

En differentiabel funktion hvis afledte ikke er kontinuert

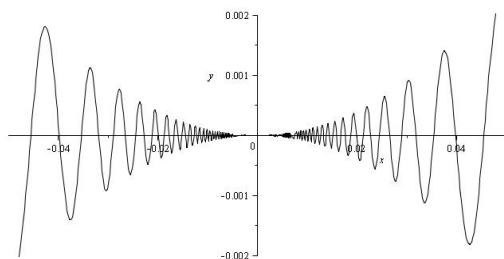
Søren Knudby

Det er velkendt for de fleste, at differentiability af en reel funktion f medfører kontinuitet af f , mens det modsatte ikke gælder generelt. Men hvad kan man sige om den afledte af en differentiabel funktion? Det er nemt at se, at man ikke nødvendigvis kan konkludere differentiability af f' : find et eksempel på en kontinuert funktion g , som ikke er differentiabel. Hvis f er en stamfunktion til g (en sådan findes, fordi g er kontinuert), så er f differentiabel, og den afledte $f' = g$ ikke er differentiabel. Den afledte er dog stadig kontinuert. Vi skal nu se et eksempel, hvor dette ikke er tilfældet. Vi skal altså finde en differentiabel funktion, hvis afledte ikke er kontinuert.

Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

På Figur 1 vises grafen for f i en omegn af $x = 0$.



Figur 1: Grafen for f .

Det er oplagt, at f er differentiabel i intervallerne $] -\infty, 0[$ og $]0, \infty[$ med en differentialkvotient givet ved

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Lad os undersøge, om f er differentiabel i $x = 0$. Vi opskriver derfor differenskquotienten

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right), \quad (1)$$

hvor h er et (lille) tal forskelligt fra 0. Eftersom $|\sin(t)| \leq 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$, ser man, at udtrykket i (1) går mod 0, når h går mod 0. Altså er f differentiabel i $x = 0$, med $f'(0) = 0$.

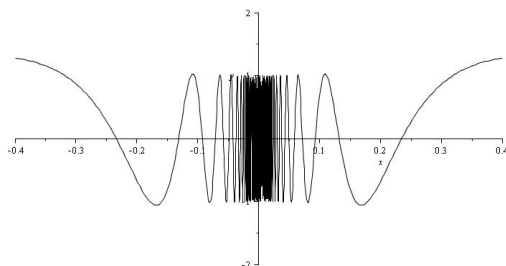
Tilbage står at vise, at f' ikke er kontinuert, og det er selvfølgelig i punktet $x = 0$, at det går galt med kontinuiteten. Udtrykket

$$2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

har nemlig ingen grænseværdi, når x nærmer sig 0.

Lad os præcisere argumentet: Første led i (2) nærmer sig 0 ud fra samme argumentation som ovenfor. Men ligegyldigt hvor lille vi vælger $\epsilon > 0$, vil der i intervallet $]0, \epsilon[$ være uendeligt mange tal af formen $\frac{1}{n\pi}$, hvor $n \in \mathbb{N}$. Derfor vil $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ antage værdierne -1 og 1 vilkårligt tæt på 0, og udtrykket i (2) kan derfor ikke nærme sig en grænse, når $x \rightarrow 0$. Derfor er f' diskontinuert i $x = 0$. En illustration af f' ses på Figur 2.

I eksemplet ovenfor, så vi, at funktionen f' ikke var kontinuert, fordi den opførte sig ganske vildt i nærheden af diskontinuitetspunktet $x = 0$. Man kan spørge sig selv, om det altid vil være tilfældet, eller om man kan finde eksempler, hvor den afledte blot

Figur 2: Grafen for f' .

har et spring. Svaret på dette spørgsmål er, at diskontinuitetspunkter for den afledte altid vil være vilde, i den forstand at $f'(x)$ ikke har nogen grænseværdi, når x nærmer sig det kritiske punkt. Mere formelt gælder følgende sætning:

Sætning 1 *Lad $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion, og lad $x_0 \in]a, b[$. Hvis grænseværdien*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

eksisterer, er den nødvendigvis lig $f'(x_0)$.

Beviset for Sætning 1 er en anvendelse af middelværdisætningen, som vi for god ordens skyld repeterer (uden bevis):

Sætning 2 (Middelværdisætningen) *Lad $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, som er differentiabel i alle indre punkter $x \in]a, b[$. Da findes et punkt $c \in]a, b[$, så*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bevis for Sætning 1. For hvert $n \in \mathbb{N}$ stort nok til at $x_0 + \frac{1}{n} < b$, kan vi ifølge middelværdisætningen finde et c_n , så $x_0 < c_n < x_0 + \frac{1}{n}$, samt

$$f'(c_n) = \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}}. \quad (3)$$

Bemærk, at følgen (c_n) nærmer sig x_0 fra højre, når $n \rightarrow \infty$ (overvej), så antagelsen, om at $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ eksisterer, får os til at konkludere, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(c_n) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x). \quad (4)$$

Højresiden i (3) genkendes som en differenskvotient for f i punktet x_0 , med $\Delta x = \frac{1}{n}$. Derfor vil højresiden i (3) konvergere mod $f'(x_0)$, når $n \rightarrow \infty$, og følgelig må venstresiden i (3) konvergere mod det samme, altså

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(c_n) = f'(x_0). \quad (5)$$

Sammenholdes (5) med (4), når vi konklusionen

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0).$$

□

Indholdet af Sætning 1 er, at man kun kan finde eksempler på differentiable funktioner, hvor et diskontinuitetspunkt for f' er vildt.

Bemærkning 3 Beviset for Sætning 1 kan uden videre overføres til at vise den tilsvarende sætning, hvor vi antager, at

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

eksisterer.

Korollar 4 *Lad $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion, lad $x_0 \in]a, b[$ være givet, og antag at f er differentiabel i alle punkter i intervallet $]a, b[$ måske med undtagelse af punktet x_0 . Hvis grænseværdierne*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

findes, men er forskellige, er f ikke differentiabel i punktet x_0 .

Bevis. Hvis f var differentiabel i punktet x_0 , ville

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

ifølge Sætning 1 og Bemærkning 3. □

Vores eksempel fra tidligere på en differentiabel funktion, hvis afledte ikke var kontinuert, havde kun et enkelt diskontinuitetspunkt. Man kan spørge sig selv, om det er muligt at finde en differentiabel funktion uden et eneste kontinuitetspunkt. Dette er ikke muligt. Faktisk vil mængden af kontinuitetspunkter for den afledte ligge tæt i $\mathbb{R}$. Det vil dog gå for vidt at bevise den påstand her. Resultatet hører hjemme i den deskriptive mængdelære.