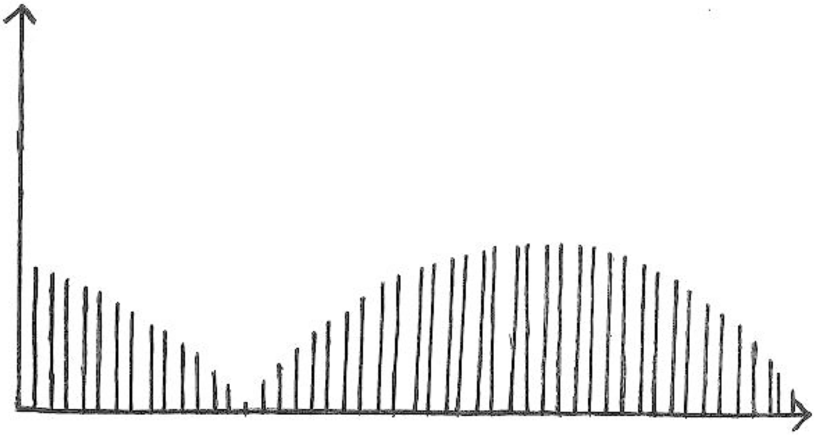
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
22. årgang, nr. 1, oktober 2012



Poisson fordelingen — bogstaveligt talt

Redaktion

⋆ Bo ‘Maling’ Malling Christensen,
⋆ Frederik Möllerström Lauridsen,
⋆ Jens Siegstad,
⋆ Jingyu She,
⋆ Kristian Knudsen Olesen,
⋆ Kristian Peter Poulsen,
⋆ Maria Bekker-Nielsen Dunbar,
⋆ Martin Patrick Speirs,
⋆ Søren Knudby,
⋆ Søren Wengel Mogensen

Indhold

Rustur, campusuge og frafald

Søren Wengel Mogensen

Den seneste tid har budt på studiestart, og først og fremmest skal der lyde et stort velkommen til de nye studerende. Det er ikke sikkert, at man, som ny studerende, har lagt mærke til det, men faktisk har velkomsten været anderledes i år end i de foregående år.

Man skal ikke trykke en ældre studerende meget på maven for at blive underholdt med historier, om hvordan det var engang. Nemlig dengang, hvor rusturen var noget af det første, der mødte de nye studerende, og så var den tilmed længere.

Fra fakultetets side har der tilsyneladende været et ønske om at omstrukturere, hvordan man byder de nye studerende velkommen. Det handler nemlig om at holde fast i de nye studerende. Hvordan man bedst gør det, er til debat - også i Famøs.

Når man spankulerer rundt i vandrehallen, kan man næsten ikke undgå at høre den utilfredshed, som der blandt ældre studerende lader til at være med den nye studiestart. Tidligere har rusturen været hovedkomponenten i studieintroduktionen, men nu har den såkaldte campusuge overtaget rusturens prominente plads.

I Universitetsavisen har temaet også været oppe at vende; og især for matematikstudiet, som traditionelt har været ramt af høje frafaldsprocenter, er det naturligvis aktuelt at se på, hvordan man tager imod de studerende.

I kommentarfeltet (under artikler vedrørende den nye studieintroduktion i den elektronisk udgave af Universitetsavisen) diskuteres der også på livet løs. Dér bliver tonen af og til om ikke skinger, så i hvert fald tæt på. Forståeligt nok er der mange rusvejledere, som mener, at der bliver pillet ved deres hjertebarn. Det sker endda, uden at de studerende føler sig inddraget i processen om den nye studieintroduktion. Det er en skam, for det er i sidste ende med rusvejlederne og deres engagement, at en hvilken som helst studieintroduktions succes står og falder.

Den nye studieintroduktion

Rusvejlederne (eller ambassadørerne, som det så flot hedder nu) har haft deres at se til med den nye studieintroduktion. Ifølge Kristian Peter Poulsen (rusvejleder i 2011 og 2012) har det været en hård uge, som også har været præget af flere 'læringsmål', som skulle opfyldes. Der er altså mere styring på, hvad der skal ske i studieintroduktionen og mindre tillid til rusvejlederne, er hans indtryk. Som noget nyt, har der været en koordinator med ansvar for studieintroduktionen, ansat af IMF, men ifølge Kristian Peter Poulsen har samarbejdet med hende været upåklageligt.

Efter Kristians bedste skøn har over 2/3 af de optagne i gennemsnit været til stede i løbet af campusugen. Campusugen har jo nemlig ikke den fordel, som en længere rustur havde, nemlig at man tager helt væk fra alt, hvad der er kendt, og vender tilbage som et rushold rystet sammen af fraværet af forstyrrende elementer. På den gode side af 2/3 er dog ikke helt skidt i den henseende, når man tænker på, at der her både er tale om dags- og aftenprogram.

Man kan sige meget både for og imod den nye og den gamle model, og ambassadørerne er splittede i spørgsmålet om, hvilken model for studieintroduktion er den bedste, fortæller Kristian, som dog også påpeger, at størstedelen af ambassadørflokken hælder til den gamle model.

Hvorfor vil I ikke bare blive og læse matematik?

Ifølge studieleder på IMF, Ernst Hansen, havde instituttet på et tidspunkt en formodning om, at det store frafald langt hen ad vejen kunne tilskrives det åbne optag på matematik. Der kom nemlig studerende ind, som langt fra havde haft matematik som første prioritet, og man kunne derfor formode, at nogle af dem måske ikke tog det hele så seriøst. Det viste sig dog, at mange af de frafaldne havde deltaget i rusturen, men forsvandt meget hurtigt efter, hvilket kunne ses på antal studerende, der afleverede obligatoriske opgaver i MatIntro. Det tydede jo et eller andet sted på, at studiet fik en chance, men at alt for mange blev skræmt væk - måske endda af studieintroduktionen.

På 2011-årgangen tog IMF derfor sagen i egen hånd og gennemførte telefoninterviews med alle russer, som ikke havde afleveret lynopgave 1 og 2 i MatIntro. Nu skulle man til bunds i, hvorfor matematik stødte for mange væk for hurtigt. Ifølge Ernst Hansen havde de fleste af de frafaldne studerende hovedsageligt positive kommentarerer omkring matematikstudiet. "Ud fra svarene at dømme ville jeg IKKE have troet, at der var tale om frafaldne studerende", som Ernst Hansen selv beskriver svarene på rundspørgen. Selvom det selvfølgelig altid er rart at få ros, så bragte det altså ikke IMF tættere på et svar på, hvorfor så mange dropper ud.

Dermed kom IMF heller ikke tættere på et svar på, hvordan den gamle studieintroduktionen påvirkede frafaldet. At den påvirker frafaldet virker dog sandsynligt. Det er det første, der møder de studerende, som skal finde sig til rette et helt nyt sted med ukendte mennesker. Tilmed må man også formode, at studieintroduktion på sin vis slår tonen an for det sociale samvær på studiet. Hvis man de første gange man mødes og er sammen, oplever en speciel stemning og en særlig måde at være sammen på, vil den stemning og måde at være sammen på sandsynligvis også være en rød tråd i det sociale miljø gennem meget af studietiden.

Når de studerende på matematik opponerer mod ændringer i studieintroduktionen, så kunne man jo, hvis man var kynisk nok, postulere, at netop de studerende, for hvem studieintroduktionen passede godt, stadig er på studiet, mens de, der måske havde den samme flair for matematik, men andre ønsker socialt, er væk. Det er en grov generalisering, men måske også noget at overveje, selvom det ikke er en konklusion, som kan drages på baggrund af IMF's undersøgelse. I det hele taget er det dog svært med den slags undersøgelser, for ofte ved den frafaldne studerende måske ikke engang selv helt hvorfor, matematikstudiet ikke var det helt rigtige.

Tørre tal

Årgang 2011 var velsignet med et ekstraordinært lavt tidligt frafald. Kun ca. 10% af de nye matematikstuderende afleverede ikke begge MatIntro-lynopgaver til tiden, og tallet var lavere på både aktuar og mat-øk. Man kan kun gisne om, hvad det skyldes, da tallet året før på matematik var omkring 1/3.

Både fortalere og kritikere af den nye studieintroduktion vil selvfølgelig gerne basere sine argumenter på tal og hårde fakta, som de ovenstående, men det kan være ekstremt svært at konkludere noget ud fra statistikker og evalueringer. Hvert år bliver der taget imod en ny årgang, som ændrer sig fra år til år pga. forhold, der hverken kan styres eller observeres. Hvordan påvirker konjunkturerne sammensætningen af den gruppe unge mennesker, som studiet modtager hvert år? Man kunne argumentere for, at krisen gør de studerende mere tilbøjelige til at blive ved læsepulten, da man ved, at kun en god, solid uddannelse (matematik, matematik-økonomi, forsikringsmatematik eller statistik!) kan sikre en et arbejde på sigt. Omvendt kunne man også argumentere for, at krisen får rigtig mange til at søge ind på universiteterne. Måske også nogle, der ikke er studieklar eller motiverede nok, og som derfor vil falde fra igen.

Et endegyldigt svar på alle spørgsmålene, der er ridset op i denne artikel, kommer vi nok ikke frem til, men jeg vil tillade mig at slutte med et håb om, at alle de nye studerende vil få nogle gode år på IMF. Diskussionen af studieintroduktionen stopper med sikkerhed ikke her, og Famøs byder selvfølgelig debatindlæg velkomne, så hvis man har en mening om emnet og lyst til at skrive lidt om den, så kontakt redaktionen.

Eneström-Kakeyas sætning

Jens Siegstad

I denne artikel skal vi studere, hvorledes nulpunkterne for et komplekst polynomium fordeler sig, hvis koefficienterne er reelle og opfylder visse betingelser. Sætningen er opkaldt efter den svenske matematiker Gustav Eneström (1852-1923) og den japanske matematiker Soichi Kakeya (1886-1947).

Sætning 1 ***(Eneström-Kakeya)***
Lad

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

være et polynomium af grad n med reelle koefficienter, der opfylder at $0 < a_0 \leq a_1 \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n$*. Da ligger alle nulpunkterne for p indenfor den lukkede enhedsdisk $\overline{D(0,1)}$ i $\mathbb{C}$.*

Bevis. Betragt polynomiet

$$\begin{aligned} q(z) &= (1-z)p(z) \\ &= (1-z)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right) \\ &= a_0 - a_n z^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k. \end{aligned}$$

Antag at z er et nulpunkt for p, og dermed også for q, hvor $|z| > 1$. Da har vi at

$$a_n z^{n+1} = a_0 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k.$$

Ved at benytte trekantsuligheden finder vi, at

$$\begin{aligned}
|a_n z^{n+1}| &= \left| a_0 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k \right| \\
&\leq a_0 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) |z^k| \\
&< a_0 |z^n| + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) |z^n| \\
&= |a_n z^n|,
\end{aligned}$$

hvilket er en modstrid, idet $a_n \neq 0$ og $|z| > 1$. Dermed ligger alle nulpunkterne for p indenfor $\overline{D(0,1)}$. □

Der findes også en anden variant af Eneström-Kakeyas Sætning:

Sætning 2 ***(Eneström-Kakeya)***
Lad

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

være et polynomium af grad n med reelle koefficienter, der opfylder at $a_0 \geq a_1 \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n > 0$. Da ligger alle nulpunkterne for p udenfor den åbne enhedsdisk $D(0,1)$ i $\mathbb{C}$.

Bevis. Overladt til læseren. □

Eneström-Kakeyas sætning kan generaliseres, og dette kan man læse mere om i [3].

Litteratur

[1] John M. Howie. *Complex Analysis. An Invitation.* World Scientific 1991.

[2] Morris Marden *Geometry of Polynomials.* 2nd Edition, American Mathematical Society, Providence, 1966.

[3] N. K. Govil and Q. I. Rahman *On the Eneström-Kakeya Theorem.* Tohoku Mathematical Journal, Vol. 20, 1968, pp. 126-136.

Sådan smager dit nærmiljø

– Vi afprøver diverse caféer og madsteder i nærheden af HCØ, så du tør tage chancen og prøve noget nyt

Rie Jensen og Katrine Gravesen

Så kom den igen, den kære Blok 1 med Kagesøster, diverse fredagsbarer, og hvad der ellers hører til. I denne udgave vil vi komme med et bud på, hvordan du kan gøre disse festlige fredage endnu mere fantastiske. Det er vigtigt at få lagt en god bund ud over kagen, inden det går løs med 100 minutter. Og tænker du, at lidt koffein i blodet gør dig mere frisk til bodytequila og piratosleg på Cafeen?, så kan du tage et smut forbi en af Tagensvejs nye caféer.

Gastronetten Smørrebrød, ★★★★☆☆

Fredag rimer på luksus, og luksus rimer på smørrebrød. Kantinen har ikke noget, dit pålægslager i S01 er tomt, og du har ikke tid (og overskud!) til at stå i kø i Netto efter mad. Så slå et smut forbi Hr. Suhrs *Gastronetten Smørrebrød* på Jagtvej 101. Her kan du få madder i alle størrelser. Der er håndmadder, som vi kender dem bestående af en halv skive rugbrød med pålæg (11 kr.), højtbelagt smørrebrød, som er "Håndmadder De Luxe"(25-35 kr.), og kæmpe sandwich (30 kr.). Fyldet varierer fra skinkesalat, spegepølse og stegte sild til rejer og æg, røget ål, rødspætter og roastbeaf. Hvis ikke lige du kan spotte din yndlingsmad i vinduet, smører hr. Suhrs mormor den gerne på ingen tid. Det samme gjaldt den sandwich med kylling og bacon, som vi bestilte. På trods af gode mængder karrydressing, var brødet dejlig sprødt og lækkert (godt gået mormor). Vi fik også to håndmadder. En med kartoffel, majo og purløg og en med frikadelle og remo. Begge håndmadder var ganske fornuftige. De smagte fint, men uden at være de store gastronomiske finurligheder. Vi tog madderne med os, da der ikke er plads til at sidde ned. *Gastronetten* lukker kl. 14, men du skal jo alligevel nå Kagesøster, så det er ikke noget problem.

Café Wood, ★★★☆☆☆

På *Café Wood* Tagensvej 51-53 er der, som navnet antyder, meget træ. Vægge og sofaer er dækket med træ, hvilket skaber en hyggelig stemning i rummet, selvom noget af caféen stadig er under ombygning. De to fyre bag baren er ikke så effektive, men derimod virkelig venlige. Som på alle andre caféer, kan man få diverse kaffe og te. Der er også kage. Spørger man, hvilke slags kager de kan friste med, er svaret "hjemmelavet"(nok af mor), og dette er klart et plus. Caféen har også en studierabat på 10%, som er ligeså hjemmelavet som kagerne. Et godt råd er derfor at lægge matematikken på hylden og finde smilene frem - det betaler sig. Vi endte med at få en stor latte og to stykker æblekage med creme fraiche (45 kr.), samt en iskaffe med gulerodskage (50 kr.). Da vi havde drukket ud, blev vi tilbudt en skål blandede nødder på husets regning (normalpris 25 kr.). Der er også mulighed for at købe vandpiber til 75 kr., med eksempelvis drue- eller vandmelontobak. Man kan godt mærke, at stedet er nyåbnet, men det har potentiale til at blive et ganske hyggeligt og (nogle dage) billigt sted.

For overblikkets skyld har vi skitseret en tidsplan for dine kommende fredage: Fri kl.12.02. Afgang med cykel fra HCØ kl.12.07. Ankomst til *Gastronetten* kl. 12.13. Valgt smørrebrød kl.12.18. Vink farvel til hr. Suhrs mormor kl.12.19. Ølpitstop i Netto kl. 12.22. Ankomst HCØ kl. 12.51. Konsumér smørrebrød kl.12.52. Deltag i Kagesøster kl.13.00. Afgang mod *Café Wood* kl. 15.27. Kaffe/kage/vandpibe kl. 15.40. Studierabat bestemmes kl. 16.27? (dette kan måske tage lidt tid) og herefter går turen mod Caféen?, hvor det kun kan gå galt! Ses vi?

Summation af kubiktal

Sune Precht Reeh

I sidste nummer af FAMØS, i *"Blokkens blokke"*, så vi et kort og elegant geometrisk argument for den velkendte sumformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Vi springer i denne omgang kvadrattallene over[1] og summerer så kubiktal i stedet. Da fås endnu en velkendt sumformel, der sædvanligvis vises ved induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{2}$$

Som den opmærksomme læser måske hér har bemærket, gælder $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; og vi får således den overraskende sammenhæng

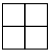
$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3. \tag{$*$}$$

Man kan nu spørge sig selv, om der findes et elegant bevis for ($*$), der ikke går via (1) og (2) – til illustration af at ($*$) ikke blot er en aritmetisk tilfældighed.

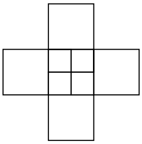
Svaret er naturligvis ja, og i det følgende beskrives et kombinatorisk/geometrisk argument, som undertegnede stødte på et par år tilbage og nu ønsker at delagtiggøre FAMØS' læsere i.

Start med 4 enhedskvadrater placeret i et 2×2-kvadrat (figur 1). Langs hver side af figur 1 placeres nu et 2×2-kvadrat (figur 2′),

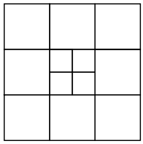
[1] Se dog referencen sidst i artiklen.



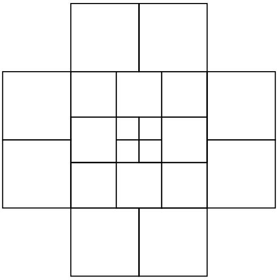
Figur 1



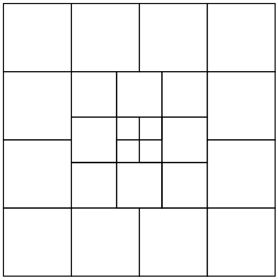
Figur 2'



Figur 2



Figur 3'



Figur 3

hvorefter hjørnekvadrater tilføjes (figur 2). Generelt laves figur k ud fra figur $k-1$ som følger:[2]

De fire ydre sider af figur $k-1$ består af $(k-1)\times(k-1)$-kvadrater med k af disse kvadrater langs hver side. Uden på figur $k-1$ kan derfor placeres $k-1$ stk. $k\times k$-kvadrater langs hver af de fire sider (figur k'). Der er således tilføjet $4(k-1)$ stk. $k\times k$-kvadrater. Hjørnerne udfyldes (figur k), hvilket kræver 4 yderligere kvadrater – så der bliver $k+1$ kvadrater langs hver af figur k's ydre sider.

Fra figur $k-1$ til figur k bliver der derfor i alt tilføjet $4k$ stk. $k\times k$-kvadrater, så de danner en kreds rundt om figur $k-1$.

[2] Det overlades så som en øvelse til læseren selv at tegne figurerne n' og n for alle $n>3$.

For at nå frem til ($*$), udregner vi nu arealet af figur n på to forskellige måder. Figur n er et stort kvadrat bygget op af en masse mindre kvadrater – specifikt ses af konstruktionen, at figur n består af $4k$ stk. $k \times k$-kvadrater for $1 \leq k \leq n$. Arealet af figur n er derfor

$$\text{areal}(\text{figur } n) = \sum_{k=1}^{n} (4k) \cdot k^2 = 4 \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Alternativt kan vi se på afstanden fra centrum af figur n og ud til en af figurens sider. Indefra og ud passeres først et lag af 1×1-kvadrater, derefter et lag af 2×2-kvadrater, 3×3-kvadrater, og så videre ud til det yderste lag af $n \times n$-kvadrater. Afstanden fra centrum og ud til figurens ydersider er derfor lig med $\sum_{k=1}^{n} k$; og sidelængden af figur n bliver det dobbelte. Arealet af det store kvadrat i figur n kan derfor også beregnes til

$$\text{areal}(\text{figur } n) = \left(2 \sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = 4 \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Sammenholder vi de to udtryk for arealet af figur n,

$$4 \sum_{k=1}^{n} k^3 = 4 \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2,$$

følger ($*$) øjeblikkeligt.[3]

[3] Formlen (1) fremgår også af figur n, hvordan?

Skulle du have lyst til at læse endnu et bevis for ($*$), er jeg undervejs i arbejdet med denne artikel stødt på [1], hvor ($*$) vises ved at tælle rektangler i et $n \times n$-gitter. I artiklen giver forfatterne desuden et kombinatorisk bevis for

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Litteratur

[1] A.T. Benjamin, J.J. Quinn and C. Wurtz: "Summing Cubes by Counting Rectangles". *The College Mathematics Journal*, Harvey Mudd College, (November 2006). http://www.math.hmc.edu/~benjamin/papers/rectangles.pdf.

— Det kendte "tidligere" køkkenparadoks —

Præmieopgave

– og svar på sidste bloks abestreger!

Jingyu She

Svar på blokkens præmieopgave (21. årgang nr. 4)

I sidste præmieopgave blev læseren bedt om at finde sandsynligheden for, at en abe, der trykkede hvert bogstav på et dansk tastatur præcis én gang og i tilfældig rækkefølge, på et tidspunkt ville skrive ordet FAMØS. Det rigtige svar[4] var $\frac{25!}{29!}$.

Blokkens præmieopgave (22. årgang nr. 1)

På en pind afmærkes to tilfældige punkter uafhængigt af hinanden, hvorefter pinden saves over på afmærkningerne. Hvad er sandsynligheden for, at de tre stykker kan samles til en trekant?[5]

Blokkens ekstraopgave (22. årgang nr. 1)

En anden pind oversaves på et tilfældigt sted. Det længste stykke oversaves endnu en gang tilfældigt. Hvad er sandsynligheden for, at de tre stykker kan samles til en trekant?[6]

---

[4] Beviset for dette overlades som en let opgave til læseren. Blandt de rigtige besvarelser blev Sune('05) den heldige vinder af studiestartspakken, som er en godtepose af hjernevridere fra *Games*! Tillykke, du vil modtage din præmie snarest.

[5] Svaret bedes indsendt til famos@math.ku.dk inden 30. november. Blandt de korrekte svar, trækkes der lod om et gavekort på 100 kr. til *Games* i Jorcks Passage, så man kan forlyste sig med endnu flere hjernevridere, inden næste FAMØS udkommer.

[6] Bemærk, at besvarelse af denne opgave ikke udløser nogen præmie. Til gengæld får de læsere, der indsender en fyldestgørende besvarelse, deres navne

Svar på sidste bloks ekstraopgave

I sidste bloks ekstraopgave blev læseren bedt om at afgøre, om et rektangel partitioneret i små rektangler, hver med enten heltallig længde eller bredde, selv havde heltallig længde eller bredde. Svaret på dette er **ja**, og Sune ('05), hvis mængde af FAMØS-opgaver uden en færdig-TeX'et besvarelse endnu har mål 0, indsendte følgende fine bevis baseret på grafteori:[7]

Først placerer vi det store rektangel i 1. kvadrant af $\mathbb{R}^2$, sådan at det ene hjørne bliver placeret i $(0, 0)$; de resterende hjørner er $(b, 0)$, $(0, h)$ og (b, h), hvor b, h er hhv. det store rektangels bredde og højde. Siderne i alle de små rektangler vil desuden nu være vandrette og lodrette. Vi danner en graf G ud fra det inddelte rektangel på følgende måde:

Knuderne i G er alle de punkter, som er hjørner i mindst ét af de små rektangler – selvom et hjørne indgår i mere end ét af de små rektangler, giver det kun anledning til en enkelt knude i grafen.

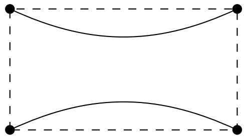
For hvert af de små rektangler ved vi fra opgaven, at den vandrette eller lodrette sidelængde er heltallig, og vi forbinder så hjørnerne herefter:

Hvis den vandrette sidelængde er heltallig, forbinder vi de øvre hjørner med hinanden, og vi forbinder de nedre hjørner med hinanden (figur 1(a)). Hvis den vandrette sidelængde *ikke* er heltallig, vil den lodrette sidelængde nødvendigvis være heltallig, og vi forbinder de venstre hjørner med hinanden og de højre hjørner

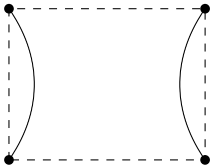
offentliggjort i næste FAMØS-blad, i den rækkefølge vi modtager jeres svar! Den første af vores kære læsere, der korrekt besvarer fire på hinanden efterfølgende opgaver, kan vælge at få printet sit ansigt på forsiden af FAMØS. Indtil videre fører Sune ('05) med en korrekt besvarelse af sidste bloks ekstraopgave.

[7]For alternative beviser se "Proofs from the Book" af Aigner og Ziegler.

med hinanden (figur 1(b)). Bemærk, at hvis både de vandrette og lodrette sidelængder er heltallige, falder rektanglet ind under det første tilfælde (og ikke det andet).



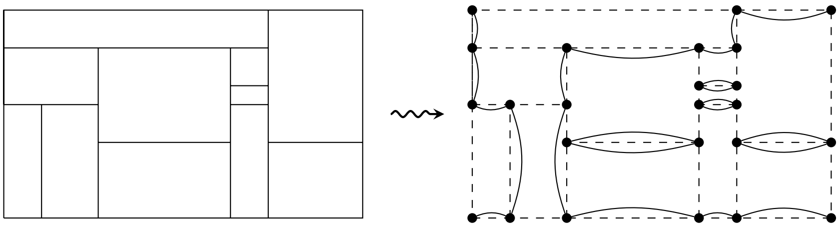
(a) Et lille rektangel med heltallig vandret sidelængde.



(b) Et lille rektangel med *ikke-heltallig* vandret sidelængde.

Figur 1

Hvis vi starter med et rektangel, der er inddelt som i opgavens illustration, kan grafen G eksempelvis ende med at se ud som figur 2. Det stiplede omrids af den oprindelige figur er udelukkende til visuel hjælp og er *ikke* en del af grafen G.



Figur 2

Den resulterende graf G har følgende vigtige egenskab: Hvis

u og v er to knuder, der er kantforbundet, vil u og v være nabohjørner i et lille rektangel, og rektanglets side mellem u og v vil have heltallig længde. Der gælder i så fald at u har heltallige koordinater i $\mathbb{R}^2$, hvis og kun hvis v har heltallige koordinater.

Dette generaliserer til vilkårlige stier i G: Hvis to knuder u og v er forbundet med en sti i G, gælder at

$$u \text{ har heltallige koordinater} \Leftrightarrow v \text{ har heltallige koordinater.}$$

Specielt gælder at enhver knude, der er forbundet i G til hjørnet $(0,0)$, vil have heltallige koordinater.

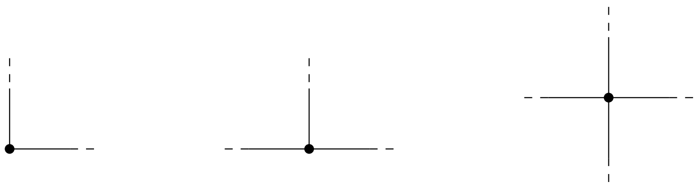
Uanset om et lille rektangel falder under tilfælde 1(a) eller 1(b), vil det give én kant i G til hvert af det lille rektangels fire hjørner. Valensen[8] af en knude i G er altså lig antallet af små rektangler, som knuden er hjørne i.

Heraf følger at der er tre mulige knudevalenser for en knude i G: Yderhjørnerne i det store rektangel indgår i netop ét lille rektangel hver (figur 3(a)); yderknuderne $(0,0)$, $(b,0)$, $(0,h)$ og (b,h) har derfor valens 1 i G.
Enhver anden knude i G vil være hjørne i enten 2 små rektangler (figur 3(b)) eller 4 små rektangler (figur 3(c)), hvorved valensen af knuden er hhv. 2 eller 4.

Vi foretager nu en vandring i grafen G, hvor vi starter i knuden $(0,0)$ og vandrer uden at gentage kanter. Da $(0,0)$ har valens 1, kommer vi aldrig tilbage til $(0,0)$ igen. Vi bliver ved med at vandre, indtil vi ikke kan komme videre – dvs. indtil vi når en knude, hvorfra der ikke går nogen kant, som ikke allerede er benyttet i vores vandring.

Hver gang, vores vandring passerer en knude, bruges samlet 2 kanter – en ind-kant og en ud-kant. Når vi på vores vandring

[8] Antallet af kanter, der udgår fra en knude (red.)



(a) Yderhjørne i det store rektangel.

(b) Fælles hjørne for to små rektangler – enten langs siden af et tredje rektangel, eller langs ydersiden af det store rektangel.

(c) Fælles hjørne for fire små rektangler – i det indre af det store rektangel.

Figur 3

ankommer til en knude, vil antallet af brugte kanter ved knuden derfor være ulige, såfremt vi medregner den kant, vi lige er ankommet af. Hvis knuden har lige valens, vil der nødvendigvis være en ubrugt kant, og vi kan fortsætte vores vandring. Vandringen kan altså kun slutte ved en knude af ulige valens; og da G kun har endeligt mange kanter, *vil* vandringen slutte.

De eneste knuder i G med ulige valens er hjørnerne $(0,0)$, $(b,0)$, $(0,h)$ og (b,h), der har valens 1. Alle andre knuder har valens 2 eller 4 (jf. figur 3). Da vi starter i $(0,0)$, må vi slutte i et af de andre yderhjørner af det store rektangel, $(b,0)$, $(0,h)$ eller (b,h). Det pågældende slutpunkt for vandringen er dermed forbundet i G til $(0,0)$, og som tidligere bemærket må slutpunktet derfor have heltallige koordinater. Det følger nu, som ønsket, at enten det store rektangels bredde b, højde h eller begge er heltal.

En differentiabel funktion hvis afledte ikke er kontinuert

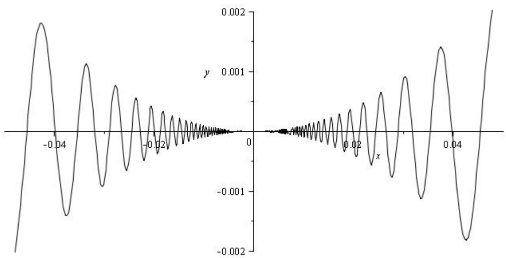
Søren Knudby

Det er velkendt for de fleste, at differentiabilitet af en reel funktion f medfører kontinuitet af f, mens det modsatte ikke gælder generelt. Men hvad kan man sige om den afledte af en differentiabel funktion? Det er nemt at se, at man ikke nødvendigvis kan konkludere differentiabilitet af f': find et eksempel på en kontinuert funktion g, som ikke er differentiabel. Hvis f er en stamfunktion til g (en sådan findes, fordi g er kontinuert), så er f differentiabel, og den afledte $f' = g$ ikke er differentiabel. Den afledte er dog stadig kontinuert. Vi skal nu se et eksempel, hvor dette ikke er tilfældet. Vi skal altså finde en differentiabel funktion, hvis afledte ikke er kontinuert.

Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

På Figur 1 vises grafen for f i en omegn af $x = 0$.



Figur 1: Grafen for f.

Det er oplagt, at f er differentiabel i intervallerne $]-\infty, 0[$ og $]0, \infty[$ med en differentialkvotient givet ved

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Lad os undersøge, om f er differentiabel i $x = 0$. Vi opskriver derfor differenskvotienten

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right), \tag{1}$$

hvor h er et (lille) tal forskelligt fra 0. Eftersom $|\sin(t)| \leq 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$, ser man, at udtrykket i (1) går mod 0, når h går mod 0. Altså er f differentiabel i $x = 0$, med $f'(0) = 0$.

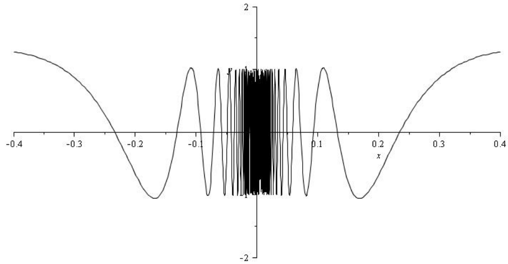
Tilbage står at vise, at f' ikke er kontinuert, og det er selvfølgelig i punktet $x = 0$, at det går galt med kontinuiteten. Udtrykket

$$2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2}$$

har nemlig ingen grænseværdi, når x nærmer sig 0.

Lad os præcisere argumentet: Første led i (2) nærmer sig 0 ud fra samme argumentation som ovenfor. Men ligegyldigt hvor lille vi vælger $\epsilon > 0$, vil der i intervallet $]0, \epsilon[$ være uendeligt mange tal af formen $\frac{1}{n\pi}$, hvor $n \in \mathbb{N}$. Derfor vil $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ antage værdierne -1 og 1 vilkårligt tæt på 0, og udtrykket i (2) kan derfor ikke nærme sig en grænse, når $x \to 0$. Derfor er f' diskontinuert i $x = 0$. En illustration af f' ses på Figur 2.

I eksemplet ovenfor, så vi, at funktionen f' ikke var kontinuert, fordi den opførte sig ganske vildt i nærheden af diskontinuitetspunktet $x = 0$. Man kan spørge sig selv, om det altid vil være tilfældet, eller om man kan finde eksempler, hvor den afledte blot



Figur 2: Grafen for f'.

har et spring. Svaret på dette spørgsmål er, at diskontinuitetspunkter for den afledte altid vil være vilde, i den forstand at $f'(x)$ ikke har nogen grænseværdi, når x nærmer sig det kritiske punkt. Mere formelt gælder følgende sætning:

Sætning 1 *Lad* $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *være en differentiabel funktion, og lad* $x_0 \in]a,b[$. *Hvis grænseværdien*

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

eksisterer, er den nødvendigvis lig $f'(x_0)$.

Beviset for Sætning 1 er en anvendelse af middelværdisætningen, som vi for god ordens skyld repeterer (uden bevis):

Sætning 2 (Middelværdisætningen) *Lad* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *være en kontinuert funktion, som er differentiabel i alle indre punkter* $x \in]a,b[$. *Da findes et punkt* $c \in]a,b[$, *så*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bevis for Sætning 1. For hvert $n \in \mathbb{N}$ stort nok til at $x_0 + \frac{1}{n} < b$, kan vi ifølge middelværdisætningen finde et c_n, så $x_0 < c_n < x_0 + \frac{1}{n}$, samt

$$f'(c_n) = \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Bemærk, at følgen (c_n) nærmer sig x_0 fra højre, når $n \to \infty$ (overvej), så antagelsen, om at $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ eksisterer, får os til at konkludere, at

$$\lim_{n \to \infty} f'(c_n) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x). \tag{4}$$

Højresiden i (3) genkendes som en differenskvotient for f i punktet x_0, med $\Delta x = \frac{1}{n}$. Derfor vil højresiden i (3) konvergere mod $f'(x_0)$, når $n \to \infty$, og følgelig må venstresiden i (3) konvergere mod det samme, altså

$$\lim_{n \to \infty} f'(c_n) = f'(x_0). \tag{5}$$

Sammenholdes (5) med (4), når vi konklusionen

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'(x_0).$$

$\square$

Indholdet af Sætning 1 er, at man kun kan finde eksempler på differentiable funktioner, hvor et diskontinuitetspunkt for f' er vildt.

Bemærkning 3 Beviset for Sætning 1 kan uden videre overføres til at vise den tilsvarende sætning, hvor vi antager, at

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

eksisterer.

Korollar 4 *Lad $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ være en funktion, lad $x_0 \in]a,b[$ være givet, og antag at f er differentiabel i alle punkter i intervallet $]a,b[$ måske med undtagelse af punktet x_0. Hvis grænseværdierne*

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \quad \textit{og} \quad \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

findes, men er forskellige, er f ikke differentiabel i punktet x_0.

Bevis. Hvis f var differentiabel i punktet x_0, ville

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

ifølge Sætning 1 og Bemærkning 3. □

Vores eksempel fra tidligere på en differentiabel funktion, hvis afledte ikke var kontinuert, havde kun et enkelt diskontinuitetspunkt. Man kan spørge sig selv, om det er muligt at finde en differentiabel funktion uden et eneste kontinuitetspunkt. Dette er ikke muligt. Faktisk vil mængden af kontinuitetspunkter for den afledte ligge tæt i $\mathbb{R}$. Det vil dog gå for vidt at bevise den påstand her. Resultatet hører hjemme i den deskriptive mængdelære.

Meld dig til FAMØS-redaktionen

– Vi mangler DIG!

FAMØS-*redaktionen*

- Er du god med ord?
- Interesserer du dig for matematik *lidt* mere end din sidemand?
- Kan du godt lide at fordybe og formidle?
- Kan du godt lide kage?

Så hører du til hos redaktionen på Famøs!
Skriv til famos@math.ku.dk for mere information.

Additivitet af determinanten
– En kort historie om matematisk nysgerrighed

Rasmus Sylvester Bryder

Vi kender (snart) alle til determinantens belejlige multiplikativitet, dvs. at vi, for vilkårlige komplekse kvadratiske matricer A og B, har at

$$\det AB = \det A \det B.$$

Man kunne så dertil spørge sig selv, om den også er additiv (dvs. gælder $\det(A + B) = \det A + \det B$?), men man finder hurtigt ud af, at dette ikke gælder i almindelighed; tag for eksempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Her har vi altså forfattet et modeksempel til førnævnte formodning. Da jeg for første gang grublede over sandhedsværdien af formodningen, var min intuition naturligvis, at den var falsk, og modeksemplet kom til mig hurtigt derefter. I forlængelse af formodningen kom jeg så på spørgsmålet, om der fandtes en klasse af matricer, som gjorde determinanten additiv – kunne der eksistere et underrum af vektorrummet $\mathbb{M}_n$ af komplekse $n \times n$-matricer, hvor determinanten havde denne egenskab? Og svaret var ja; hvis man eksempelvis i $\mathbb{M}_2$ betragtede underrummet udspændt af A ovenfor, måtte determinanten, ganske vist triviel på underrummet, besidde additivitet. Spændende eller ej, var det i det mindste et eksempel.

Ikke desto mindre var jeg ikke helt tilfreds. Mit første indtryk var, at skulle man kunne bruge konceptet til noget, måtte det da skulle være på en delklasse af matricer (eftersom det ikke kunne være på hele $\mathbb{M}_n$), som var maksimal med denne egenskab. Determinantfunktionen ville dermed være lineær på denne klasse, og det *kunne* lede til mangen skønhed og Lebensfreude. For $n = 1$ gjaldt det selvfølgelig overalt, men for $n \geq 2$ var det svært at finde en måde bare at *formulere* formodningen på. Af mangel på god notation og formuleringsevne, gav jeg lidt op; det syntes mig i det øjeblik uoverskueligt. Hvad var jeg overhovedet i stand til at få ud af denne i første omgang finurlige idé om determinanten? Lad mig for Guds skyld pointere, at dette ikke er en opfordring til bare at give op på stedet – der findes selvfølgelig en måde at formulere det på, men nogle gange kan hjernen ikke kapere det, og det må man til tider bare acceptere. Det var, hvad jeg gjorde.

Det var så her, at ærgelsen slog ind. Hvad kunne jeg overhovedet overskue at formulere; og var jeg god nok til at vise det? Jeg var lidt for tændt på min grundidé til bare at lade den være, men mine mangler havde slået mig lidt ud. Hvis jeg skulle have et resultat, var jeg nødt til at sigte lavere. Det medførte nok en mindre grad af tilfredsstillelse, men som det var, så jeg ikke andre muligheder. Jeg spejdede kort tid efter en ny måde at blive i boldgaden på, og det slog mig: hvad hvis jeg nu prøvede at finde en $n \times n$-matrix A, således at

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

for *alle* komplekse $n \times n$-matricer X? Jovist, problemet var af en helt anden karakter, på ingen måde lige så, omfangsrigt som hvad jeg tidligere havde tænkt på, men her var der endelig noget konkret og mere formulerbart at kaste sig over. Jackpot. Mit første indfald var, at $A = 0$ selvfølgelig løste problemet, og her kom gennembruddet: kunne der være andre matricer, der opførte sig så pænt? Min intuition sagde nej, men jeg havde aldrig set det bevist andetsteds. Efter lidt relevant Googleri, kom jeg (så vidt jeg erindrer) heller ikke frem til noget bevis for det, men jeg kunne ikke bare lade det ligge. Det krævede et bevis – det skyldte jeg min nysgerrighed – og jeg måtte selv stå for det. Det krævede lidt mere hittepåsomhed, end først antaget, men det lykkedes faktisk, og her følger, hvordan jeg kom frem til, at det faktisk kun var nulmatricen, der opfyldte det:

Af notationsmæssige hensyn definerer vi

$$\mathbf{A}_n = \{A \in \mathbb{M}_n \mid \forall X \in \mathbb{M}_n \colon\ \det(A+X) = \det A + \det X\}.$$

Vi har allerede set, at $0 \in \mathbf{A}_n$. Det er nemt at vise, at $\mathbf{A}_n$ udgør et underrum i $\mathbb{M}_n$ (prøv selv!), men det kommer os ikke til nogen gavn i det følgende.

Det indses næsten uvirkeligt hurtigt, at $\mathbf{A}_1 = \mathbb{C}$. Lad derpå n være et naturligt tal større end 1. For enhver kompleks $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ og $1 \le i, j \le n$ definerer vi $A_{ij} \in \mathbb{M}_n$ ved følgende betingelser:

(1) Indgangene i i'te række skal være som i A.
(2) Fjernes i'te række og j'te søjle, fås enhedsmatricen i $\mathbb{M}_{n-1}$.
(3) De resterende indgange i j'te søjle er 0.

Ved udvikling efter j'te søjle fås da, at $\det A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$, samt $\det(A_{ij} - A) = 0$, idet matricen $A_{ij} - A$ indeholder en nulrække.

Lemma 1 *Hvis $A \in \mathbf{A}_n$, $n \ge 2$, vil $\det A = 0$.*

Bevis. Idet $2^n \det A = \det 2A = \det A + \det A = 2 \det A$, følger det ønskede. □

Sætning 2 *Lad $n \ge 2$ være et naturligt tal. Hvis $A \in \mathbb{M}_n$ opfylder*

$$\det(A+X) = \det A + \det X$$

for alle $X \in \mathbb{M}_n$*, vil* $A = 0$*, dvs.* $\mathbf{A}_n = \{0\}$*.*

Bevis. For $1 \leq i, j \leq n$ vil

$$\begin{aligned}(-1)^{i+j} a_{ij} &= \det A_{ij} \\ &= \det(A + (A_{ij} - A)) \\ &= \det A + \det(A_{ij} - A) \\ &= 0,\end{aligned}$$

jf. Lemma 1 og de tidligere observationer. Da er alle indgange lig 0, hvormed det ønskede følger. □

Således skete det: jeg stod endelig med noget utrivielt, der kom af en ret så simpel idé om et velkendt begreb. Ja, det kunne være mere interessant, og selve resultatet er nok ret så ubetydeligt i forhold til, hvad man ellers kan finde på i matrixregning (af gode eksempler kan nævnes Cayley-Hamiltons sætning), og hvad jeg ellers kunne have fundet på. I det mindste var jeg heldig; at man overhovedet får noget nyt og "spændende" ud af tænkeriet, er ikke en selvfølge. Nogle gange føler man sig bare magtesløs, ikke bare over for matematikken, men over for ytringen, overblikket og tænkeriet, i hvilket tilfælde man er nødt til at træde et skridt tilbage, få vejret igen og fatte roen. Det er menneskeligt at lade sig afskrække.

Kalaha

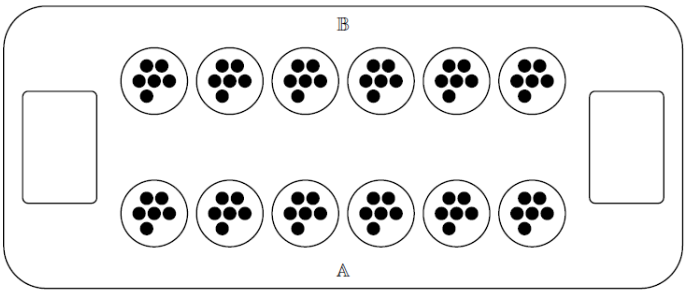
– Nu med endnu flere kugler og huller

Bo 'Maling' Christensen

I april sidste år blev Kalaha løst af en dansker.
Et spil kaldes *løst*, hvis man kan forudsige, hvem der vinder. Der er selvsagt nogle begrænsninger på hvilke slags spil, der er mulige at løse, og dette udelukker blandt andet spil med tilfældige elementer[9], spil, der ikke nødvendigvis slutter[10] eller spil, der skjuler noget af informationen for modstanderen[11].

Standardtypen af spil, man plejer at analysere, er også begrænset til to spillere, der skiftes til at tage tur, men dette er ikke en nødvendig betingelse. Specielt er det ikke en, der er opfyldt i Kalaha.

I mit research for denne artikel, indså jeg, at der er adskillige forskellige udgaver af Kalaha, hvorfor jeg vil starte ud med kort at gennemgå reglerne.



[9] Så som terningen i Ludo.
[10] Så som Kryds-og-Bolle, med konventionen om kun at bruge 3 brikker hver.
[11] Så som placeringen af brikkerne i Stratego.

Spillet starter ud som på ovenstående figur. Spiller A starter med at tage kuglerne fra en af sine seks huller op i sin hånd. Derefter kører han hånden i positiv omløbsretning og lægger én kugle i hvert hul, han når til, bortset fra i hullet til venstre på figuren[12]. Når han lægger den sidste kugle, er der tre mulighede:

1. Kuglen ender i hullet til højre på figuren. Dette er A's pointhul. A får lov til at få en tur til.

2. Den sidste kugle lander i et hul på A's side, som er tomt. Han må da tage den sidste kugle op igen, samt alle kugler fra B's hul overfor, og lægge dem alle i sit eget pointhul. A's tur slutter herefter.

3. Ellers[13] er A's tur slut.

Vinderen er den spiller, som ender med flest af kuglerne i sit pointhul - man vinder ved 37 eller derover. Hvis begge har 36, kugler erklæres spillet som værende endt uafgjort.

I kampen om at få løst Kalaha har man set på simplificeringer af spillet, herunder både hvor antallet af huller på hver side er mindre end 6, men også hvor antallet af kugler i hvert hul er mindre end 6. Mange af disse kombinationer blev i 2000 løst af Geoffrey Irving, Jeroen Donkers og Jos Uiterwijk, og kan ses i tabellen herunder. Der manglede dog stadig den vigtigste af dem alle.

[12] B's pointhul.

[13] A ender i et hul på A's side, hvor der i forvejen er kugler ELLER A ender i et hul på modstanderens side af brættet.

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	6
1	-	B	A	B	A	-
2	A	B	B	B	A	A
3	-	A	A	A	A	B
4	A	A	A	A	A	-
5	-	-	A	A	A	A
6	A	A	A	A	A	?

I ovenstående er x antallet af kugler per hul, og y er antallet af huller på hver side. Som det kan ses, er der både tilfælde, hvor spillet ender uafgjort (repræsenteret ved en streg), og tilfælde hvor henholdsvis A og B vinder. Prøv, som en let øvelse, selv at komme frem til nogle af de simpleste situationer herover. De mere komplicerede tilfælde kræver en computer til at gennemgå spiltræet med alle muligheder.

I efteråret 2011 blev det så en kandidatstuderende på Syddansk Universitet, ved navn Anders Carstensen, der fik løst kombinationen med 6 huller og 6 kugler i hver. Det viste sig, at det også her var A, der kunne sikre sig en sejr. Hvordan, man sikrer sig en sejr, ville ødelægge spillet for rigtig mange, så det vil vi ikke nævne her, men man er velkommen til at prøve lykken med følgende browser-udgave af spillet, som er udviklet baseret på ovenstående regler og med den vindende algoritme i tankerne: http://kalaha.krus.dk/play/

En mere populær variation af reglerne er, at når man slutter i et felt med brikker, så tager man den nye bunke og fortsætter vejen rundt. Dette giver dog A en endnu større fordel, og det bliver faktisk muligt for A at vinde, helt uden B får en tur.

Induktion for dummies

– Til dig, der undrer dig over, hvorfor induktion virker

Kristian Peter Poulsen

Før du gør noget, skal du lige se filmen *Caféen? Domino*, der er lavet af *Matematikrevyen*. Filmen kan let findes på Youtube, ellers er den at finde her:

math.ku.dk/famos/domino

Nu er vi parate til at forklare, hvad induktion er, og hvorfor det virker. Til dem, der stadig tror, at det har noget med komfurer at gøre, kan vi starte med at sige, at det er en utrolig smuk og smart bevismetode, der kan bruges, hvis man har en idé om, at et resultat er korrekt, men lige mangler at bevise det. Induktion er, når man bare slår op i en bog, defineret som følger:

Lad $p(n)$ være et prædikat[14] i n, hvor $n \in \mathbb{N}$. Når følgende to betingelser er opfyldt, da vil $p(n)$ gælde for alle $n \in \mathbb{N}$.

1) $p(1)$ er sand.
2) For alle $m \in \mathbb{N}$ gælder, at $p(m) \Rightarrow p(m+1)$.

Det siger, at hvis vi kan vise, at $p(1)$ er sand, samt at vi kan udlede $p(m+1)$, når vi antager, at $p(m)$ gælder; da vil $p(n)$ gælde for alle $n \in \mathbb{N}$.

Det lyder nok stadig underligt for mange, men det er derfor jeg laver den her artikel. Det er nemlig nu, vi skal bruge *Caféen? Domino*-filmen, fordi induktion er ganske enkelt bare en garanti for, at vi får væltet samtlige brikker i en uendelig lang domino-bane. Betingelse 1) er manden, der sidder på toilettet; det er ham, som

[14] En udtalelse, der indeholder en variabel. Når vi indsætter en bestemt værdi på variablens plads, får vi et udsagn, der enten er sandt eller falskt.

starter det hele. Hvis ikke det var for ham, ville ingen af flaskerne vælte.
Betingelse 2) er, at der er flasker på hver eneste plads i dominobanen. Vi vælger en vilkårlig flaske, $p(m)$, i banen og kontrollerer om flasken lige bagefter, altså $p(m+1)$, vil vælte; altså om $p(m) \Rightarrow p(m+1)$. Hvis $p(m+1)$ skal vælte bliver $p(m)$ nødt til at vælte. Vi må altså antage, at $p(m)$ gælder. Grunden til, at vi kan det er betingelse 1. Vi ved $p(1)$ er sand. Så viser vi, at den efterfølgende også gælder, altså $p(2)$. Sådan kan man blive ved; men vi ved, at det går godt, fordi vi viser det for en vilkårlig flaske.
Hvis man tænker over det, så vil de to betingelser føre til, at domino altid vil gå godt. De sørger for, at intet kan gå galt.

Vi tager lige et eksempel. Vi vil vise, at for $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ og $n \in \mathbb{N}$ gælder $\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-x}{x-1}$.

Bevis
1) Vi viser først, at $p(1)$ er sand, altså, at venstresiden og højresiden af formlen giver det samme, når vi har $n = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Venstresiden :} \quad & \sum_{i=1}^{1} x^i = x \\ \text{Hoejresiden :} \quad & \frac{x^2 - x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x. \end{aligned}$$

Det var rigtigt. Manden på toilettet fik altså væltet den første flaske.
2) Nu skal vi lige vise, at en tilfældig flaske også kan vælte den efterfølgende flaske. Vi skal udlede, at $p(m+1)$ gælder, når vi antager, at $p(m)$ gælder. Dvs., vi ved, at $\sum_{i=1}^{m} x^i = \frac{x^{m+1}-x}{x-1}$. Vi

regner på $\sum_{i=1}^{m+1} x^i$ og skal nå frem til, at det er lig med $\frac{x^{(m+1)+1}-x}{x-1}$. Vi starter med at hive ledet med eksponenten $m+1$ ud af vores sum.

$$\sum_{i=1}^{m+1} x^i = \sum_{i=1}^{m} x^i + x^{m+1}.$$

Nu kan vi bruge induktionsantagelsen, og skrive ovenstående sum som den kvotient, formlen siger, det er. Vi antog jo, at sætningen gælder for m.

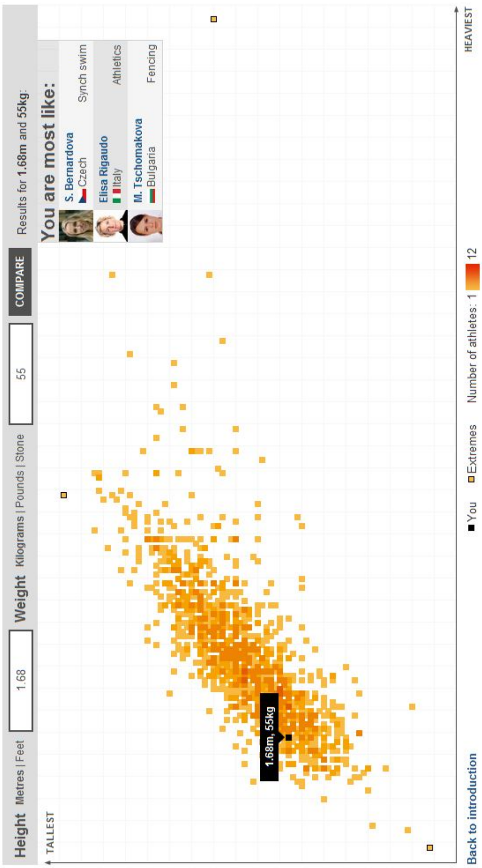
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} x^i &= \frac{x^{m+1}-x}{x-1} + x^{m+1} \\ &= \frac{x^{m+1}-x}{x-1} + \frac{(x-1)x^{m+1}}{x-1} \\ &= \frac{x^{m+1}-x+x^{m+2}-x^{m+1}}{x-1} \\ &= \frac{x^{(m+1)+1}-x}{x-1}.\end{aligned}$$

LR.

Olympic Outliers

Maria Bekker-Nielsen Dunbar

During the 2012 Summer Olympics, the BBC had a rather snazzy plot of a sample of all the Olympic athletes, where you could enter your height and weight to see whose body you possess:



It also informs you of the tallest, shortest, lightest and heaviest athletes (the extremes). They are:

Tallest	219cm	Zhaoxu Zhang (China)
Shortest	136cm	Asuka Teramoto (Japan)
Lightest	30kg	Asuka Teramoto (Japan)
Heaviest	218kg	Ricardo Blas Jr (Guam)

Obviously, I cannot look at something like this without wanting to play around with the data, so I grabbed the .txt-file of data (which was created by the Press Association) and converted it to a .csv-file. Now it can be loaded into SAS, thusly:

```
proc import datafile= "C:\Users\Maria Dunbar\Desktop
                         \famos\olymp.csv"
     out=olymp2
     dbms=dlm
     replace;
     delimiter= ",";
     getnames=yes;
run;
```

Averages

In order to see what height and weight can be expected of these athletes, we can generate the means of these variables:

```
proc means data=olymp2 maxdec=2 mean var std n;
var Height_cm_ Weight_kg_;
run;
```

Variable	Mean	Variance	Std Dev	N
Height_cm_	177.45	127.41	11.29	1587
Weight_kg_	72.65	256.31	16.01	1587

The average athlete has a height of 177.45cm with a standard deviation of 11.29cm and a weight of 72.65kg with a standard deviation of 16.01kg.

Hence, practically everyone at our department can have 'the body of an athlete' (understood as being the same height and weight - muscle mass, fat levels and sporting ability may vary). However not everyone can be a *mathlete* since this year, for the first time (I think), all types of mathematical studies at UCPH have specific grade requirements!

Linear regression

Recall the picture from the first page of this article - obviously no sane person can look at it without wanting to draw a line through the points. This means we are looking at a model of the type

$$H_i = \alpha + \beta W_i + \varepsilon_i \tag{1}$$

where H_i and W_i are height and weight respectively, while ε_i are errors.

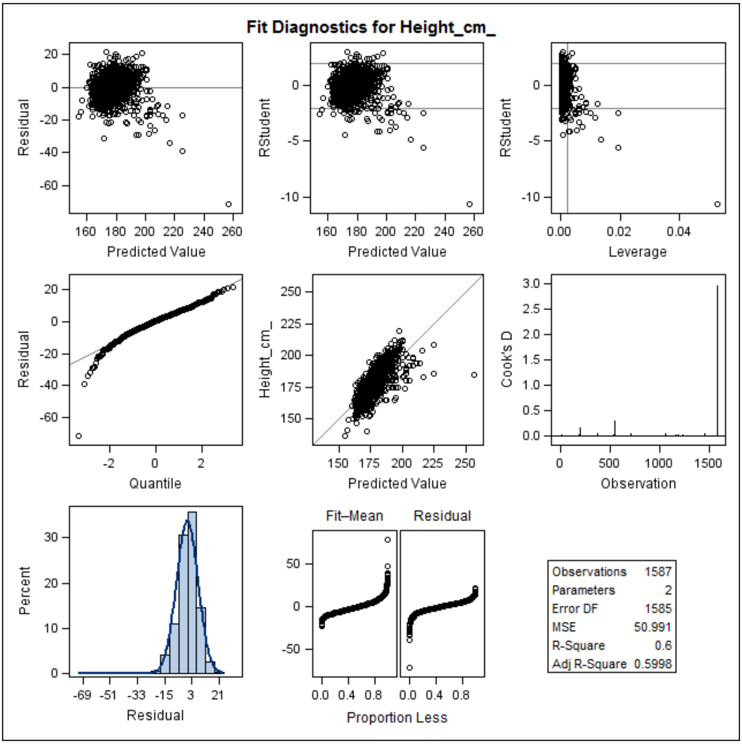
Is this a good model?

The assumptions of this error, which we have to check, before we estimate the parameters in our regression, are:

- The errors have a mean of 0, $E[\varepsilon_i] = 0$
- They have variance, $Var[\varepsilon_i] = \sigma^2, \sigma^2 > 0$

- They are independent, $\varepsilon_i \perp\!\!\!\perp \varepsilon_j, \forall i, j$
- They are distributed normally, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

These assumptions are checked by viewing the diagnostics plots of our model:



The assumptions on the error are fine (cf. the three leftmost plots) but the model has the potential to become *better* as the R^2-value is 0.6 (preferably it would be closer to 1).

The estimated model

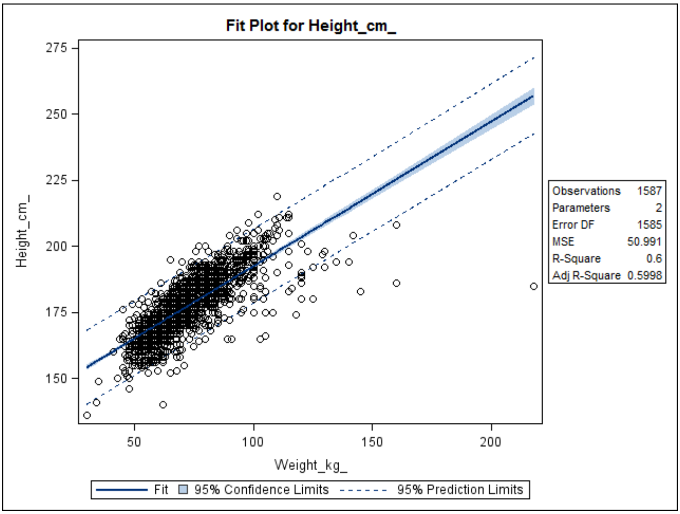
The parameters of this model (the intercept and the slope, α and β) can be estimated to[15]

$$H_i = 137.77 + 0.546W_i \tag{2}$$

using the command:

```
proc reg data=olymp2;
model Height_cm_=Weight_kg_;
run;
```

In order to see whether this line is good (i.e. fits well), we look at the following fit plot:



[15] α has a standard error of 0.83 and β has a standard error of 0.01

Note that the point on the far right seems to be ill-fitting. We will proceed to check whether it is an outlier, and if it is, identify which athlete it is.

Outliers

Recall that an outlier is a point which is radically different than the other points, so the assumption that the error on this observation follows the same distribution as the errors observed on other observations, may be incorrect.

The externally standardised residuals, called t-values, are calculated (these follow a t-distribution). Cutting off t-values larger than 4 leaves the following athletes:[16]

```
proc reg data=olymp2;
model Height_cm_=Weight_kg_/partial influence all;
id+1;
output out=olymp3
Rstudent=t
covratio=c
h=h;
proc print data=olymp3;
where abs(t)>4;
run;
```

[16] Cutoffs at 3 are also seen. SAS' standard setting is to cut off at 2 (which it uses when producing the Rstudent/Leverage-plot)

Obs.	t	Height[17]	Weight[18]	Athlete
187	-4.0907	165	103	Mami Shimamoto
202	-4.8221	183	145	Kazuomi Ota
343	-4.4582	140	62	Tuau Lapua Lapua
554	-5.5899	186	160	Artem Udachyn
1196	-4.1045	166	105	Adysangela Moniz
1586	-10.6983	185	218	Richardo Blas Jr

Using the highest t-value, -10.6983, and the 1587 variables our model uses, with its 2 degrees of freedom, the following code gives us a value of t which can be regarded as a critical limit/cutoff point, and as a result observations with a t-value higher than this are seen as outliers (for an explanation of what the code does see [3])

```
data a;
p1=probt(10.6983,1587-1-2);
p2=2*1-p1); p3=1-(1-p2)**1587;
tgraense=tinv(1-(1-(1-0.05)**(1/ 1587))/2, 1587-1-2)-
tbonf=tinv(1-0.05/2/ 1587, 1587-1-2);
proc print data=a;
var tgraense tbonf;
run;
```

tgraense	tbonf
4.16849	4.17437

Using 4.17 as our new cutoff point the following four athletes are outliers:

[18]The height is measured in cm.
[18]The weight is measured in kg.

```
proc print data=olymp3;
where abs(t)>4.17;
run;
```

Obs.	t	Height[19]	Weight[20]	Athlete
202	-4.8221	183	145	Kazuomi Ota
343	-4.4582	140	62	Tuau Lapua Lapua
554	-5.5899	186	160	Artem Udachyn
1586	-10.6983	185	218	Richardo Blas Jr

The athlete with the biggest t-value is thereby Richardo Blas Jr, who is the aforementioned point on the far right of the fit plot (he can also be spotted in the top three diagnostic plots and the one in the middle).

So the question one should ask oneself is - is he an atypical observation? In some ways yes, as he seems to be the only athlete with a higher value of weight (measured in kg) than value of height (measured in cm).

Removing observation 1586 might give the model a better fit. However, an outlier is not necessarily the same as 'a bad observation' so he will be left in for the time being (whether or not he stayed in the Games is another story).[21]

[20] The height is measured in cm.

[20] The weight is measured in kg.

[21] If he was removed, however, the critical limit for t would have to be changed accordingly as we have one less observation. This could lead to a higher/lower number of outliers

Plot-command

All plots used in this article were created by running the following command:

```
ods graphics on;
proc reg data=olymp2 plots=all;
model Height_cm_=Weight_kg_;
run;
ods graphics off;
```

References

[1] Your Olympic body match (30 July) http://www.bbc.co.uk/news/uk-19050139

[2] Nils Kousgaard og Anders Milhøj: *Anvendt Regression for Samfundsvidenskaberne*; Akademisk forlag

[3] Anders Milhøj: *Statistik med SAS - Sommerskolen i Videregående Statistik 2011*

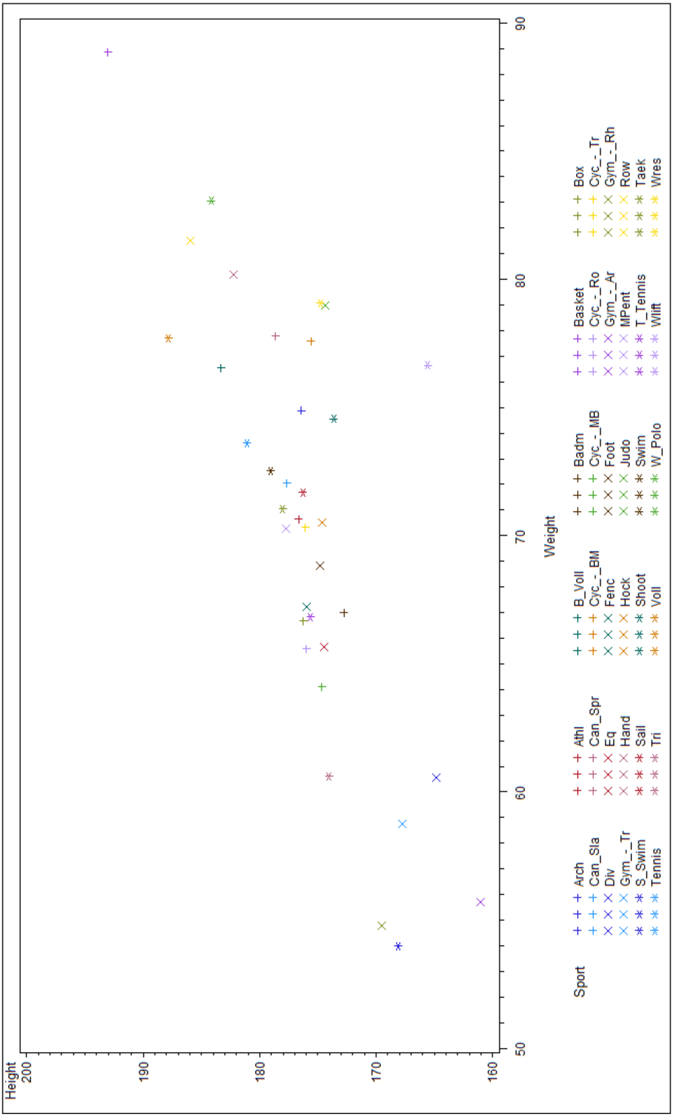
For good measure, on page 50 is a plot of the means of each sport individually.[22]

The code for which is:

```
data points;
   input Height Weight Sport $;
   datalines;
176.47 74.88 Arch
...
```

[22] I wanted to create oval-shaped bubbles with the standard errors as radius but alas, my SAS abilities do not yet reach that far

```
174.83 79.07 Wres
;
proc gplot data=points;
plot Height*Weight=Sport;
bubble Height*Weight=Sport $ Sport/;
run;
```


Height
200
190
180
170
160
Weight
50
60
70
80
90
Sport
Arch
Can_Sla
Div
Gym_-_Tr
S_Swim
Tennis
Athl
Can_Spr
Eq
Hand
Sail
Tri
B_Voll
Cyc_-_BM
Fenc
Hock
Shoot
Voll
Badm
Cyc_-_MB
Foot
Judo
Swim
W_Polo
Basket
Cyc_-_Ro
Gym_-_Ar
MPent
T_Tennis
Wlift
Box
Cyc_-_Tr
Gym_-_Rh
Row
Taek
Wres

Forelæsningsrække om kvantitativ finansiering

– og tilknyttede karriereaspekter

Nordea

Abstract

Quantitative Finance
Nordea Market Risk Management
November 23 and November 30, 13:15-15:00

Modern derivatives trading relies heavily on quantitative methods. This provides a great opportunity for mathematicians and physicists to work with complex mathematical modelling in the financial services industry.

In two lectures, Jimi Truelsen and Manuel Torrealba from Nordea Market Risk Management will explain what financial derivatives are, why they are used, and give insight into how they are priced.

In the lectures we will also talk about career aspects, i.e. how to get a job in the financial services sector.

The Department of Mathematical Sciences will host a small reception after each session.

Derivative: A contract between two parties to exchange payments at certain dates in the future, where the timing and size of the payments may depend on the behaviour of underlying financial assets. An example of a derivative is a European call option - a contract in which the owner has the right (but not the obliga-

tion) to buy an asset at a fixed price at a given date in the future. In the 1970's Fischer Black, Myron Scholes, and Robert Merton discovered how to price such contracts, and their ideas still lie at the very heart of modern derivatives pricing.

Målgruppe

Kandidatstuderende i de matematiske og fysiske fag (interesserede bachelorstuderende er også inviteret), samt andre interesserede med en god forståelse for matematik. Kendskab til finansiering er ikke nødvendig.

Tid og sted

Aud. 10, 13:15-15:00 fredag d. 23. november samt Aud. 9, 13:15-15:00 fredag d. 30. november begge efterfulgt af en lille reception i frokoststuen på IMF: 4.4.19.

Sprog

Engelsk og dansk. (Et foredrag på dansk, et på engelsk. Spørgsmål på dansk eller engelsk).

Løsning af tredjegradsligningen

Jens Siegstad, Kasper Fabæch Brandt og Jingyu She

Substitution en masse

Vi vil i denne artikel vise, hvorledes man kan løse den generelle tredjegradsligning

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0 \tag{1}$$

hvor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ og α_4 er reelle tal, og $\alpha_1 \neq 0$. Ved division med α_1 fås den reducerede ligning

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

hvor

$$a = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad , \quad b = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \quad \text{og} \quad c = \frac{\alpha_4}{\alpha_1}.$$

Vi vil nu løse den reducerede ligning[23] ved at benytte en række snedige tricks. Vi vil første skille os af med andengradsleddet ved at substituere $x = y - \frac{1}{3}a$ i (2):

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c =& \left(y - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(y - \frac{1}{3}a\right) + c \\ =& y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c. \end{aligned}$$

hvorved ligningen (2) kan skrives på formen

$$y^3 + py + q = 0 \tag{3}$$

[23] Da de to ligninger er ækvivalente, vil rødderne i anden ligning præcis være rødderne i første ligning.

hvor $p = b - \frac{1}{3}a^2$ og $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$. Bemærk, at ligningssystemet er nemt at løse, hvis p eller q er lig 0. I følgende betragter vi derfor kun tilfælde, hvor $p, q \neq 0$. Sættes $y = u + v$, fås [24]:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \iff \begin{cases} p = -3uv \\ q = -(u^3 + v^3) \end{cases} \tag{4}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{p^3}{27} = u^3v^3 \\ q = -(u^3 + v^3) \end{cases} . \tag{5}$$

Det er altså tilstrækkeligt at finde u og v, så ligningssystemet i (5) løses. Bemærk desuden, at $p, q \neq 0$ tillader os at antage

$$u, v \neq 0 \quad \text{og} \quad u + v \neq 0.$$

Vi vil konstruere en andengradsligning, hvor koefficienterne er en snedig konstruktion af p og q, som vi *allerede kender fra vores tredjegradsligning*, og hvor rødderne af andengradsligningen viser sig at være netop u^3 og v^3, hvor u og v opfylder (5). Et kvalificeret gæt kunne være:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{6}$$

Vi skal altså vise, at

$$u \text{ og } v \text{ opfylder } (5) \iff u^3 \text{ og } v^3 \text{ er rødder i } (6).$$

Vi starter med at vise " $\Rightarrow$ "-implikationen. Antag, at u og v opfylder ligningssystemet i (5). Da fås det ønskede ved at evaluere (6) i $z = u^3$ og $z = v^3$, efter substitution af koefficienterne i (6) med de ækvivalente udtryk fundet i (5).

[24]Læseren kan eftervise (4) ved at bemærke $(u+v)^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$.

Vi viser nu, at hvis u^3 og v^3 er rødder i (6), så er ligningerne i (5) opfyldt. Per antagelse har vi:

$$(u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$
$$(v^3)^2 + qv^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Det giver mening[25] at dividere med u^3 hhv. v^3:

$$u^3 + q - \frac{p^3}{27u^3} = 0$$
$$v^3 + q - \frac{p^3}{27v^3} = 0$$

Ved at isolere q i begge ligninger fås:

$$q = \frac{p^3}{27u^3} - u^3 = \frac{p^3}{27v^3} - v^3 \tag{7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{p^3}{27}\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{v^3}\right) = u^3 - v^3 \tag{8}$$

Lidt omrokering giver:

$$\begin{aligned}\frac{p^3}{27} &= \frac{u^3 - v^3}{\frac{1}{u^3} - \frac{1}{v^3}} \\ &= \frac{\left(u^3 - v^3\right) u^3 v^3}{\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{v^3}\right) u^3 v^3} \\ &= -u^3 v^3\end{aligned}$$

[25]Per antagelse er $u, v \neq 0$.

Substitution, i udtrykket for q fra første lighedstegn i (8), giver:

$$q = -(u^3 + v^3)$$

Altså ser vi, at ligningerne i (5) er opfyldte.

Vi kan altså finde u^3 og v^3 ved at løse andengradsligningen i (6). Ideen er derefter at finde en af løsningerne $y_1 = u_1 + v_1$ på (3), hvorefter en af løsningerne $x_1 = y_1 - \frac{1}{3}a$ til (2) kan bestemmes. Resten af magien foregår ved polynomiumsdivision til at få en andengradsligning, hvis rødder er de to resterende rødder af tredjegradsligningen.

Til at finde u_1 og v_1 bestemmes først den ene kubikrod u_1 af u^3. Vi udnytter da restriktionen $3u_1v_1 = -p$ fra (4) til at bestemme v_1.

Lidt historie

Det netop gennemgåede er en variation af *Cardanos formel*. Det var i hans arbejde med tredjegradsligninger, at han indså nødvendigheden af at udvide det daværende talsystem. Det pudsige ved denne metode er, at vi i beregningen af u^3 godt kan komme ud for at tage kvadratroden til et negativt tal, og så alligevel have at u_1 er reelt! Inden fødslen af de komplekse tal må det have en været en overraskende opdagelse.

Et eksempel

I følgende eksempel demonstreres brugen af det netop beviste. Vi starter med tredjegradsligningen:

$$2x^3 - 30x^2 + 162x - 350 = 0 \tag{9}$$

Ved division med koefficienten på tredjegradsleddet reduceres ligningen til formen (2):

$$x^3 - 15x^2 + 81x - 175 = 0$$

Så vi har $a = -15, b = 81, c = -175$. Vi skriver nu ligningen om til formen (3), med følgende p og q-værdier:

$$p = b - \frac{1}{3}a^2 = 81 - \frac{225}{3} = 6$$
$$q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = \frac{-2 \cdot 3375}{27} + \frac{1215}{3} - 175 = -20$$

Nu kan vi bestemme u^3, som den ene rod i (6):

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 10 + \sqrt{108}$$

En kubikrod for u kan være $u_1 = 1 + \sqrt{3}$. Idet $3u_1v_1 = -p = 1$, fås $v_1 = \frac{-p}{3u_1}$, dvs. $v_1 = \frac{-2}{1+\sqrt{3}}$. Da $y_1 = u_1 + v_1 = 0$, kan vi nu substitutere tilbage, for at finde en af rødderne til tredjegradsligningen:

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3} = 1 + \sqrt{3} + \frac{-2}{1+\sqrt{3}} + \frac{15}{3} = 7$$

Den ene af rødderne er altså 7. Vi udfører nu polynomiumsdivision for at få et andengradspolynomium, hvis rødder er de to resterende rødder:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -15x^2 & +81x & -175 & x-7 \quad = \quad x^2-8x+25 \\
-(x^3 & -7x^2) & & & \\
\hline
 & -8x^2 & +81x & -175 & \\
 & -(-8x^2 & +56x) & & \\
\hline
 & & 25x & -175 & \\
 & & -(25x & -175) &
\end{array}$$

Vi får, at rødderne i $x^2 - 8x + 25$ er de to resterende løsninger til (9), hvilke vi let kan finde ved løsningsformlen for en andengradsligning:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 4 \pm 3i$$

Altså finder vi, at alle løsningerne til (9) er 7, $4 + 3i$ og $4 - 3i$.

Literatur

[1] *Matematiske Horisonter.*
DTU,2011.
Bogen kan hentes her: http://www.imm.dtu.dk/Om_IMM/Informationsmateriale/MatematiskeHorisonter.aspx

FAMØS oktober 2012
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Tegnere:
Maria Bekker-Nielsen Dunbar

Deadline for næste nummer:
30. november 2012

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til famos@math.ku.dk – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

FAMØS er et internt fagblad.
Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.math.ku.dk/famos/

Oplag: 500 stk.
ISSN: 1903-2227

Fagrådet fortæller

Så er Det Fællesmatematiske Fagråd (blot kaldet Fagrådet) så småt ved at være ordentligt i gang. I hvert nummer af FAMØS vil vi forsøge at komme med en lille status, der kan berette for jer, hvad vi går og bruger tiden på, og hvad der ellers sker på instituttet.

Først kan vi fortælle, at vi snarligst holder en generalforsamling. Den slags skal til, før man kan få sig nogle vedtægter – og sådan nogle er vi nødt til at have.

Udover at prøve at konstruere sådanne, går langt det meste af vores tid med Studienævnsvalg. Som I forhåbentlig har opdaget, skal der nemlig snart være valg til de nye Studienævn. Engang i slutningen af november (mere præcist i starten af blok 2) vil I alle sammen blive bedt om at stemme til en del udvalg – heriblandt Studienævnet. Vi håber meget, at I vil bruge de 2 min. på at smide en stemme. Inden da skal I nok få valglisterne at vide og den slags. Det er desværre kun matematikere, der har stillet op. Hvilket leder os hen til næste punkt: manglen på Mat-Øk'ere og Aktuarer!

Vi vil så utroligt gerne have nogle Mat-Øk'ere og Aktuarer til at dukke op til nogle møder. Vi vil jo gerne kunne snakke på alles vegne, hvilket er lidt svært, når vi ikke ved, hvad I synes om ting.

Så kort fortalt, *husk* at stemme og *husk* at dukke op til vores møder. Hvis I har ting, I vil have os til at deale med (eller hvis I vil sættes på Fagrådets mailingliste (red.)), så send en mail til fagraad@math.ku.dk!