

Præmieopgave

– og svar på sidste bloks abestreges!

Jingyu She

Svar på blokkens præmieopgave (21. årgang nr. 4)

I sidste præmieopgave blev læseren bedt om at finde sandsynligheden for, at en abe, der trykkede hvert bogstav på et dansk tastatur præcis én gang og i tilfældig rækkefølge, på et tidspunkt ville skrive ordet FAMØS. Det rigtige svar⁴ var $\frac{25!}{29!}$.

Blokkens præmieopgave (22. årgang nr. 1)

*På en pind afmærkes to tilfældige punkter uafhængigt af hinanden, hvorefter pinden saves over på afmærkningerne. Hvad er sandsynligheden for, at de tre stykker kan samles til en trekant?*⁵

Blokkens ekstraopgave (22. årgang nr. 1)

*En anden pind oversaves på et tilfældigt sted. Det længste stykke oversaves endnu en gang tilfældigt. Hvad er sandsynligheden for, at de tre stykker kan samles til en trekant?*⁶

⁴Beviset for dette overlades som en let opgave til læseren. Blandt de rigtige besvarelser blev Sune('05) den heldige vinder af studiestartspakken, som er en godtepose af hjernevridere fra *Games*! Tillykke, du vil modtage din præmie snarest.

⁵Svaret bedes indsendt til famos@math.ku.dk inden 30. november. Blandt de korrekte svar, trækkes der lod om et gavekort på 100 kr. til *Games* i Jorcks Passage, så man kan forlyste sig med endnu flere hjernevridere, inden næste FAMØS udkommer.

⁶Bemærk, at besvarelse af denne opgave ikke udløser nogen præmie. Til gengæld får de læsere, der indsender en fyldestgørende besvarelse, deres navne

Svar på sidste bloks ekstraopgave

I sidste bloks ekstraopgave blev læseren bedt om at afgøre, om et rektangel partitioneret i små rektangler, hver med enten heltallig længde eller bredde, selv havde heltallig længde eller bredde. Svaret på dette er **ja**, og Sune ('05), hvis mængde af FAMØS-opgaver uden en færdig-TeX'et besvarelse endnu har mål 0, indsendte følgende fine bevis baseret på grafteori:⁷

Først placerer vi det store rektangel i 1. kvadrant af $\mathbb{R}^2$, sådan at det ene hjørne bliver placeret i $(0, 0)$; de resterende hjørner er $(b, 0)$, $(0, h)$ og (b, h) , hvor b, h er hhv. det store rektangels bredde og højde. Siderne i alle de små rektangler vil desuden nu være vandrette og lodrette. Vi danner en graf G ud fra det inddelte rektangel på følgende måde:

Knuderne i G er alle de punkter, som er hjørner i mindst ét af de små rektangler – selvom et hjørne indgår i mere end ét af de små rektangler, giver det kun anledning til en enkelt knude i grafen.

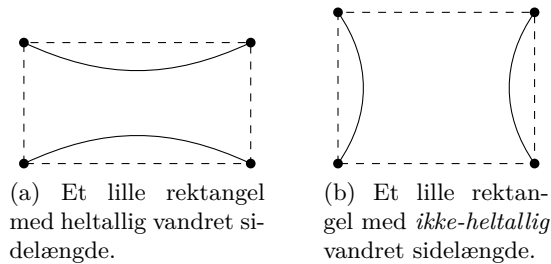
For hvert af de små rektangler ved vi fra opgaven, at den vandrette eller lodrette sidelængde er heltallig, og vi forbinder så hjørnerne herefter:

Hvis den vandrette sidelængde er heltallig, forbinder vi de øvre hjørner med hinanden, og vi forbinder de nedre hjørner med hinanden (figur 1(a)). Hvis den vandrette sidelængde *ikke* er heltallig, vil den lodrette sidelængde nødvendigvis være heltallig, og vi forbinder de venstre hjørner med hinanden og de højre hjørner

offentliggjort i næste FAMØS-blad, i den rækkefølge vi modtager jeres svar! Den første af vores kære læsere, der korrekt besvarer fire på hinanden efterfølgende opgaver, kan vælge at få printet sit ansigt på forsiden af FAMØS. Indtil videre fører Sune ('05) med en korrekt besvarelse af sidste bloks ekstraopgave.

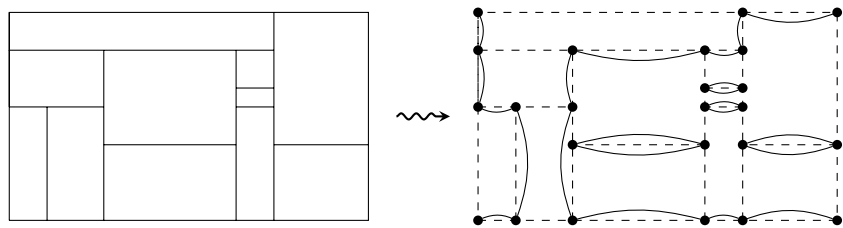
⁷For alternative beviser se "Proofs from the Book" af Aigner og Ziegler.

med hinanden (figur 1(b)). Bemærk, at hvis både de vandrette og lodrette sidelængder er heltallige, falder rektanglet ind under det første tilfælde (og ikke det andet).



Figur 1

Hvis vi starter med et rektangel, der er inddelt som i opgavens illustration, kan grafen G eksempelvis ende med at se ud som figur 2. Det stiplede omrids af den oprindelige figur er udelukkende til visuel hjælp og er *ikke* en del af grafen G .



Figur 2

Den resulterende graf G har følgende vigtige egenskab: Hvis

u og v er to knuder, der er kantforbundet, vil u og v være nabo-hjørner i et lille rektangel, og rektanglets side mellem u og v vil have heltallig længde. Der gælder i så fald at u har heltallige koordinater i $\mathbb{R}^2$, hvis og kun hvis v har heltallige koordinater.

Dette generaliserer til vilkårlige stier i G : Hvis to knuder u og v er forbundet med en sti i G , gælder at

u har heltallige koordinater $\Leftrightarrow v$ har heltallige koordinater.

Specielt gælder at enhver knude, der er forbundet i G til hjørnet $(0, 0)$, vil have heltallige koordinater.

Uanset om et lille rektangel falder under tilfælde 1(a) eller 1(b), vil det give én kant i G til hvert af det lille rektangels fire hjørner. Valensen⁸ af en knude i G er altså lig antallet af små rektangler, som knuden er hjørne i.

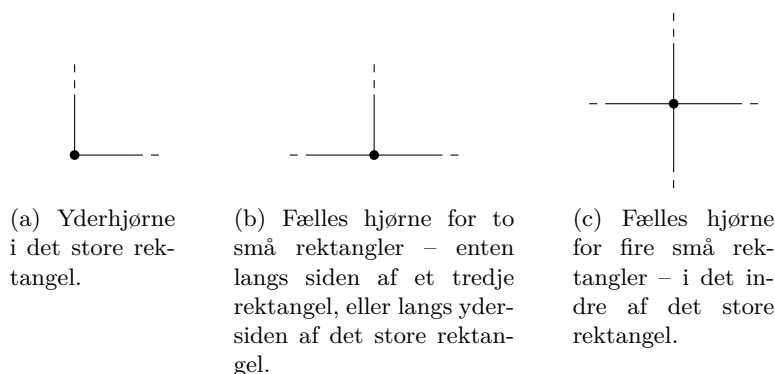
Heraf følger at der er tre mulige knudevalenser for en knude i G : Yderhjørnerne i det store rektangel indgår i netop ét lille rektangel hver (figur 3(a)); yderknuderne $(0, 0)$, $(b, 0)$, $(0, h)$ og (b, h) har derfor valens 1 i G .

Enhver anden knude i G vil være hjørne i enten 2 små rektangler (figur 3(b)) eller 4 små rektangler (figur 3(c)), hvorved valensen af knuden er hhv. 2 eller 4.

Vi foretager nu en vandring i grafen G , hvor vi starter i knuden $(0, 0)$ og vandrer uden at gentage kanter. Da $(0, 0)$ har valens 1, kommer vi aldrig tilbage til $(0, 0)$ igen. Vi bliver ved med at vandre, indtil vi ikke kan komme videre – dvs. indtil vi når en knude, hvorfra der ikke går nogen kant, som ikke allerede er benyttet i vores vandring.

Hver gang, vores vandring passerer en knude, bruges samlet 2 kanter – en ind-kant og en ud-kant. Når vi på vores vandring

⁸Antallet af kanter, der udgår fra en knude (red.)



Figur 3

ankommer til en knude, vil antallet af brugte kanter ved knuden derfor være ulige, såfremt vi medregner den kant, vi lige er ankommet af. Hvis knuden har lige valens, vil der nødvendigvis være en ubrugt kant, og vi kan fortsætte vores vandring. Vandringen kan altså kun slutte ved en knude af ulige valens; og da G kun har endeligt mange kanter, *vil* vandringen slutte.

De eneste knuder i G med ulige valens er hjørnerne $(0, 0)$, $(b, 0)$, $(0, h)$ og (b, h) , der har valens 1. Alle andre knuder har valens 2 eller 4 (jf. figur 3). Da vi starter i $(0, 0)$, må vi slutte i et af de andre yderhjørner af det store rektangel, $(b, 0)$, $(0, h)$ eller (b, h) . Det pågældende slutpunkt for vandringen er dermed forbundet i G til $(0, 0)$, og som tidligere bemærket må slutpunktet derfor have heltallige koordinater. Det følger nu, som ønsket, at enten det store rektangels bredde b , højde h eller begge er heltal.