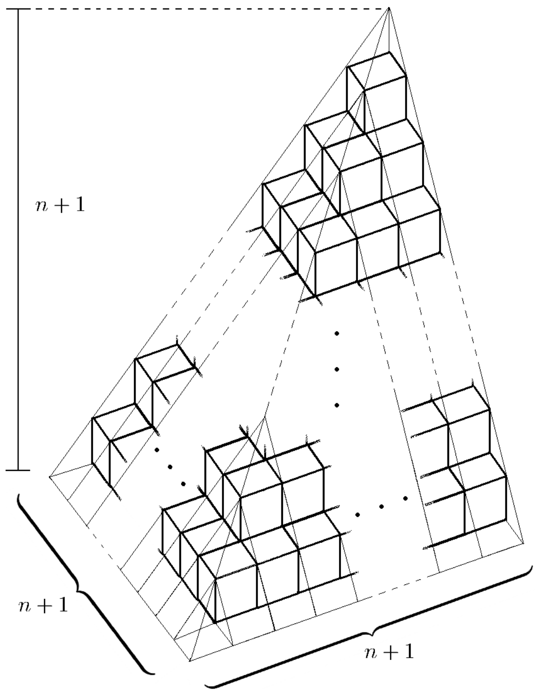
Blokkens kasser
– En formel, 50% kender

Kristian Peter Poulsen

50% af os kender formlen, der siger, at summen af de n første kvadrattal kan skrives som $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Det har jeg fundet et bevis for, som jeg ikke har set andre steder, men som måske er blevet lavet før.

Sætning 1

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n, \qquad n \in \mathbb{N}$$



Man skal vide, at rumfanget af en pyramide er en trediedel højde gange grundfladen, og at summen af de n første naturlige tal kan skrives $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$,[3] men så kører bussen også!

Bevis

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= Rumfang(\text{den store pyramide}) \\
&\quad -Rumfang(\text{de } n+1 \text{ små pyramider i hjørnet}) \\
&\quad -Rumfang(\text{prismerne som der er } 2i \text{ af på } i\text{'te niveau}) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)^3 - (n+1)\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \sum_{i=1}^{n} 2i\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}\left(n^3+3n^2+3n+1\right) - \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} - \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{1}{3}n^3 + n^2 + n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n
\end{aligned}$$

LR.

I øvrigt har jeg selv tegnet figuren i Paint.

[3] Se FAMØS marts 2012 s. 16, Blokkens blokke.