Eneström-Kakeyas sætning

Jens Siegstad

I denne artikel skal vi studere, hvorledes nulpunkterne for et komplekst polynomium fordeler sig, hvis koefficienterne er reelle og opfylder visse betingelser. Sætningen er opkaldt efter den svenske matematiker Gustav Eneström (1852-1923) og den japanske matematiker Soichi Kakeya (1886-1947).

Sætning 1 ***(Eneström-Kakeya)***
Lad

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

være et polynomium af grad n med reelle koefficienter, der opfylder at $0 < a_0 \leq a_1 \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n$. Da ligger alle nulpunkterne for p indenfor den lukkede enhedsdisk $\overline{D(0,1)}$ i $\mathbb{C}$.

Bevis. Betragt polynomiet

$$\begin{aligned} q(z) &= (1-z)p(z) \\ &= (1-z)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right) \\ &= a_0 - a_n z^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k. \end{aligned}$$

Antag at z er et nulpunkt for p, og dermed også for q, hvor $|z| > 1$. Da har vi at

$$a_n z^{n+1} = a_0 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k.$$

Ved at benytte trekantsuligheden finder vi, at

$$
\begin{aligned}
|a_n z^{n+1}| &= \left| a_0 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k \right| \\
&\leq a_0 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) |z^k| \\
&< a_0 |z^n| + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) |z^n| \\
&= |a_n z^n|,
\end{aligned}
$$

hvilket er en modstrid, idet $a_n \neq 0$ og $|z| > 1$. Dermed ligger alle nulpunkterne for p indenfor $\overline{D(0,1)}$. □

Der findes også en anden variant af Eneström-Kakeyas Sætning:

Sætning 2 ***(Eneström-Kakeya)***
Lad

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

være et polynomium af grad n med reelle koefficienter, der opfylder at $a_0 \geq a_1 \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n > 0$. Da ligger alle nulpunkterne for p udenfor den åbne enhedsdisk $D(0,1)$ i $\mathbb{C}$.

Bevis. Overladt til læseren. □

Eneström-Kakeyas sætning kan generaliseres, og dette kan man læse mere om i [3].

Litteratur

[1] John M. Howie. *Complex Analysis. An Invitation.* World Scientific 1991.

[2] Morris Marden *Geometry of Polynomials.* 2nd Edition, American Mathematical Society, Providence, 1966.

[3] N. K. Govil and Q. I. Rahman *On the Eneström-Kakeya Theorem.* Tohoku Mathematical Journal, Vol. 20, 1968, pp. 126-136.