Induktion for dummies

– Til dig, der undrer dig over, hvorfor induktion virker

Kristian Peter Poulsen

Før du gør noget, skal du lige se filmen *Caféen? Domino*, der er lavet af *Matematikrevyen*. Filmen kan let findes på Youtube, ellers er den at finde her:

math.ku.dk/famos/domino

Nu er vi parate til at forklare, hvad induktion er, og hvorfor det virker. Til dem, der stadig tror, at det har noget med komfurer at gøre, kan vi starte med at sige, at det er en utrolig smuk og smart bevismetode, der kan bruges, hvis man har en idé om, at et resultat er korrekt, men lige mangler at bevise det. Induktion er, når man bare slår op i en bog, defineret som følger:

Lad $p(n)$ være et prædikat[14] i n, hvor $n \in \mathbb{N}$. Når følgende to betingelser er opfyldt, da vil $p(n)$ gælde for alle $n \in \mathbb{N}$.

1) $p(1)$ er sand.
2) For alle $m \in \mathbb{N}$ gælder, at $p(m) \Rightarrow p(m+1)$.

Det siger, at hvis vi kan vise, at $p(1)$ er sand, samt at vi kan udlede $p(m+1)$, når vi antager, at $p(m)$ gælder; da vil $p(n)$ gælde for alle $n \in \mathbb{N}$.
Det lyder nok stadig underligt for mange, men det er derfor jeg laver den her artikel. Det er nemlig nu, vi skal bruge *Caféen? Domino*-filmen, fordi induktion er ganske enkelt bare en garanti for, at vi får væltet samtlige brikker i en uendelig lang domino-bane. Betingelse 1) er manden, der sidder på toilettet; det er ham, som

[14] En udtalelse, der indeholder en variabel. Når vi indsætter en bestemt værdi på variablens plads, får vi et udsagn, der enten er sandt eller falskt.

starter det hele. Hvis ikke det var for ham, ville ingen af flaskerne vælte.
Betingelse 2) er, at der er flasker på hver eneste plads i dominobanen. Vi vælger en vilkårlig flaske, $p(m)$, i banen og kontrollerer om flasken lige bagefter, altså $p(m+1)$, vil vælte; altså om $p(m) \Rightarrow p(m+1)$. Hvis $p(m+1)$ skal vælte bliver $p(m)$ nødt til at vælte. Vi må altså antage, at $p(m)$ gælder. Grunden til, at vi kan det er betingelse 1. Vi ved $p(1)$ er sand. Så viser vi, at den efterfølgende også gælder, altså $p(2)$. Sådan kan man blive ved; men vi ved, at det går godt, fordi vi viser det for en vilkårlig flaske.
Hvis man tænker over det, så vil de to betingelser føre til, at domino altid vil gå godt. De sørger for, at intet kan gå galt.

Vi tager lige et eksempel. Vi vil vise, at for $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ og $n \in \mathbb{N}$ gælder $\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-x}{x-1}$.

Bevis
1) Vi viser først, at $p(1)$ er sand, altså, at venstresiden og højresiden af formlen giver det samme, når vi har $n = 1$.

$$\text{Venstresiden :} \quad \sum_{i=1}^{1} x^i = x$$
$$\text{Hoejresiden :} \quad \frac{x^2 - x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x.$$

Det var rigtigt. Manden på toilettet fik altså væltet den første flaske.
2) Nu skal vi lige vise, at en tilfældig flaske også kan vælte den efterfølgende flaske. Vi skal udlede, at $p(m+1)$ gælder, når vi antager, at $p(m)$ gælder. Dvs., vi ved, at $\sum_{i=1}^{m} x^i = \frac{x^{m+1}-x}{x-1}$. Vi

regner på $\sum_{i=1}^{m+1} x^i$ og skal nå frem til, at det er lig med $\frac{x^{(m+1)+1}-x}{x-1}$. Vi starter med at hive ledet med eksponenten $m+1$ ud af vores sum.

$$\sum_{i=1}^{m+1} x^i = \sum_{i=1}^{m} x^i + x^{m+1}.$$

Nu kan vi bruge induktionsantagelsen, og skrive ovenstående sum som den kvotient, formlen siger, det er. Vi antog jo, at sætningen gælder for m.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} x^i &= \frac{x^{m+1}-x}{x-1} + x^{m+1} \\ &= \frac{x^{m+1}-x}{x-1} + \frac{(x-1)x^{m+1}}{x-1} \\ &= \frac{x^{m+1}-x+x^{m+2}-x^{m+1}}{x-1} \\ &= \frac{x^{(m+1)+1}-x}{x-1}.\end{aligned}$$

LR.