Summation af kubiktal

Sune Precht Reeh

I sidste nummer af Famøs, i *"Blokkens blokke"*, så vi et kort og elegant geometrisk argument for den velkendte sumformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Vi springer i denne omgang kvadrattallene over[1] og summerer så kubiktal i stedet. Da fås endnu en velkendt sumformel, der sædvanligvis vises ved induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{2}$$

Som den opmærksomme læser måske hér har bemærket, gælder $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; og vi får således den overraskende sammenhæng

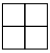
$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3. \tag{$*$}$$

Man kan nu spørge sig selv, om der findes et elegant bevis for ($*$), der ikke går via (1) og (2) – til illustration af at ($*$) ikke blot er en aritmetisk tilfældighed.

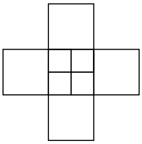
Svaret er naturligvis ja, og i det følgende beskrives et kombinatorisk/geometrisk argument, som undertegnede stødte på et par år tilbage og nu ønsker at delagtiggøre Famøs' læsere i.

Start med 4 enhedskvadrater placeret i et 2×2-kvadrat (figur 1). Langs hver side af figur 1 placeres nu et 2×2-kvadrat (figur $2'$),

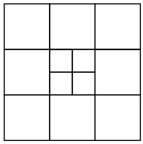
[1] Se dog referencen sidst i artiklen.



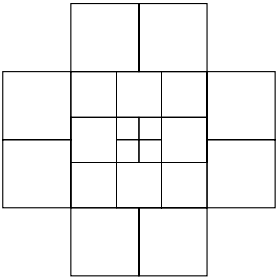
Figur 1



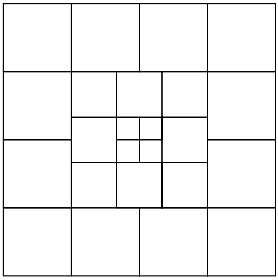
Figur 2’



Figur 2



Figur 3’



Figur 3

hvorefter hjørnekvadrater tilføjes (figur 2). Generelt laves figur k ud fra figur $k-1$ som følger:[2]

De fire ydre sider af figur $k-1$ består af $(k-1)\times(k-1)$-kvadrater med k af disse kvadrater langs hver side. Uden på figur $k-1$ kan derfor placeres $k-1$ stk. $k\times k$-kvadrater langs hver af de fire sider (figur k'). Der er således tilføjet $4(k-1)$ stk. $k\times k$-kvadrater. Hjørnerne udfyldes (figur k), hvilket kræver 4 yderligere kvadrater – så der bliver $k+1$ kvadrater langs hver af figur k’s ydre sider.

Fra figur $k-1$ til figur k bliver der derfor i alt tilføjet $4k$ stk. $k\times k$-kvadrater, så de danner en kreds rundt om figur $k-1$.

[2] Det overlades så som en øvelse til læseren selv at tegne figurerne n' og n for alle $n>3$.

For at nå frem til $(*)$, udregner vi nu arealet af figur n på to forskellige måder. Figur n er et stort kvadrat bygget op af en masse mindre kvadrater – specifikt ses af konstruktionen, at figur n består af $4k$ stk. $k \times k$-kvadrater for $1 \leq k \leq n$. Arealet af figur n er derfor

$$\text{areal(figur } n) = \sum_{k=1}^{n} (4k) \cdot k^2 = 4 \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Alternativt kan vi se på afstanden fra centrum af figur n og ud til en af figurens sider. Indefra og ud passeres først et lag af 1×1-kvadrater, derefter et lag af 2×2-kvadrater, 3×3-kvadrater, og så videre ud til det yderste lag af $n \times n$-kvadrater. Afstanden fra centrum og ud til figurens ydersider er derfor lig med $\sum_{k=1}^{n} k$; og sidelængden af figur n bliver det dobbelte. Arealet af det store kvadrat i figur n kan derfor også beregnes til

$$\text{areal(figur } n) = \left(2 \sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = 4 \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Sammenholder vi de to udtryk for arealet af figur n,

$$4 \sum_{k=1}^{n} k^3 = 4 \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2,$$

følger $(*)$ øjeblikkeligt.[3]

[3] Formlen (1) fremgår også af figur n, hvordan?

Skulle du have lyst til at læse endnu et bevis for $(*)$, er jeg undervejs i arbejdet med denne artikel stødt på [1], hvor $(*)$ vises ved at tælle rektangler i et $n \times n$-gitter. I artiklen giver forfatterne desuden et kombinatorisk bevis for

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Litteratur

[1] A.T. Benjamin, J.J. Quinn and C. Wurtz: "Summing Cubes by Counting Rectangles". *The College Mathematics Journal*, Harvey Mudd College, (November 2006). http://www.math.hmc.edu/~benjamin/papers/rectangles.pdf.