Præmieopgave

– Nu med endnu mere hjernegymnastik!

Bo 'Maling' Christensen og Jing 'le Bells'

I sidste nummer af Famøs gik præmieopgaven ud på at bestemme tværsummen af tværsummen af tværsummen af det enorme tal 5926^{5926}. Det rigtige svar var 4. Vi har trukket lod blandt de rigtige besvarelser, og vinderen af det unikke sommerkit blev **Dan Nielsen ('11)**! Tillykke, du vil modtage din præmie snarest.

Der gik imidlertid ikke mange brøkdele af en dag efter udgivelsen af bladet, førend **Sune Reeh ('05)** havde indleveret en korrekt, TeX'et besvarelse, og vi vil derfor gerne bringe hans besvarelse. Den kan ses herunder.

Løsning af præmieopgaven: Famøs årgang 22, nr. 1

Lad $T(n)$ betegne tværsummen af det naturlige tal $n \in \mathbb{N}$. Vi skal altså bestemme $T(T(T(5926^{5926})))$. Lad herefter $n := 5926$ være fast.

For det første har vi $n < 10^4$ der giver den oplagt elendige vurdering

$$n^n < (10^4)^{5926} < 10^{4 \cdot 6000} - 1 = 10^{24000} - 1.$$

Så n^n har højst 24000 cifre, hvorfra vi konkluderer

$$T(n^n) \leq 9 \cdot 24000 = 216000.$$

Dermed er $T(T(n^n)) \leq 2 + 5 \cdot 9 = 47$.

Hvis $40 \leq T(T(n^n)) \leq 47$, er $T(T(T(n^n))) \leq 4 + 7 = 11$; alternativt er $T(T(n^n)) \leq 39$ og $T(T(T(n^n))) \leq 3 + 9 = 12$. Samlet haves altså

$$T(T(T(n^n))) \leq 12.$$

Uafhængigt af ovenstående vurderinger vides at $T(n) \equiv n \pmod 9$ for alle $n \in \mathbb{Z}$.[1]

$$n = 5926 \equiv T(5926) = 22 \equiv T(22) = 4 \pmod 9.$$

Gentagen potensopløftning af 4 modulo 9 viser sig at give $4^0 \equiv 1$, $4^1 \equiv 4$, $4^2 = 16 \equiv 7$, $4^3 \equiv 4 \cdot 7 \equiv 1$. Da $4^3 \equiv 1$ gentages potenserne cyklisk med

$$4^k \equiv \begin{cases} 1 \pmod 9 & \text{hvis } k \equiv 0 \pmod 3, \\ 4 \pmod 9 & \text{hvis } k \equiv 1 \pmod 3, \\ 7 \pmod 9 & \text{hvis } k \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Da vi ved at $n \equiv 4 \pmod 9$, er $n \equiv 1 \pmod 3$, og derfor fås

$$T(T(T(n^n))) \equiv n^n \equiv 4^n \equiv 4 \pmod 9.$$

Det eneste naturlige tal der opfylder $T(T(T(n^n))) \leq 12$ og $T(T(T(n^n))) \equiv 4 \pmod 9$, er

$$T(T(T(n^n))) = 4.$$

Tak til Sune for den fine besvarelse!

[1] I det følgende antages fortrolighed med DIS-pensum.

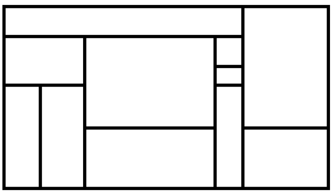
Blokkens præmieopgave

*På et dansk tastatur trykker en abe hver bogstavstast præcis én gang, i tilfældig rækkefølge. Hvad er sandsynligheden for, at ordet "*FAMØS*" dukker op?*

Der trækkes lod om en studiestarts-goodiebag blandt de korrekte svar! Fristen for at deltage i dysten om denne er den 24. september.

Blokkens opgave

Det oplyses om et rektangel partitioneret i flere små rektangler, at hvert af de små rektangler har mindst én side af heltallig længde. Har det store rektangel en side af heltallig længde? Hvorfor?[2]



[2]Bemærk at besvarelse af denne opgave *ikke* udløser nogen præmie. Til gengæld får de læsere, der indsender en fyldestgørende besvarelse, deres navne offentliggjort i næste FAMØS-blad i den rækkefølge vi modtager jeres svar! Den første af vores kære læsere, der korrekt besvarer fire på hinanden efterfølgende opgaver, kan vælge at få printet sit ansigt på forsiden af FAMØS.