# Løsning af tredjegradsligningen

*Jens Siegstad, Kasper Fabæch Brandt og Jingyu She*

## Substitution en masse

Vi vil i denne artikel vise, hvorledes man kan løse den generelle tredjegradsligning

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0 \tag{1}$$

hvor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ og $\alpha_4$ er reelle tal, og $\alpha_1 \neq 0$. Ved division med $\alpha_1$ fås den reducerede ligning

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

hvor

$$a = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad , \quad b = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \quad \text{og} \quad c = \frac{\alpha_4}{\alpha_1}.$$

Vi vil nu løse den reducerede ligning[23] ved at benytte en række snedige tricks. Vi vil første skille os af med andengradsleddet ved at substituere $x = y - \frac{1}{3}a$ i (2):

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(y - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(y - \frac{1}{3}a\right) + c \\ &= y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c. \end{aligned}$$

hvorved ligningen (2) kan skrives på formen

$$y^3 + py + q = 0 \tag{3}$$

[23]Da de to ligninger er ækvivalente, vil rødderne i anden ligning præcis være rødderne i første ligning.

hvor $p = b - \frac{1}{3}a^2$ og $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$. Bemærk, at ligningssystemet er nemt at løse, hvis $p$ eller $q$ er lig 0. I følgende betragter vi derfor kun tilfælde, hvor $p, q \neq 0$. Sættes $y = u + v$, fås [24]:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \iff \begin{cases} p = -3uv \\ q = -(u^3 + v^3) \end{cases} \tag{4}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{p^3}{27} = u^3v^3 \\ q = -(u^3 + v^3) \end{cases} . \tag{5}$$

Det er altså tilstrækkeligt at finde $u$ og $v$, så ligningssystemet i (5) løses. Bemærk desuden, at $p, q \neq 0$ tillader os at antage

$$u, v \neq 0 \quad \text{og} \quad u + v \neq 0.$$

Vi vil konstruere en andengradsligning, hvor koefficienterne er en snedig konstruktion af $p$ og $q$, som vi *allerede kender fra vores tredjegradsligning*, og hvor rødderne af andengradsligningen viser sig at være netop $u^3$ og $v^3$, hvor $u$ og $v$ opfylder (5). Et kvalificeret gæt kunne være:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{6}$$

Vi skal altså vise, at

$$u \text{ og } v \text{ opfylder (5)} \iff u^3 \text{ og } v^3 \text{ er rødder i (6)}.$$

Vi starter med at vise " $\Rightarrow$ "-implikationen. Antag, at $u$ og $v$ opfylder ligningssystemet i (5). Da fås det ønskede ved at evaluere (6) i $z = u^3$ og $z = v^3$, efter substitution af koefficienterne i (6) med de ækvivalente udtryk fundet i (5).

[24]Læseren kan eftervise (4) ved at bemærke $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Vi viser nu, at hvis $u^3$ og $v^3$ er rødder i (6), så er ligningerne i (5) opfyldt. Per antagelse har vi:

$$(u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$
$$(v^3)^2 + qv^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Det giver mening[25] at dividere med $u^3$ hhv. $v^3$:

$$u^3 + q - \frac{p^3}{27u^3} = 0$$
$$v^3 + q - \frac{p^3}{27v^3} = 0$$

Ved at isolere $q$ i begge ligninger fås:

$$q = \frac{p^3}{27u^3} - u^3 = \frac{p^3}{27v^3} - v^3 \tag{7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{p^3}{27}\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{v^3}\right) = u^3 - v^3 \tag{8}$$

Lidt omrokering giver:

$$\begin{aligned}\frac{p^3}{27} &= \frac{u^3 - v^3}{\frac{1}{u^3} - \frac{1}{v^3}} \\ &= \frac{\left(u^3 - v^3\right) u^3 v^3}{\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{v^3}\right) u^3 v^3} \\ &= -u^3 v^3\end{aligned}$$

[25] Per antagelse er $u, v \neq 0$.

Substitution, i udtrykket for $q$ fra første lighedstegn i (8), giver:

$$q = -(u^3 + v^3)$$

Altså ser vi, at ligningerne i (5) er opfyldte.

Vi kan altså finde $u^3$ og $v^3$ ved at løse andengradsligningen i (6). Ideen er derefter at finde en af løsningerne $y_1 = u_1 + v_1$ på (3), hvorefter en af løsningerne $x_1 = y_1 - \frac{1}{3}a$ til (2) kan bestemmes. Resten af magien foregår ved polynomiumsdivision til at få en andengradsligning, hvis rødder er de to resterende rødder af tredjegradsligningen.

Til at finde $u_1$ og $v_1$ bestemmes først den ene kubikrod $u_1$ af $u^3$. Vi udnytter da restriktionen $3u_1v_1 = -p$ fra (4) til at bestemme $v_1$.

## Lidt historie

Det netop gennemgåede er en variation af *Cardanos formel*. Det var i hans arbejde med tredjegradsligninger, at han indså nødvendigheden af at udvide det daværende talsystem. Det pudsige ved denne metode er, at vi i beregningen af $u^3$ godt kan komme ud for at tage kvadratroden til et negativt tal, og så alligevel have at $u_1$ er reelt! Inden fødslen af de komplekse tal må det have en været en overraskende opdagelse.

## Et eksempel

I følgende eksempel demonstreres brugen af det netop beviste. Vi starter med tredjegradsligningen:

$$2x^3 - 30x^2 + 162x - 350 = 0 \tag{9}$$

Ved division med koefficienten på tredjegradsleddet reduceres ligningen til formen (2):

$$x^3 - 15x^2 + 81x - 175 = 0$$

Så vi har $a = -15, b = 81, c = -175$. Vi skriver nu ligningen om til formen (3), med følgende $p$ og $q$-værdier:

$$p = b - \frac{1}{3}a^2 = 81 - \frac{225}{3} = 6$$
$$q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = \frac{-2 \cdot 3375}{27} + \frac{1215}{3} - 175 = -20$$

Nu kan vi bestemme $u^3$, som den ene rod i (6):

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 10 + \sqrt{108}$$

En kubikrod for $u$ kan være $u_1 = 1 + \sqrt{3}$. Idet $3u_1v_1 = -p = 1$, fås $v_1 = \frac{-p}{3u_1}$, dvs. $v_1 = \frac{-2}{1+\sqrt{3}}$. Da $y_1 = u_1 + v_1 = 0$, kan vi nu substitutere tilbage, for at finde en af rødderne til tredjegradsligningen:

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3} = 1 + \sqrt{3} + \frac{-2}{1+\sqrt{3}} + \frac{15}{3} = 7$$

Den ene af rødderne er altså 7. Vi udfører nu polynomiumsdivision for at få et andengradspolynomium, hvis rødder er de to resterende rødder:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -15x^2 & +81x & -175 & x-7 \quad = \quad x^2-8x+25 \\
-(x^3 & -7x^2) & & & \\
\hline
 & -8x^2 & +81x & -175 & \\
 & -(-8x^2 & +56x) & & \\
\hline
 & & 25x & -175 & \\
 & & -(25x & -175) & \\
\end{array}$$

Vi får, at rødderne i $x^2 - 8x + 25$ er de to resterende løsninger til (9), hvilke vi let kan finde ved løsningsformlen for en andengradsligning:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 4 \pm 3i$$

Altså finder vi, at alle løsningerne til (9) er 7, $4 + 3i$ og $4 - 3i$.

## Litteratur

[1] *Matematiske Horisonter.*
DTU,2011.
Bogen kan hentes her: http://www.imm.dtu.dk/Om_IMM/Informationsmateriale/MatematiskeHorisonter.aspx