Additivitet af determinanten
– En kort historie om matematisk nysgerrighed

Rasmus Sylvester Bryder

Vi kender (snart) alle til determinantens belejlige multiplikativitet, dvs. at vi, for vilkårlige komplekse kvadratiske matricer A og B, har at

$$\det AB = \det A \det B.$$

Man kunne så dertil spørge sig selv, om den også er additiv (dvs. gælder $\det(A + B) = \det A + \det B$?), men man finder hurtigt ud af, at dette ikke gælder i almindelighed; tag for eksempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Her har vi altså forfattet et modeksempel til førnævnte formodning. Da jeg for første gang grublede over sandhedsværdien af formodningen, var min intuition naturligvis, at den var falsk, og modeksemplet kom til mig hurtigt derefter. I forlængelse af formodningen kom jeg så på spørgsmålet, om der fandtes en klasse af matricer, som gjorde determinanten additiv – kunne der eksistere et underrum af vektorrummet $\mathbb{M}_n$ af komplekse $n \times n$-matricer, hvor determinanten havde denne egenskab? Og svaret var ja; hvis man eksempelvis i $\mathbb{M}_2$ betragtede underrummet udspændt af A ovenfor, måtte determinanten, ganske vist triviel på underrummet, besidde additivitet. Spændende eller ej, var det i det mindste et eksempel.

Ikke desto mindre var jeg ikke helt tilfreds. Mit første indtryk var, at skulle man kunne bruge konceptet til noget, måtte det da skulle være på en delklasse af matricer (eftersom det ikke kunne være på hele $\mathbb{M}_n$), som var maksimal med denne egenskab. Determinantfunktionen ville dermed være lineær på denne klasse, og det *kunne* lede til mangen skønhed og Lebensfreude. For $n = 1$ gjaldt det selvfølgelig overalt, men for $n \geq 2$ var det svært at finde en måde bare at *formulere* formodningen på. Af mangel på god notation og formuleringsevne, gav jeg lidt op; det syntes mig i det øjeblik uoverskueligt. Hvad var jeg overhovedet i stand til at få ud af denne i første omgang finurlige idé om determinanten? Lad mig for Guds skyld pointere, at dette ikke er en opfordring til bare at give op på stedet – der findes selvfølgelig en måde at formulere det på, men nogle gange kan hjernen ikke kapere det, og det må man til tider bare acceptere. Det var, hvad jeg gjorde.

Det var så her, at ærgelsen slog ind. Hvad kunne jeg overhovedet overskue at formulere; og var jeg god nok til at vise det? Jeg var lidt for tændt på min grundidé til bare at lade den være, men mine mangler havde slået mig lidt ud. Hvis jeg skulle have et resultat, var jeg nødt til at sigte lavere. Det medførte nok en mindre grad af tilfredsstillelse, men som det var, så jeg ikke andre muligheder. Jeg spejdede kort tid efter en ny måde at blive i boldgaden på, og det slog mig: hvad hvis jeg nu prøvede at finde en $n \times n$-matrix A, således at

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

for *alle* komplekse $n \times n$-matricer X? Jovist, problemet var af en helt anden karakter, på ingen måde lige så, omfangsrigt som hvad jeg tidligere havde tænkt på, men her var der endelig noget konkret og mere formulerbart at kaste sig over. Jackpot. Mit første indfald var, at $A = 0$ selvfølgelig løste problemet, og her kom gennembruddet: kunne der være andre matricer, der opførte sig så pænt? Min intuition sagde nej, men jeg havde aldrig set det bevist andetsteds. Efter lidt relevant Googleri, kom jeg (så vidt jeg erindrer) heller ikke frem til noget bevis for det, men jeg kunne ikke bare lade det ligge. Det krævede et bevis – det skyldte jeg min nysgerrighed – og jeg måtte selv stå for det. Det krævede lidt mere hittepåsomhed, end først antaget, men det lykkedes faktisk, og her følger, hvordan jeg kom frem til, at det faktisk kun var nulmatricen, der opfyldte det:

Af notationsmæssige hensyn definerer vi

$$\mathbf{A}_n = \{A \in \mathbb{M}_n \,|\, \forall X \in \mathbb{M}_n \colon\; \det(A+X) = \det A + \det X\}.$$

Vi har allerede set, at $0 \in \mathbf{A}_n$. Det er nemt at vise, at $\mathbf{A}_n$ udgør et underrum i $\mathbb{M}_n$ (prøv selv!), men det kommer os ikke til nogen gavn i det følgende.

Det indses næsten uvirkeligt hurtigt, at $\mathbf{A}_1 = \mathbb{C}$. Lad derpå n være et naturligt tal større end 1. For enhver kompleks $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ og $1 \leq i, j \leq n$ definerer vi $A_{ij} \in \mathbb{M}_n$ ved følgende betingelser:

(1) Indgangene i i'te række skal være som i A.
(2) Fjernes i'te række og j'te søjle, fås enhedsmatricen i $\mathbb{M}_{n-1}$.
(3) De resterende indgange i j'te søjle er 0.

Ved udvikling efter j'te søjle fås da, at $\det A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$, samt $\det(A_{ij} - A) = 0$, idet matricen $A_{ij} - A$ indeholder en nulrække.

Lemma 1 *Hvis $A \in \mathbf{A}_n$, $n \geq 2$, vil $\det A = 0$.*

Bevis. Idet $2^n \det A = \det 2A = \det A + \det A = 2 \det A$, følger det ønskede. □

Sætning 2 *Lad $n \geq 2$ være et naturligt tal. Hvis $A \in \mathbb{M}_n$ opfylder*

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

for alle $X \in \mathbb{M}_n$*, vil* $A = 0$*, dvs.* $\mathbf{A}_n = \{0\}$*.*

Bevis. For $1 \le i, j \le n$ vil

$$\begin{aligned}(-1)^{i+j} a_{ij} &= \det A_{ij} \\ &= \det(A + (A_{ij} - A)) \\ &= \det A + \det(A_{ij} - A) \\ &= 0,\end{aligned}$$

jf. Lemma 1 og de tidligere observationer. Da er alle indgange lig 0, hvormed det ønskede følger. □

Således skete det: jeg stod endelig med noget utrivielt, der kom af en ret så simpel idé om et velkendt begreb. Ja, det kunne være mere interessant, og selve resultatet er nok ret så ubetydeligt i forhold til, hvad man ellers kan finde på i matrixregning (af gode eksempler kan nævnes Cayley-Hamiltons sætning), og hvad jeg ellers kunne have fundet på. I det mindste var jeg heldig; at man overhovedet får noget nyt og "spændende" ud af tænkeriet, er ikke en selvfølge. Nogle gange føler man sig bare magtesløs, ikke bare over for matematikken, men over for ytringen, overblikket og tænkeriet, i hvilket tilfælde man er nødt til at træde et skridt tilbage, få vejret igen og fatte roen. Det er menneskeligt at lade sig afskrække.