Banach-Tarski Paradokset
– Uden appelsiner

Andreas Hallbäck

Langt de fleste af os har nok hørt om Banach og Tarskis såkaldte paradoks fra 1924. Vi har hørt diverse poppede formuleringer af sætningen såsom "En ært kan splittes ad og samles til solen" eller den lidt mindre poppede: "En appelsin kan opdeles i endeligt mange stykker og samles til to nye appelsiner, der hver især er identiske med den første", men ingen af disse formuleringer er særligt præcise og slet ikke matematisk fyldestgørende. Vi vil derfor i denne artikel se lidt nærmere på matematikken bag Banach-Tarski paradokset. Det viser sig, (med al ære og respekt for Matematikrevyen (der jo er skønherlig (især Teχnikken (der jo er for lækker)))), at der indgår meget få appelsiner i formuleringen af og beviset for sætningen.

Lad os først definere hvad paradoksalitet vil sige:

Definition 1 (Paradoksalitet) Lad en gruppe G virke på en mængde X og lad $E \subset X$. Vi siger, at E er G-**paradoksal**, hvis der findes parvist disjunkte delmængder af E, $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$, og gruppeelementer, $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots h_m$, i G således at

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j).$$

Løst sagt så skal man altså kunne dele E op i et endeligt antal dele og omarrangere dem vha. G til to kopier af sig selv.

At G virker på X vil sige, at til hvert g i G findes en bijektion, der også kaldes g, fra X til X således, at hvis $g, h \in G$ og $x \in X$ så gælder $g(h(x)) = (gh)(x)$ og $1(x) = x$.

Bemærk i øvrigt at enhver gruppe virker naturligt på sig selv ved venstre-multiplikation. Vi siger derfor, at en gruppe G er G-paradoksal (eller blot paradoksal), hvis den er paradoksal når G virker på sig selv ved venstre-multiplikation.

Med denne noget mere formelle definition af paradoksalitet er det muligt at give en præcis formulering af Banach-Tarski Paradokset:

Sætning 2 (Banach-Tarski Paradokset) *Enhver solid kugle i $\mathbb{R}^3$ er G_3-paradoksal, hvor G_3 er gruppen af alle isometrier på $\mathbb{R}^3$.*

Inden vi kan give et bevis for 'paradokset', er det nødvendigt med en hel del forberedende knæbøjninger og krumspring. Vi begynder med den følgende meget vigtige sætning.

Sætning 3 *Lad en gruppe G virke på en mængde X uden ikke-trivielle fikspunkter (i.e. $g(x) = x \Rightarrow g = 1$). Hvis G er paradoksal, så er X G-paradoksal.*

Det omvendte (i.e. at hvis X er G-paradoksal, så er G paradoksal) viser sig også at gælde, men beviset overlades til den flittige læser.

Beviset for Sætning 3 kræver det (berygtede?!) udvalgsaksiom, så inden vi går i gang med beviset, husker vi lige, hvad det er, det siger:

Udvalgsaksiomet Hvis $\{A_i\}_{i \in I}$ er en familie af disjunkte ikke-tomme mængder, da findes en mængde C bestående af netop et element fra hver A_i.

Med det på plads kaster vi os ud i beviset for Sætning 3.

Bevis (Sætning 3). Lad A_i, B_j, g_i, h_j bevidne G's paradoksalitet. I kraft af Udvalgsaksiomet findes der en mængde M bestående af netop et element fra hver G-bane i X, så hvis vi lader M være en sådan mængde, er $\{g(M) : g \in G\}$ en klassedeling af X. (Tjek selv efter! Parvist disjunkthed følger af, at G ingen ikke-trivielle fikspunkter har.) Lad nu $A_i^* = \bigcup\{g(M) : g \in A_i\}$ og $B_j^* = \{g(M) : g \in B_j\}$. Da $\{A_i\}, \{B_j\}$ er parvist disjunkte, er $\{A_i^*\}, \{B_j^*\}$ det også, og ydermere har vi at

$$X = \bigcup g_i(A_i^*) = \bigcup h_j(B_j^*),$$

hvilket følger umiddelbart af de tilsvarende ligheder i G. Dermed er X G-paradoksal. $\square$

Vi udleder med det samme følgende nyttige korollar, idet enhver undergruppe virker på hele gruppen uden ikke-trivielle fikspunkter:

Corollary 4 *Hvis en gruppe G har en paradoksal undergruppe, da er G selv paradoksal.*

Med Korrolar 4 i baghovedet er følgende proposition værd at lægge mærke til:

Proposition 5 *Den frie gruppe med to frembringere σ, τ er paradoksal.*

Beviset overlades til læseren, men den flittige kan begynde med at se på ord, der begynder med hhv. $\sigma, \sigma^{-1}, \tau$ og τ^{-1}.

Vi kan desværre ikke umiddelbart benytte os af Sætning 3 til at vise Banach-Tarski Paradokset, idet isometrier generelt har mange fikspunkter. Derfor bliver vi nødt til at finde på en måde at omgå disse fikspunkter. Vi kan dog benytte korollaret til at vise følgende:

Proposition 6 *SO_n (gruppen af alle rotationer i $\mathbb{R}^n$) indeholder en fri undergruppe af orden 2 når $n \geq 3$, hvorfor SO_n er paradoksal når $n \geq 3$.*

Beviset overlades igen til læseren. Det er ikke særligt svært, men meget besværligt (se evt. [1] p. 15).

Nu har vi efterhånden foretaget de indledende knæbøjninger, men inden det bliver rigtigt vildt, indfører vi lige et nyt begreb, der gør paradoksalitet lidt nemmere at arbejde med.

Definition 7 (Ækvidekomposabilitet) Lad G virke på X og lad $A, B \subset X$. Vi siger, at A er **G-ækvidekomposabel** med B (skrevet $A \sim_G B$), hvis der findes en klassedeling $A_1, \ldots, A_n$ af A og elementer $g_1, \ldots, g_n$ i Gsåledes at

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i)$$

hvor $g_i(A_i) \cap g_j(A_j) = \emptyset$ når $i \neq j$.

Lidt løst sagt er to mængder ækvidekomposable, hvis man kan opdele den ene mængde i et endeligt antal stykker og konstruere den anden mængde ud fra disse stykker vha. G.

Notationen '$\sim_G$' indikerer, at ækvidekomposabilitet er en ækvivalensrelation på potensmængden af X. Dette er rent faktisk tilfældet og ikke specielt vanskelligt at vise. Hvad mere interessant er, at ækvidecomposabilitet kan bruges til at karakterisere de paradoksale mængder, hvilket fremgår af den nedenstående proposition.

Proposition 8 *Lad G virke på X og lad $E \subset X$. Da er E G-paradoksal hvis, og kun hvis E indeholder disjunkte delmængder A og B således at $E \sim_G A$ og $E \sim_G B$. Det følger da, at hvis*

$E_1, E_2 \subset X$ med $E_1 \sim_G E_2$ og E_1 er G-paradoksal, da er også E_2 G-paradoksal.

Den ene implikation er lige til, men den anden kræver lidt mere arbejde, idet mængderne i familien $\{g_i(A_i)\}$ fra paradoksaliteten af E ikke nødvendigvis er parvist disjunkte. Tricket består imidlertid bare i at begynde med nogle mindre mængder, således at mængderne $\{g_i(A_i)\}$ bliver parvist disjunkte. Den flittige læser kan se nærmere på mængden

$$A_i^* := A_i \setminus g_i^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{i-1} g_k(A_k)\right).$$

Nu nærmer vi os målet! Den indledende opvarmning er gjort, men vi vil i første omgang nøjes med at se nærmere på sfæren S^2. Vi vil gerne vise, at S^2 er SO_3-paradoksal, men for at vi kan gøre det, skal vi først tage hånd om fikspunktsproblemet. Dette gør vi simpelthen ved at se på sfæren fraregnet de puntker, der fikseres.

Sætning 9 (**Hausdorff Paradokset**) *Der findes en tællelig delmængde D af S^2 således, at $S^2 \setminus D$ er SO_3-paradoksal.*

Bevis. Lad F være den frie gruppe af orden to indeholdt i SO_3. Enhver rotation i F, der ikke er identiteten, fikserer to punkter på kuglen nemlig de to poler for rotationsaksen. Hvis vi lader D være mængden af alle sådanne poler, opnår vi en tællelig mængde, idet F er tællelig. Hvis $P \in S^2 \setminus D$ vil også $\rho(P) \in S^2 \setminus D$ for $\rho \in F$, fordi hvis σ fikserede $\rho(P)$ ville $\rho^{-1}\sigma\rho(P) = P$, og dermed $P \in D$ i modstrid med vores antagelse. Dermed virker F uden ikke-trivielle fikspunkter på $S^2 \setminus D$, og Sætning 3 giver os nu, at $S^2 \setminus D$ er paradoksal. □

Hausdorff Paradokset ser måske ved første øjekast mærkværdigt ud, men en tællelig delmængde kan jo rent faktisk være tæt, så derfor er det ikke helt så interessant (eller paradoksalt, om man vil) som selve Banach-Tarski Paradokset. Men stadig er det et meget vigtigt skridt på vores færd. Det viser sig nemlig, at man kan se bort fra denne tællelige delmængde D.

Lemma 10 *Lad D være en tællelig delmængde af S^2. Da er S^2 SO_3-ækvidekomposabel med $S^2 \setminus D$. Det følger dermed, at S^2 er SO_3-paradoksal.*

Bevis. Lad ℓ være en linie gennem origo, der ikke rammer D og lad ρ_θ betegne en rotation omkring ℓ med vinklen $\theta \in [0, 2\pi)$. For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in D$ definerer vi

$$A(n, x) = \{\theta \in [0, 2\pi) : \rho_\theta^n(x) \in D\}.$$

Bemærk at $A(n, x)$ er tællelig, da D er tællelig. Sætter vi nu A til at være foreningen af alle $A(n, x)$ for $x \in D$ og $n \in \mathbb{N}$, opnår vi en tællelig mængde. Der findes da en vinkel θ i $[0, 2\pi) \setminus A$ således at $\rho_\theta^n(D) \cap D = \emptyset$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og dermed også $\rho_\theta^n(D) \cap \rho_\theta^m(D) = \emptyset$ når $n \neq m$. Definerer vi dernæst $\overline{D}$ til at være

$$\overline{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho_\theta^n(D),$$

indser vi at $S^2 = (S^2 \setminus \overline{D}) \cup \overline{D} \sim_{SO_3} (S^2 \setminus \overline{D}) \cup \rho_\theta(\overline{D}) = S^2 \setminus D$ idet $\overline{D}$ var en disjunkt forening. Desuden benytter vi det faktum, at hvis $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ og $A_i \sim_G B_i$ gælder at $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$. Vi har nu pr. Hausdorff Paradokset, og Proposistion 8 at S^2 er SO_3-paradoksal. $\square$

Ovenstående bevisteknik kan kaldes for et absorptionsbevis, idet den tællelige delmængde D løst sagt absorberes ind i S^2 ved en form for Hilberts Hotel argumentation. Vi får brug for et lignende argument i beviset for næste sætning, som er: ♫ 'Fanfare!' ♫

Sætning 11 (Banach-Tarski Paradokset) *Enhver solid kugle i $\mathbb{R}^3$ er G_3-paradoksal.*

Bevis. Lad os til at begynde med betragte enhedskuglen B i $\mathbb{R}^3$. Dekompositionen af S^2 fra det foregående lemma giver en dekomposition af $B \setminus \{\mathbf{0}\}$ gennem korrespondencen

$$P \mapsto \{\alpha P : 0 < \alpha \leq 1\}$$

for $P \in S^2$. Som nævnt bruger vi absorptionsteknikken fra før til at vise at $B \sim_{G_3} B \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Lad $P = (0, 0, \frac{1}{2})$ og lad ℓ være en linie gennem P, der ikke rammer origo. Lad dernæst ρ være en rotation omkring ℓ med uendelig orden. Ligesom i det foregående lemma kan vi bruge mængden $\overline{D} = \bigcup\{\rho^n(\mathbf{0}) : n \in \mathbb{N}_0\}$ til at absorbere origo:

$$B = (B \setminus \overline{D}) \cup \overline{D} \sim_{G_3} (B \setminus \overline{D}) \cup \rho(\overline{D}) = B \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

På helt tilsvarende vis kan man benytte korrespondencen

$$P \mapsto \{\alpha P : 0 < \alpha \leq r\}$$

for en vilkårlig kugle $B(r)$ med centrum i origo og radius $r > 0$ til at vise, at $B(r)$ er paradoksal. Ydermere, da G_3 indeholder alle translationer, vil en vilkårlig kugle i $\mathbb{R}^3$ være G_3-paradoksal. $\square$

Af det ovenstående fremgår det altså, at Banach-Tarski Paradokset kan bevises helt uden brug af appelsiner.

Litteratur

[1] Wagon, S.: The Banach-Tarski Paradox. Cambridge University Press; 1985

For en god ordens skyld

Banach-Tarski paradokset — med appelsiner