematiker Rasmus Sylvester Bryder, som på det tidspunkt var

[5] Mere specifikt i blok 4 2010 og blok 4 2011.
[6] En matematiker notorisk kendt for at rime.

nær slutningen af sit 3. år, havde lavet en besvarelse der var skrevet på vers. Nu sidder du nok og tænker "På vers! Det kan man da ikke", men det kunne man åbenbart. Selv var jeg meget overrasket, da jeg før dette havde været en nonbeliever med hensyn til matematisk lyrik, men det har siddenhen været et af mine bedste minder omkring Geom1-instruktoraterne.

Da jeg ikke føler at jeg kan udskyde det længere vil jeg nu bringe den omtalte besvarelse. Til læserens hjælp er der efterfølgende lavet et par mindre udregninger som man kan kigge med i mens man læser.

Der skal angives, som det skrevet står,
at vi ved σ nu en flade får.
Vi higer her at den er en-til-en,
med regularitet - o, sikken en!
Samt skal findes tre koefficienter,
til første grundform; men med dem vi venter.
Vi dog afslører formen E skal ha:
tag kvadrat af u plus v og da
gang med 4, læg 2 til; hvor fin!
F og G er ens: E minus 1.

Først må konstateres uden råben,
at U er hele planen - dermed åben.
Og σ er genkendeligt, nu se så!
en flade givet ved en parameter.

Komponentfunktioner glatte ses
som afbildninger af u og v; nu vis,
at σ glat som flade faktisk er.
Vi finder da Jacobi lige her.

I første søjle fås 1, 1 og se!
En dejlig doblet sum af u og v.
Anden søjle næsten samme, jo:
et nul, et ettal, $u + v$ à to.
Lad (u, v) nu i U og søjler kryds:
vor førstekoordinat er intet lys -
dobbelt $u + v$ træk fra det selv.
Et nul det giver; det ved vi alle vel.
Vor andenkoordinat er let at se,
fås et minus, doblet $u + v$.
En enhed nu på tredjepladsen stå,
og hov! Nu ses, at aldrig vi kan få,
at 0 på alle pladser her kan være,
så fladen er nu fundet regulær.

Vi viser nu, at den er injektiv;
forløbet her er let - o skønne liv!
For antag nu, at billederne er ens
for tupler to i U, og nu det ses:
kald tupler u og v, (u_0, v_0);
en gave her nu fås – og snart i mål!
Billederne på første plads nu gi'r
at u må være klart u_0, og vi'r,
at anden plads nu siger os om v,
u_0 plus v_0, u væk, giver det.
Altså giver det, v er v_0.
Og en-til-en er vist: og spis no'et kål.

Til slut vi finder E og F og G.
Vi lader nu i U et u og v.
Nu E kvadrat på længden nemlig er

af første søjle fundet lige før.
Den må da være 1 plus 1 og så
kvadrat på doblet u og v, hvorfor
vi får, at E er nu lig 2 samt mere:
kvadrat af u plus v, og doblet 4.
F som prikprodukt vi nu skal finde,
begge søjler prikkes, vi til minde
ser, at F er sum af 1 og 0
og kvadratet ovenfor - o, hvilket guld!
G til sidst vi søger, se nu da,
kvadrat på længde anden søjler tag.
Et 0 og 1 og det kvadrat fra før;
det kommer nu så ofte jeg er skør.
Altså ses nu F og G er samme,
og begge E, blot minus 1, de ramme.
Nu så kan ses, at ønskede er vist,
jeg ikke rimer mere, se blot det næst'.

Enhver der påskønner matematik må nødvendigvis blive en smule rørt over sådan en smøre. I besvarelsen udregnes Jacobimatricen og krydsproduktet af de partielt afledte, begge disse er angivet her:

$$D\sigma(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2u+2v & 2u+2v \end{bmatrix}, \quad \sigma'_u \times \sigma'_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2u-2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det var så enden på historien. Jeg vil gerne sige et stort **Tak** til Rasmus Sylvester Bryder for at lade mig bringe hans aflevering her i FAMØS, og til den nysgerrige læser kan jeg fortælle at Rasmus bestod med bravur. Mon ikke Matematisk Lyrik ender med at blive en gren på størrelse med Matematisk Fysik?

Tag et alternativt valgfag
– 'Museumsformidler' på IND

Maria Bekker-Nielsen Dunbar

Jeg læser Mat-Øk, så jeg har ikke OT[7]; jeg har (kun) fire valgfag (a 7.5 ECTS points). Jeg har valgt at tage et fag udenfor IMF — dog stadig inden for NatFak — bl.a. for at styrke en divergent tankegang, som kan være et fantastisk redskab når man løser problemer, men også for at have det sjovt. Faget er *Museumsformidler*, som udbydes i blok 4. På INDs[8] hjemmeside om kurset står der:

> *Kurset retter sig især mod studerende som ønsker at arbejde som formidlere på museer, sciencecentre eller zoologiske haver.*

(Og studerende som gerne vil styrke deres højre hjernehalvdel)

Jeg har altid haft en idé om, at alle sciencecentre var ens. Derfor har det virket mere naturligt for mig at opsøge kunst- og litteraturmuseer, når jeg er på rundrejse (det betyder dog ikke, at jeg har undgået sciencecentre, jeg har bl.a. været på "alle sciencecentres moder"; *Exploratorium*). Men idéen om ensformighed er helt forkert! Det naturvidenskabelige museum skabes ud fra modeller, som alle har deres styrker og svagheder. Desuden kan udstillinger variere ret meget fra sted til sted, tænk f.eks. på to akvarier.

Hvad er det så, der er så sjovt ved faget? For det første er faget et samarbejde mellem IND og *Experimentarium*, så man får lov til at opleve hvor godt lydisoleret dets mødelokaler er, samt

[7] Obligatorisk tilvalg; det lyder ret farligt men skulle eftersigende være både harmløst og lærerigt

[8] Institut for Naturfagenes Didaktik

at se dets op- og udstillinger fra et analytisk synspunkt (vs. fri leg). For det andet er faget meget 'hands on' (og så sandelig også 'minds on'); vi har tegnet skitser, bygget mockups, baldret balloner og formidlet levende(!) kakerlakker. For det tredje indeholder faget udflugter; her bl.a. til *GeoCenter Møns Klint* og *Danmarks Akvarium*. Desuden får man diskuteret begreber og set, hvordan studerende på andre studieretninger griber problemer an (i form af vores opgaver og små fremlæggelser). Vores fordeling på holdet er således:

Biologi	10
Fysik	2
Matematik-Økonomi	1
Nanoteknologi	1
Geografi og geoinformatik	1
Geologi	1
Kemi	1
Ukendt studieretning	5

Figur 1 Data indsamlet af Marianne Achiam til *Museumsformidler* slides (23/Apr/2012)

Jeg skal ikke vælge på vegne af andre, men jeg anbefaler faget til dig, hvis (en eller flere af) nedenstående gælder:

- du har gode fantasi og visualiseringsevner
- du vil gerne lære nogle biologistuderende at kende
- du vil gerne se, hvordan undervisning foregår udenfor en uddannelsesinstitution (med museet som underviser)
- du trænger til at få uddybet/opfrisket nogle af de ikke-filosofiske termer fra *VtMat*, bl.a. døde metaforer, post-akademisk forskning

- du vil gerne se, hvad sådanne videnskabsteoretiske termer betyder fra et museums synspunkt
- du ved blok 4 er ved at blive tosset af at se på indersiden af HCØ dag ud og dag ind
- du har allerede taget *Naturvidenskabelig kommmunikation og formidling*[9], og kunne lide det
- du synes faget lyder appetitligt (sjovt)!

Faget kan desuden tages på "alle niveauer", altså både af bachelor- og kandidatstuderende, samt af Ph.d-studerende.

(Til de af jer, der har undret jer over det, har jeg skrevet "bl.a." fire gange i denne artikel, såfremt jeg kan tælle)

[9] Se evt. "Bachelor i Matematik-Økonomi>Brug din valgfrihed!>Kurser inden for SCIENCE" på KUnet

Alternativ sudoku

Kristian Knudsen Olesen

Reglerne for denne sudoku er de samme som for en almindelig sudoku, men som en udfordring er tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 skiftet ud med symbolerne m, 2, $-$, $\neq$, c, $\wedge$, ?, $\times$ og E. Den skal altså udfyldes, så der er et af hvert symbol i hver række, i hver søjle og i hver af de 9 indikerede 3×3 kvadrater.

	$\times$		$-$	E				
?		m				c		
	$-$					$\times$		2
			$\wedge$		?		$\neq$	
				$\times$		$\wedge$		
	m	?			2			
E	2			?	$-$			
			$\times$					$\wedge$
m						?	c	$-$

Løsningen bliver bragt i næste nummer. God fornøjelse.

Banach-Tarski Paradokset
– Uden appelsiner

Andreas Hallbäck

Langt de fleste af os har nok hørt om Banach og Tarskis såkaldte paradoks fra 1924. Vi har hørt diverse poppede formuleringer af sætningen såsom "En ært kan splittes ad og samles til solen" eller den lidt mindre poppede: "En appelsin kan opdeles i endeligt mange stykker og samles til to nye appelsiner, der hver især er identiske med den første", men ingen af disse formuleringer er særligt præcise og slet ikke matematisk fyldestgørende. Vi vil derfor i denne artikel se lidt nærmere på matematikken bag Banach-Tarski paradokset. Det viser sig, (med al ære og respekt for Matematikrevyen (der jo er skønherlig (især Teχnikken (der jo er for lækker)))), at der indgår meget få appelsiner i formuleringen af og beviset for sætningen.

Lad os først definere hvad paradoksalitet vil sige:

Definition 1 (Paradoksalitet) Lad en gruppe G virke på en mængde X og lad $E \subset X$. Vi siger, at E er **G-paradoksal**, hvis der findes parvist disjunkte delmængder af E, $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$, og gruppeelementer, $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots h_m$, i G således at

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j).$$

Løst sagt så skal man altså kunne dele E op i et endeligt antal dele og omarrangere dem vha. G til to kopier af sig selv.

At G virker på X vil sige, at til hvert g i G findes en bijektion, der også kaldes g, fra X til X således, at hvis $g, h \in G$ og $x \in X$ så gælder $g(h(x)) = (gh)(x)$ og $1(x) = x$.

Bemærk i øvrigt at enhver gruppe virker naturligt på sig selv ved venstre-multiplikation. Vi siger derfor, at en gruppe G er G-paradoksal (eller blot paradoksal), hvis den er paradoksal når G virker på sig selv ved venstre-multiplikation.

Med denne noget mere formelle definition af paradoksalitet er det muligt at give en præcis formulering af Banach-Tarski Paradokset:

Sætning 2 (Banach-Tarski Paradokset) *Enhver solid kugle i $\mathbb{R}^3$ er G_3-paradoksal, hvor G_3 er gruppen af alle isometrier på $\mathbb{R}^3$.*

Inden vi kan give et bevis for 'paradokset', er det nødvendigt med en hel del forberedende knæbøjninger og krumspring. Vi begynder med den følgende meget vigtige sætning.

Sætning 3 *Lad en gruppe G virke på en mængde X uden ikke-trivielle fikspunkter (i.e. $g(x) = x \Rightarrow g = 1$). Hvis G er paradoksal, så er X G-paradoksal.*

Det omvendte (i.e. at hvis X er G-paradoksal, så er G paradoksal) viser sig også at gælde, men beviset overlades til den flittige læser.

Beviset for Sætning 3 kræver det (berygtede?!) udvalgsaksiom, så inden vi går i gang med beviset, husker vi lige, hvad det er, det siger:

Udvalgsaksiomet Hvis $\{A_i\}_{i \in I}$ er en familie af disjunkte ikke-tomme mængder, da findes en mængde C bestående af netop et element fra hver A_i.

Med det på plads kaster vi os ud i beviset for Sætning 3.

Bevis (Sætning 3). Lad A_i, B_j, g_i, h_j bevidne G's paradoksalitet. I kraft af Udvalgsaksiomet findes der en mængde M bestående af netop et element fra hver G-bane i X, så hvis vi lader M være en sådan mængde, er $\{g(M) : g \in G\}$ en klassedeling af X. (Tjek selv efter! Parvist disjunkthed følger af, at G ingen ikke-trivielle fikspunkter har.) Lad nu $A_i^* = \bigcup\{g(M) : g \in A_i\}$ og $B_j^* = \{g(M) : g \in B_j\}$. Da $\{A_i\}, \{B_j\}$ er parvist disjunkte, er $\{A_i^*\}, \{B_j^*\}$ det også, og ydermere har vi at

$$X = \bigcup g_i(A_i^*) = \bigcup h_j(B_j^*),$$

hvilket følger umiddelbart af de tilsvarende ligheder i G. Dermed er X G-paradoksal. $\square$

Vi udleder med det samme følgende nyttige korollar, idet enhver undergruppe virker på hele gruppen uden ikke-trivielle fikspunkter:

Corollary 4 *Hvis en gruppe G har en paradoksal undergruppe, da er G selv paradoksal.*

Med Korrolar 4 i baghovedet er følgende proposition værd at lægge mærke til:

Proposition 5 *Den frie gruppe med to frembringere σ, τ er paradoksal.*

Beviset overlades til læseren, men den flittige kan begynde med at se på ord, der begynder med hhv. $\sigma, \sigma^{-1}, \tau$ og τ^{-1}.

Vi kan desværre ikke umiddelbart benytte os af Sætning 3 til at vise Banach-Tarski Paradokset, idet isometrier generelt har mange fikspunkter. Derfor bliver vi nødt til at finde på en måde at omgå disse fikspunkter. Vi kan dog benytte korollaret til at vise følgende:

Proposition 6 *SO_n (gruppen af alle rotationer i $\mathbb{R}^n$) indeholder en fri undergruppe af orden 2 når $n \geq 3$, hvorfor SO_n er paradoksal når $n \geq 3$.*

Beviset overlades igen til læseren. Det er ikke særligt svært, men meget besværligt (se evt. [1] p. 15).

Nu har vi efterhånden foretaget de indledende knæbøjninger, men inden det bliver rigtigt vildt, indfører vi lige et nyt begreb, der gør paradoksalitet lidt nemmere at arbejde med.

Definition 7 (Ækvidekomposabilitet) Lad G virke på X og lad $A, B \subset X$. Vi siger, at A er **G-ækvidekomposabel** med B (skrevet $A \sim_G B$), hvis der findes en klassedeling $A_1, \ldots, A_n$ af A og elementer $g_1, \ldots, g_n$ i Gsåledes at

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i)$$

hvor $g_i(A_i) \cap g_j(A_j) = \emptyset$ når $i \neq j$.

Lidt løst sagt er to mængder ækvidekomposable, hvis man kan opdele den ene mængde i et endeligt antal stykker og konstruere den anden mængde ud fra disse stykker vha. G.

Notationen '$\sim_G$' indikerer, at ækvidekomposabilitet er en ækvivalensrelation på potensmængden af X. Dette er rent faktisk tilfældet og ikke specielt vanskelligt at vise. Hvad mere interessant er, at ækvidecomposabilitet kan bruges til at karakterisere de paradoksale mængder, hvilket fremgår af den nedenstående proposition.

Proposition 8 *Lad G virke på X og lad $E \subset X$. Da er E G-paradoksal hvis, og kun hvis E indeholder disjunkte delmængder A og B således at $E \sim_G A$ og $E \sim_G B$. Det følger da, at hvis*

$E_1, E_2 \subset X$ med $E_1 \sim_G E_2$ og E_1 er G-paradoksal, da er også E_2 G-paradoksal.

Den ene implikation er lige til, men den anden kræver lidt mere arbejde, idet mængderne i familien $\{g_i(A_i)\}$ fra paradoksaliteten af E ikke nødvendigvis er parvist disjunkte. Tricket består imidlertid bare i at begynde med nogle mindre mængder, således at mængderne $\{g_i(A_i)\}$ bliver parvist disjunkte. Den flittige læser kan se nærmere på mængden

$$A_i^* := A_i \setminus g_i^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{i-1} g_k(A_k)\right).$$

Nu nærmer vi os målet! Den indledende opvarmning er gjort, men vi vil i første omgang nøjes med at se nærmere på sfæren S^2. Vi vil gerne vise, at S^2 er SO_3-paradoksal, men for at vi kan gøre det, skal vi først tage hånd om fikspunktsproblemet. Dette gør vi simpelthen ved at se på sfæren fraregnet de puntker, der fikseres.

Sætning 9 (Hausdorff Paradokset) *Der findes en tællelig delmængde D af S^2 således, at $S^2 \setminus D$ er SO_3-paradoksal.*

Bevis. Lad F være den frie gruppe af orden to indeholdt i SO_3. Enhver rotation i F, der ikke er identiteten, fikserer to punkter på kuglen nemlig de to poler for rotationsaksen. Hvis vi lader D være mængden af alle sådanne poler, opnår vi en tællelig mængde, idet F er tællelig. Hvis $P \in S^2 \setminus D$ vil også $\rho(P) \in S^2 \setminus D$ for $\rho \in F$, fordi hvis σ fikserede $\rho(P)$ ville $\rho^{-1}\sigma\rho(P) = P$, og dermed $P \in D$ i modstrid med vores antagelse. Dermed virker F uden ikke-trivielle fikspunkter på $S^2 \setminus D$, og Sætning 3 giver os nu, at $S^2 \setminus D$ er paradoksal. □

Hausdorff Paradokset ser måske ved første øjekast mærkværdigt ud, men en tællelig delmængde kan jo rent faktisk være tæt, så derfor er det ikke helt så interessant (eller paradoksalt, om man vil) som selve Banach-Tarski Paradokset. Men stadig er det et meget vigtigt skridt på vores færd. Det viser sig nemlig, at man kan se bort fra denne tællelige delmængde D.

Lemma 10 *Lad D være en tællelig delmængde af S^2. Da er S^2 SO_3-ækvidekomposabel med $S^2 \setminus D$. Det følger dermed, at S^2 er SO_3-paradoksal.*

Bevis. Lad ℓ være en linie gennem origo, der ikke rammer D og lad ρ_θ betegne en rotation omkring ℓ med vinklen $\theta \in [0, 2\pi)$. For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in D$ definerer vi

$$A(n, x) = \{\theta \in [0, 2\pi) : \rho_\theta^n(x) \in D\}.$$

Bemærk at $A(n, x)$ er tællelig, da D er tællelig. Sætter vi nu A til at være foreningen af alle $A(n, x)$ for $x \in D$ og $n \in \mathbb{N}$, opnår vi en tællelig mængde. Der findes da en vinkel θ i $[0, 2\pi) \setminus A$ således at $\rho_\theta^n(D) \cap D = \emptyset$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og dermed også $\rho_\theta^n(D) \cap \rho_\theta^m(D) = \emptyset$ når $n \neq m$. Definerer vi dernæst $\overline{D}$ til at være

$$\overline{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho_\theta^n(D),$$

indser vi at $S^2 = (S^2 \setminus \overline{D}) \cup \overline{D} \sim_{SO_3} (S^2 \setminus \overline{D}) \cup \rho_\theta(\overline{D}) = S^2 \setminus D$ idet $\overline{D}$ var en disjunkt forening. Desuden benytter vi det faktum, at hvis $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ og $A_i \sim_G B_i$ gælder at $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$. Vi har nu pr. Hausdorff Paradokset, og Proposistion 8 at S^2 er SO_3-paradoksal. $\square$

Ovenstående bevisteknik kan kaldes for et absorptionsbevis, idet den tællelige delmængde D løst sagt absorberes ind i S^2 ved en form for Hilberts Hotel argumentation. Vi får brug for et lignende argument i beviset for næste sætning, som er: ♫ 'Fanfare!' ♫

Sætning 11 (Banach-Tarski Paradokset) *Enhver solid kugle i* $\mathbb{R}^3$ *er* G_3*-paradoksal.*

Bevis. Lad os til at begynde med betragte enhedskuglen B i $\mathbb{R}^3$. Dekompositionen af S^2 fra det foregående lemma giver en dekomposition af $B \setminus \{\mathbf{0}\}$ gennem korrespondencen

$$P \mapsto \{\alpha P : 0 < \alpha \leq 1\}$$

for $P \in S^2$. Som nævnt bruger vi absorptionsteknikken fra før til at vise at $B \sim_{G_3} B \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Lad $P = (0, 0, \frac{1}{2})$ og lad ℓ være en linie gennem P, der ikke rammer origo. Lad dernæst ρ være en rotation omkring ℓ med uendelig orden. Ligesom i det foregående lemma kan vi bruge mængden $\overline{D} = \bigcup\{\rho^n(\mathbf{0}) : n \in \mathbb{N}_0\}$ til at absorbere origo:

$$B = (B \setminus \overline{D}) \cup \overline{D} \sim_{G_3} (B \setminus \overline{D}) \cup \rho(\overline{D}) = B \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

På helt tilsvarende vis kan man benytte korrespondencen

$$P \mapsto \{\alpha P : 0 < \alpha \leq r\}$$

for en vilkårlig kugle $B(r)$ med centrum i origo og radius $r > 0$ til at vise, at $B(r)$ er paradoksal. Ydermere, da G_3 indeholder alle translationer, vil en vilkårlig kugle i $\mathbb{R}^3$ være G_3-paradoksal. $\square$

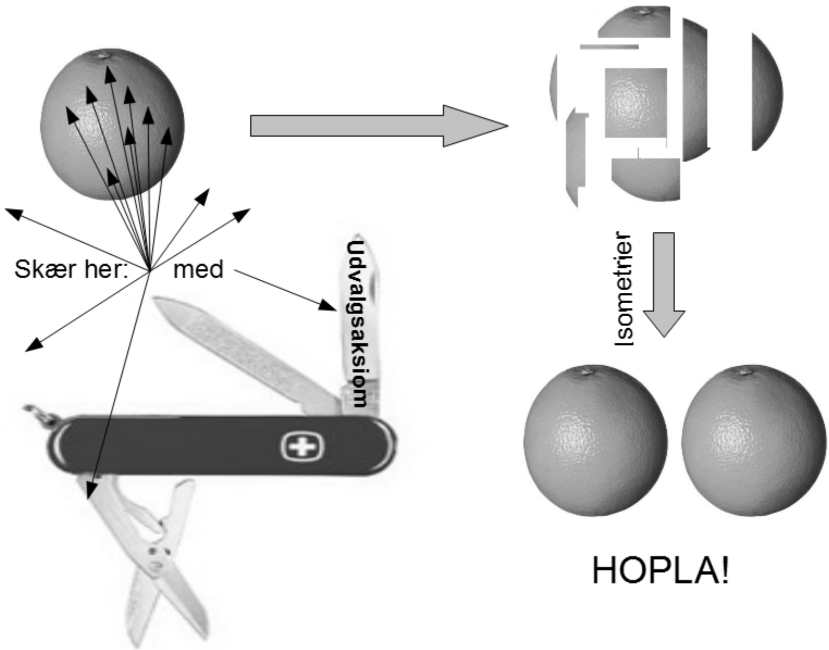
Af det ovenstående fremgår det altså, at Banach-Tarski Paradokset kan bevises helt uden brug af appelsiner.

Litteratur

[1] Wagon, S.: The Banach-Tarski Paradox. Cambridge University Press; 1985

For en god ordens skyld

Banach-Tarski paradokset — med appelsiner



Filosofien og matematikken bag Google

– Med fokus på PageRank

Jakob Lindblad Blaavand, Oxford University

Indledning

En internetsøgemaskine er god, hvis den først og fremmest kan søge blandt al information på internettet. Derudover skal den være hurtig til at finde resultaterne, og måske vigtigst af alt skal den vise de mest relevante resultater først. Sat lidt på spidsen er de to første krav blot et spørgsmål om nok computerkraft. Ordningen af søgeresultaterne er mere subtil og var det, der gjorde Google så speciel i forhold til andre søgemaskiner, da Sergey Brin og Lawrence Page lancerede Google tilbage i 1997. Hvis jeg på Google søger på *matematik* og *København*, får jeg 554.000 resultater, og de kommer svimlende hurtigt – efter kun 0.23 sekunder. Når jeg søger på disse to ord, vil jeg naturligvis have fat i *Institut for Matematiske Fag* på *Københavns Universitets* hjemmeside. Google giver mig også denne hjemmeside som det første søgeresultat. Men hvordan kan Google gætte det fra blot *matematik* og *København*? Dette mindre mysterium skal vi undersøge i denne artikel.

Søgeresultaterne skal sorteres efter relevans – men hvilke parametre ligger til grund for dette kriterie, og hvordan implementeres de? Det ville være mest demokratisk, hvis man kunne sætte en stor gruppe mennesker til at bestemme, hvilke hjemmesider der er de mest troværdige og vigtigste. Man kunne så sortere søgeresultaterne efter deres placering på denne universelle liste. Der er mange problemer med denne fremgangsmåde. Først og fremmest vil listen naturligvis være afhængig af gruppens sammensætning. Derudover er det en uoverskuelig tidshorisont. Hvis mennesker skal tage stilling til vigtigheden og troværdigheden af 255 millioner websites, er en sådan liste altså underlagt en subjektiv vurdering, som er uhensigtsmæssig. Løsningen er at få internettet til selv at ordne siderne efter vigtighed.

Størstedelen af denne artikel er en forklaring af filosofien bag Google, krydret med en smule matematik. Vi vil kun se på den afgørende ide, der fik Google til at være så meget bedre end sine daværende konkurrenter, og ikke diskutere de mange andre tiltag Google i dag bruger til at ordne søgeresultater. I afsnittet 'Matematiske beviser' ser vi på den konkrete matematik. Her bliver alle påstande fra artiklen bevist. Beviserne er alene baseret på lineær algebra, og den eneste forudsætning for at kunne forstå beviserne er at kende til egenværdier og egenvektorer for en matrix. Hovedteksten er stærkt inspireret af [1], mens det matematiske afsnit er baseret på [2]. Hvis du vil vide mere om lineær algebra, er [3] et godt udgangspunkt.

Hvilke sider er vigtigst?

Hvis du har lavet en hjemmeside, så har du også lavet links til andre hjemmesider. Det har du gjort, fordi du synes de hjemmesider, du linker til, indeholder vigtig information af den ene eller den anden karakter. Når du derfor laver et link til en hjemmeside, siger du samtidig, at du mener, siden er vigtig. Hvis vi kan kortlægge hele internettets linkstruktur, så kan vi få alle hjemmesideforfatteres mening om, hvilke sider der er vigtige. På den måde kan vi forfølge vores første demokratiske tanke om, at en stor gruppe mennesker skal være med til at bestemme, hvad der er vigtigt: Hjemmesidens placering på vigtighedslisten er bestemt af *hvor mange* og *hvilke* hjemmesider, der linker til den. Hvis listen også skal afspejle en form for troværdighed, er det også nødvendigt at tage i betragtning, hvilke sider der linker til hvilke. F.eks. er det meget mere troværdigt for en hjemmeside, at en stor hjemmeside som *jp.dk* linker til den, end, at jeg som privatperson linker til hjemmesiden.

Altså, hvis vi har en side P, lader vi et tal, sidens *PageRank*, $I(P)$, være en samlet beskrivelse af sidens troværdighed og vigtighed. Når søgeresultaterne i en søgning skal vises, bliver hjemmesiderne sorteret efter denne PageRank. Men hvordan skal vi bestemme PageRank fra de ovenstående betragtninger? Antag, at siden P_j har l_j links. Hvis et af disse links peger på siden P_i, så overfører P_j en $1/l_j$'te del af dens PageRank til P_i. Så PageRanken af P_i, $I(P_i)$, er summen af bidrag fra alle siderne, der linker til P_i. Altså, hvis mængden af sider, der linker til P_i, betegnes B_i, er PageRanken givet ved

$$I(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{I(P_j)}{l_j}. \tag{1}$$

Har vi ikke et problem? En sides PageRank bestemmes af andre siders PageRank. Men hvis vi nu har to sider, der linker til hinanden - hvordan får vi så bestemt hver deres PageRank? Er PageRank virkelig veldefineret? Det er som spørgsmålet om, hvad der kom først: hønen eller ægget? Skal vi så til at skrotte vores håb om at lave en vægtning af sider efter alle internettets links? Vi har endnu ikke brugt noget matematik på vores situation, og hvis vi gør det, så har vi heldigvis en løsning.

Hyperlinkmatricen

Vi definerer nu en matrix $H = (H_{ij})$, som kaldes *hyperlinkmatricen*. Hver række og søjle repræsenterer en webside. Hvis den i'te række er websiden P_i så er den i'te søjle det også. Altså er

H en kvadratisk matrix. I den ij'te indgang står der $1/l_j$ hvis $P_j \in B_i$ og 0 ellers. Dvs. hvis P_j linker til P_i står der $1/l_j$ i den ij'te indgang og 0 hvis P_j ikke linker til P_i. Hvis man ser på den j'te *søjle*, så viser denne vektor, hvilke sider der linkes til fra P_j. Hvis man derimod ser på den j'te *række* kan man aflæse hvilke sider, der linker til P_j. Det skal bemærkes, at hvis en hjemmeside ikke linker til nogen andre hjemmesider, så er alle indgange i den tilhørende søjle 0.

Hyperlinkmatricen er altså helt speciel i den forstand, at alle indgangene er større end eller lig nul, og summen af alle indgangene i en søjle er 1, medmindre den side søjlen repræsenterer ikke har nogen links.

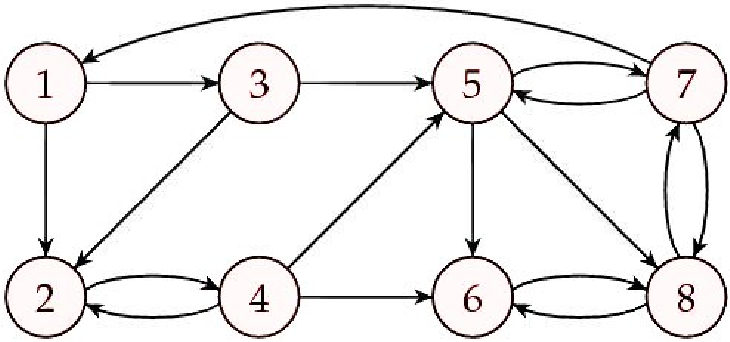
Vi kan nu lave vektoren $I = [I(P_i)]$, hvis indgange er PageRanks. Husker vi tilbage på definition (1) af en sides PageRank, så har vi, at vores PageRank-vektor opfylder følgende ligning:

$$I = HI,$$

og vi kan tage dette som værende definitionen på I. I virkeligheden har vi her n ligninger med n ubekendte, hvor n er antallet af websider på nettet. Altså *rigtig* mange ligninger, der skal løses for at finde alle websiders PageRank. Per definition er I en egenvektor for H med egenværdi 1, og den slags vektorer er helt specielle. Der findes teknikker til at finde dem, og forhåbentlig bliver det overskueligt at løse ligningerne.

Miniatureweb

Lad os se på et eksempel, hvor vi har otte websider, der linker til hinanden og udgør et internet i legetøjsstørrelse. Links er repræsenteret ved pile.



Den tilhørende matrix og egenvektor er

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad I = \begin{bmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{bmatrix}$$

Da side 1 linker til side 2 og 3 står der $\frac{1}{2}$ på plads 2 og 3 i første søjle og 0'er på resten af pladserne. Side 2 linker kun til side 4, og derfor står der 1 på plads 4 i anden søjle og 0'er på resten af pladserne, osv.

I dette tilfælde viser PageRank-vektoren, I, at side 8 er den vigtigste, fordi det største tal står på plads 8. Det kan til dels forklares med, at der er tre sider, der linker til side 8. Der bliver også linket til side 2, 5 og 6 tre gange, men 8 er den vigtigste, fordi de websider, der peger på 8, selv har mange sider, der peger på dem. Her er det altså igen troværdigheden af siderne, der er med til afgøre PageRanken, og ikke alene antallet af links.

Beregning af I

Der findes mange måder at finde egenvektorer til kvadratiske matricer på. Men når vi i dette tilfælde har en hyperlinkmatrix med 50 milliarder rækker og 50 milliarder søjler, virker alle beregningsmetoder håbløse og tidskrævende.[10] Dog er vi så heldige, at der i gennemsnit kun er 10 links per side, så langt størstedelen af indgangene i H er nul. Derfor bruger man det, der hedder *potensmetoden*, til at finde egenvektoren I til egenværdien 1.

For at bruge potensmetoden skal man vælge sig en vektor I^0, som man mener kunne være en kandidat til I, og så laver man følgen af vektorer I^k givet ved

$$I^{k+1} = HI^k = H^k I^0.$$

Hvis H er en særlig pæn matrix, vil I^k vektorerne nærme sig egenvektoren I, når k bliver stor. Selv for Googles store matrix skal man kun op på ca. $k = 60$ for at få en god approksimation til I.

I eksemplet er de første elementer i følgen beregnet for $k = 60$ og $k = 61$.

[10] Det tidligere tal 255 millioner er antallet af websites, mens de 50 milliarder er det totale antal, hvor undersider tælles med.

I^0	I^1	I^2	I^3	I^4	$\cdots$	I^{60}	I^{61}
1	0	0	0	0.0278	$\cdots$	0.06	0.06
0	0.5	0.25	0.1667	0.0833	$\cdots$	0.0675	0.0675
0	0.5	0	0	0	$\cdots$	0.03	0.03
0	0	0.5	0.25	0.1667	$\cdots$	0.0675	0.0675
0	0	0.25	0.1667	0.1111	$\cdots$	0.0975	0.0975
0	0	0	0.25	0.1806	$\cdots$	0.2025	0.2025
0	0	0	0.0833	0.0972	$\cdots$	0.18	0.18
0	0	0	0.0833	0.3333	$\cdots$	0.295	0.295

Vigtige spørgsmål

Nu har vi altså fundet en relativt effektiv måde at beregne I på. Med denne måde vælger vi os et startpunkt for en følge, der så tilnærmer sig egenvektoren. Men på dette tidspunkt skal vi stille os selv tre centrale spørgsmål:

- Vil følgen I^k altid konvergere?
- Er grænsevektoren af I^k uafhængig af startvektoren I^0?
- Indeholder I rent faktisk den informationen, vi vil have?

Svaret på alle tre ovenstående spørgsmål er desværre nej. Men det, der redder os, er, at svaret på tredje spørgsmål er nej. Vi har nemlig ikke helt fundet frem til den information, som vi satte os for at finde – men vi er meget tæt på.

Googlematricen

Tidligere har vi opfattet PageRank som et mål for, hvor vigtig en side er, beregnet ud fra vigtigheden af de sider, der peger på den. Det var et forsøg på at bruge internettets linkstruktur til på demokratisk vis at afgøre hvilke sider, der er de vigtigste og mest troværdige. Vi har dog kun taget højde for hjemmesidernes fprfattere. Hvis vi skulle være helt demokratiske, skulle vi også have brugerne af internettet med – altså surferne. Selvfølgelig er der et stort overlap mellem forfattere og brugere, men selvom man synes, at en bestemt hjemmeside er vigtig, er det jo ikke sikkert, man vil linke til den, hvis nu ens hjemmeside har et meget konkret formål.

Vi vil nu tage hyperlinkmatricen som udgangspunkt og ændre den en smule, så vi får en matrix, hvor vi kan svare ja på alle spørgsmålene fra ovenstående, og hvor vi altså får indkodet websurfernes stemme i afgørelsen af, hvilke hjemmesider er vigtige. Vores udgangspunkt er, at vi ud fra H vil konstruere en matrix G, og løse ligningssystemet $GI = I$. Dette I er vores rigtige PageRank-vektor.

Vi forestiller os, at vi tager en tilfældig surftur på nettet. Vi starter på siden P_j, som har l_j links. Vi vælger så et tilfældigt af de l_j links. Et af linksene er til siden P_i. Dermed er sandsynligheden for at vi rammer P_i, når vi står på P_j, altså $1/l_j$.

Forfølger vi denne tanke, så kan PageRank $I(P_j)$ ses som sandsynligheden for, at man tilfældigvis surfer forbi siden, hvis man bare klikker rundt på må og få på nettet. Det giver ganske god mening, for hvis du surfer efter noget bestemt information, så vil du uværgeligt ende på de samme sider flere gange. Altså er de sider vigtigere end andre, og disse siders PageRank skal være højere. Dog giver denne fortolkning af PageRank os et problem: Hvis vi på vores surftur støder på en side, der ikke linker til andre websider, hvad gør vi så? For at kunne fortsætte forestiller vi os, at en side uden links til andre sider rent faktisk linker til alle sider på hele nettet. Hvis vi tænker tilbage på vores hyperlinkmatrix, så betyder det, at den søjle, der repræsenterede en side uden links, ville have lutter 0'er. Nu bliver hele denne søjle erstattet med en vektor med $1/n$ på hver plads, hvor n er antallet af sider på nettet. Denne nye matrix kalder vi S. Det betyder, at vi kan skrive S som $S = H + A$, hvor A er en matrix, med lutter 0'er - bortset fra de søjler, der repræsenterer websider uden links, hvor der i stedet står $1/n$ i hver indgang.

Har vi nu fået simuleret, hvordan en websurfer opfører sig på nettet? I det store hele, ja, fordi man følger links på de sider, man besøger, og hvis der ikke er nogen links, så vælges en tilfældig af nettets mange websider. Men på en surftur vælger man ofte en anden side på nettet fremfor bare at vælge en af de sider, der linkes til. Vi kan formulere dette matematisk ved at vælge et tal, α, mellem 0 og 1, som er sandsynligheden for, at websurferen gør, som vi har forudsagt med matricen S: han vælger en af de sider, der linkes til, eller hvis han kommer til en side uden links, så vælges en tilfældig af nettets mange sider. Dermed er der sandsynlighed $1 - \alpha$ for, at websurferen gør noget andet: vælger en tilfældig af nettets websider. Det hele samler vi i *Googlematricen*:

$$G = \alpha S + (1 - \alpha)\frac{1}{n}\mathbb{1}$$

hvor $\mathbb{1}$ er en matrix af samme dimension som S, med lutter 1-taller i alle indgangene.

Variablen α er ret vigtig, for den styrer hvor stor indfyldelse, internettets hyperlinkstruktur skal have i Googlematricen. F.eks. vil $\alpha = 1$ give den oprindelige hyperlinkstruktur, og $\alpha = 0$ giver en webstruktur helt uden links.

Googlematricen giver den hidtil mest realistiske beskrivelse af en websurfers adfærd på nettet. Det er naturligvis afhængigt af, at vi finder en rimelig værdi til α. Google bruger $\alpha = 0.85$, der betyder, at der er 85% sandsynlighed for, at en websurfer følger et link på en hjemmeside, og 15% sandsynlighed for, at han vælger en tilfældig hjemmeside.

Beregning af I

Så langt så godt. Vi har fået lavet os en matrix G, der kan simulere en websurfers adfærd. Hvis vi nu kan finde egenvektoren I med egenværdien 1, altså finde en vektor så $GI = I$, så har vi fundet vores PageRank-vektor. I afsnittet 'Matematiske beviser' ser vi, at der findes uendeligt mange løsninger til $GI = I$. Men hvis vi vil fortolke PageRank som en sandsynlighed for at en hjemmeside bliver besøgt på en tilfældig surftur, så skal PageRank jo være et positivt tal, og hvis vi lægger PageRanks for alle hjemmesider sammen, skal vi have 1. Med disse ekstra antagelser kan vi vise, at der findes præcist en løsning til $GI = I$, og denne løsning kan findes med potensmetoden. For at potensmetoden virker, skal vi vise, at følgen I^k vil konvergere mod vores PageRank-vektor I, der opfylder $GI = I$ og den ekstra antagelse. Derudover skal vi vise, at grænsevektoren for I^k ikke afhænger af valget af startvektor. Det vil blive gjort i afsnittet 'Matematiske beviser'.

Som sagt vil vi bruge potensmetoden, og husker vi på, at $S = H + A$, bliver

$$G = \alpha H + \alpha A + \frac{1-\alpha}{n}1,$$

og dermed er

$$GI^k = \alpha HI^k + \alpha AI^k + \frac{1-\alpha}{n}1I^k.$$

Da de fleste af indgangene i H er nul, skal der i gennemsnit kun summeres 10 tal i hver af indgangene i produktet HI^k. Desuden er alle rækker i A ens, så AI^k er en vektor med samme tal i hver indgang, og prikproduktet mellem I^k og en række i A skal kun beregnes en enkelt gang. Det samme er gældende for 1, der også har ens rækker.

Hastigheden af I^k's konvergens afhænger af størrelsen af α. Konvergensen er hurtig, hvis α er lille, og langsom, når den er tæt på 1. Med valget af $\alpha = 0.85$ har Google indgået et kompromis mellem at få så meget som muligt af internettets hyperlinkstruktur med, og hastigheden hvormed I kan beregnes. Det viser sig, at k skal ligge mellem 50 og 100, for at vi kan få tilpas god approksimation til I. Google siger selv, at det tager dem et par dage at beregne I.[11]

I og med, at nettet er en dynamisk størrelse, hvor der hele tiden bliver tilføjet og slettet indhold, vil en PageRank vektor være forældet sekundet efter, at beregningen af den er startet. Rygterne vil derfor vide, at Google for nogle år siden beregnede en ny PageRank-vektor en gang i måneden. I dag er det ikke klart, hvordan det fungerer.

Matematiske beviser

I dette afsnit vil vi bevise påstandene omkring potensmetoden og eksistensen af en PageRank-vektor. Først og fremmest det mest essentielle spørgsmål: Findes der overhovedet en løsning til $GI = I$, der samtidig opfylder, at $\sum_{i=1}^{n} I(P_i) = 1$ og $I(P_i) > 0$? Dette er et ligningssytem med $n + 1$ ligninger og n ubekendte. Som udgangspunkt er det ikke sikkert, at vi kan finde en sådan løsning. I tilfælde af, at vi kan finde en løsning, er vi så sikre på, at den

[11] Disse oplysninger er nogle år gamle. Det er derfor meget usikkert, hvad de korrekte er i dag, og om det stadig er denne metode, der bruges. Men det er forretningshemmeligheder i dag.

er entydig? Desuden skal vi se, at potensmetoden virker og er uafhængig af valget af startvektor.

I det følgende vil jeg bruge betegnelsen $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ for summen af den numeriske værdi af indgangene i en vektor. $||x||_1$ kaldes for 1-længden af x.

Proposition 1 *Hvis $G = (g_{ij})$ er en matrix med $g_{ij} > 0$ for alle i, j og alle søjler summer til 1, da er 1 en egenværdi for G og ligningen $Gx = x$ har en løsning, hvor alle indgange i x er positive, særligt findes en løsning med $||x||_1 = \sum_{i=1}^n x_i = 1$.*

Bevis. Rækkerne i G^T summer alle til 1, så vektoren v givet ved $(1, 1, \dots, 1)^T$ er en egenvektor for G^T med egenværdien 1, så $G^T v = v$. Dermed er 1 en rod i $\det(G^T - \lambda Id)$, og da $\det(G^T - \lambda Id) = \det(G - \lambda Id)$ er 1 altså også en egenværdi for G.

Helt generelt gælder der, at $|\sum_i y_i| \leq \sum_i |y_i|$ og hvis y_i'erne har blandede fortegn er uligheden skarp.

Lad $x \in V_1(G)$ være en egenvektor i egenrummet tilhørende egenværdien 1 for G. Antag, at der er forskellige fortegn i x's indgange.

Da $x = Gx$ er $x_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j$ og da x_i'erne har blandede fortegn $g_{ij} > 0$, har $g_{ij} x_j$'erne blandede fortegn. Vi har altså en streng ulighed $|x_i| < \sum_{j=1}^n g_{ij} |x_j|$, og derfor har vi

$$\sum_{i=1}^n |x_i| < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n g_{ij} = \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

hvilket er en modstrid.

Altså har alle indgange i x samme fortegn. Særligt findes en vektor i $V_1(G)$ med alle indgangene positive, og dermed også en med 1-længde 1. $\square$

Ovenstående proposition viser altså eksistensen af en løsning til ligningssystemet $GI = I$, der opfylder $||I||_1 = 1$ og alle indgange i I er positive. Hvis $\dim V_1(G) = 1$ findes der kun én løsning. Denne løsning er vores PageRank-vektor.

For at kunne vise at $\dim V_1(G) = 1$ skal vi først have vist følgende generelle lemma.

Lemma 2 *Lad v og w være lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Der findes reelle tal s, t så $x = sv + tw$ har både positive og negative indgange.*

Bevis. Da v, w er lineært uafhængige er $v \neq 0 \neq w$. Lad $d = \sum v_i$. Hvis $d = 0$ indeholder v forskellige fortegn og $s = 1$ og $t = 0$ opfylder det ønskede.

Hvis $d \neq 0$ defineres $s = \frac{-\sum_i w_i}{d}$ og $t = 1$. Da v, w er lineært uafhængige er $x = sv + tw \neq 0$, men det er samtidig klart at $\sum_i x_i = 0$, så x_i'erne må have blandede fortegn. $\square$

Nu er vi i stand til at bevise entydigheden af PageRank-vektoren.

Proposition 3 *Hvis $G = (g_{ij})$ er en kvadratisk matrix med $g_{ij} > 0$ og $\sum_i g_{ij} = 1$ for alle j er $\dim V_1(G) = 1$.*

Bevis. Antag, at der findes to lineært uafhængige vektorer $v, w \in V_1(G)$. Pr. lemma 2 findes s, t så komponenterne af $x = sv + tw$ har blandede fortegn. Men pr. Proposition 1 vil ethvert $x \in V_1(G)$ have enten kun positive eller kun negative komponenter, hvilket er en modstrid.

Altså vil en basis for $V_1(G)$ kun bestå af en enkelt vektor, og $\dim V_1(G) = 1$. $\square$

Vi har nu bevist, at der findes en entydig PageRank-vektor. Spørgsmålet er nu blot, om vi kan finde den med potensmetoden beskrevet ovenfor.

Proposition 4 *Lad* $G = (g_{ij})$ *være en kvadratisk matrix med* $g_{ij} > 0$ *og* $\sum_{i=1}^{n} g_{ij} = 1$ *for alle* j*, og lad* V *være underrummet i* $\mathbb{R}^n$ *bestående af vektorer* v *så* $\sum_i v_i = 0$*. Da er* G *matrixrepræsentationen af en lineær transformation* $G : V \to V$ *og der findes et* $0 \leq c < 1$ *så* $||Gv||_1 \leq c||v||_1$ *for alle* $v \in V$*.*

Bevis. Lad os først se, at G tager elementer i V til elementer i V. Lad $w = Gv$, så $w_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} v_j$ og

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} g_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j = 0.$$

Dermed er $w \in V$ og $G : V \to V$.

Nu til vurderingen, som er en smule besværlig at vise.

$$||w||_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i w_i = \sum_{i=1}^{n} e_i \sum_{j=1}^{n} g_{ij} v_j,$$

hvor $e_i = \operatorname{sgn}(w_i)$ og e_i'erne er ikke alle ens, da $\sum_i w_i = 0$, og $w \in V$ – medmindre $w = 0$, hvor uligheden klart gælder.

$$||w||_1 = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} e_i g_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j,$$

hvor $a_j = \sum_{i=1}^{n} e_i g_{ij}$.

Da e_i'erne ikke alle er ens, $\sum_{i=1}^{n} g_{ij} = 1$ og $0 < g_{ij} < 1$, er det klart, at

$$-1 < -1 + \min_i g_{ij} \leq a_j \leq 1 - \min_i g_{ij} < 1.$$

Vi har altså, at $|a_j| \leq |1-\min_i g_{ij}| < 1$. Lad derfor $c := \max_j |1-\min_i g_{ij}|$ for så er $|a_j| \leq c < 1$ for alle j. Dermed har vi nu, at

$$||w||_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j = |\sum_{j=1}^{n} a_j v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j||v_j| \leq c \sum_{j=1}^{n} |v_j| = c||v||_1,$$

hvormed det ønskede er vist. □

Vi kan nu afslutte dette matematiske afsnit med en sætning, der indeholder svar på alle spørgsmål stillet under afsnittet *Vigtige Spørgsmål*.

Theorem 5 *Enhver kvadratisk matrix $G = (g_{ij})$ med $0 < g_{ij} < 1$ og $\sum_{i=1}^{n} g_{ij} = 1$ for alle j, har en entydig egenvektor I tilhørende egenværdien 1, der yderligere kun har positive indgange og $||I||_1 = 1$. Vektoren I kan beregnes ved $I = \lim_{k\to\infty} G^k x_0$, hvor x_0 er en vektor med positive indgange og $||x_0||_1 = 1$.*

Bevis. Vi ved allerede fra de ovenstående propositioner, at G har 1 som egenværdi, og at $\dim V_1(G) = 1$. Det gav os som ønsket, at I eksisterer og er entydig. Vi mangler blot at bevise, at potensmetoden virker. Det vil sige at følgen $G^k x_0$ konvergerer mod I for et vilkårligt valg af x_0 med ovenstående egenskaber.

Lad $x_0 \in \mathbb{R}^n$ have positive indgange og $||x_0||_1 = 1$. Vi ved som sagt, at I findes, at $I_i = I(P_i) > 0$ og $\sum_i I(P_i) = 1$.

V er underrummet af $\mathbb{R}^n$, hvor indgangene summerer til 0. Definer $v = x_0 - I$. Dermed er $v \in V$, da summen af v's indgange er nul, fordi summen af indgangene i både x_0 og i I er 1. Derfor er $x_0 = I + v$, og $G^k x_0 = G^k I + G^k v = I + G^k v$. altså er $G^k x_0 - I = G^k v$, og et induktionsargument giver nu, at

$$||G^k v||_1 \leq c^k ||v||_1,$$

hvor $0 \leq c < 1$. Samlet set har vi, at $\lim_{k\to\infty} ||G^k v||_1 = 0$, hvorfor $G^k x_0 \to I$ for $k \to \infty$, hvormed det ønskede er vist. $\square$

Opsamling

Da Page og Brin startede Google i 1997, blev internettet forvandlet fra at være en bunke ustrukturerede informationer, som ingen kunne finde rundt i, til at blive en – ikke fuldstændig ordnet – bunke informationer. Men det var blevet meget lettere at finde relevante informationer hurtigt.

Hovedidéen var at få internettet til selv at ordne informationerne efter relevans ved hjælp af dets links. Som det er vist ovenfor er idéen simpel, men meget anvendelig. Resultatet af en søgning bliver bl.a. sorteret efter sidernes PageRank fundet i PageRank-vektoren. Google siger selv, at PageRank er et af mere end 200 kriterier, der bliver sorteret efter. De resterende kriterier er forretningshemmeligheder, som Google ikke siger noget om, ganske som Google ikke offentliggør, hvad en hjemmesides PageRank præcist er. I den seneste tid har Google lanceret et af de mest radikale ekstra sorteringskriterier. Ved at gemme din søgehistorik lærer Google dig og dine præferencer at kende. Dermed kan Google sortere søgeresultater så de er specielt tilpasset dig. Det er ganske smart når matematikartikler for mig får højere prioritet. Søger man f.eks. på 'Hitchin map flat' får man som udgangspunkt et kort over byen Hitchin i Hertfordshire i England, og en masse tilbud om ledige lejligheder. Laver man geometri som jeg, håber man dog at få artikler om Higgs bundter og egenskaber af Hitchin afbildningen. Alt har dog en pris, nemlig at Google ved forfærdeligt meget om dig. Du må så gøre op med dig selv, om de bedre søgeresultater er det værd – man kan dog slå overvågningen fra, så man stadig kan bruge Google anonymt – heldigvis.

I kølvandet på PageRank-algoritmen er der udviklet andre algoritmer, som også bruger internettets hyperlinkstruktur til at vurdere websiders vigtighed. Et eksempel er HITS-algoritmen, som blev lavet af Jon Kleinberg, der ligger til grund for Teoma søgemaskinen, der driver ask.com. Du kan selv vurdere, hvilken der er bedst ved at sammenligne resultater.

Litteratur

[1] David Austin. How google finds your needle in the web's haystack. http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank.

[2] Kurt Bryan and Tanya Liese. The linear algebra behind google. http://www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf.

[3] John B. Fraleigh and Raymond A. Beauregard. *Linear Algebra*. Addison Wesley, 3 edition.

Kladepapir

– Til hvis du får en god ide

Hvis du, mens du sidder og læser Famøs, skulle få en ny ide til et bevis for den sætning du går og bøvler med, så bidrager Famøs her med lidt kladepapir. På den måde slipper du for at ligge bladet fra dig.

Famøs juni 2012
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Tegnere:
Maria Bekker-Nielsen Dunbar

Deadline for næste nummer:
24. september 2012

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til famos@math.ku.dk – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

Fagbladet Famøs
c/o Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.math.ku.dk/famos/

Oplag: 400 stk.
ISSN: 1903-2227

FAMØS

God sommer fra Famøs-redaktionen!

I sommerferien har redaktionen planlagt at:

- ▷ hyrde køer,
- ▷ sætte tibetanske bedeflag op,
- ▷ nyde en kold øl,
- ▷ danse til den tidlige morgen,
- ▷ tage til Copenhagen Jazz Festival,
- ▷ tage til Berlin med gamle gymnasievenner,
- ▷ grille netop ét af hvert dansk dyr,
- ▷ tage til Rumænien for at nedkæmpe grev Dracula,
- ▷ skrive speciale ($\times 3$),
- ▷ tage på sommerskole,
- ▷ læse om fysik og Heidegger,
- ▷ gennemføre Iron Week (Iron Man på en uge),
- ▷ tage i sommerhus og læse tusind bøger,
- ▷ bestige bjerge,
- ▷ cykle en tur i Sydsverige,

og skrive artikler, selvfølgelig!

21. årgang, nr. 4, juni 2012